Mechanik

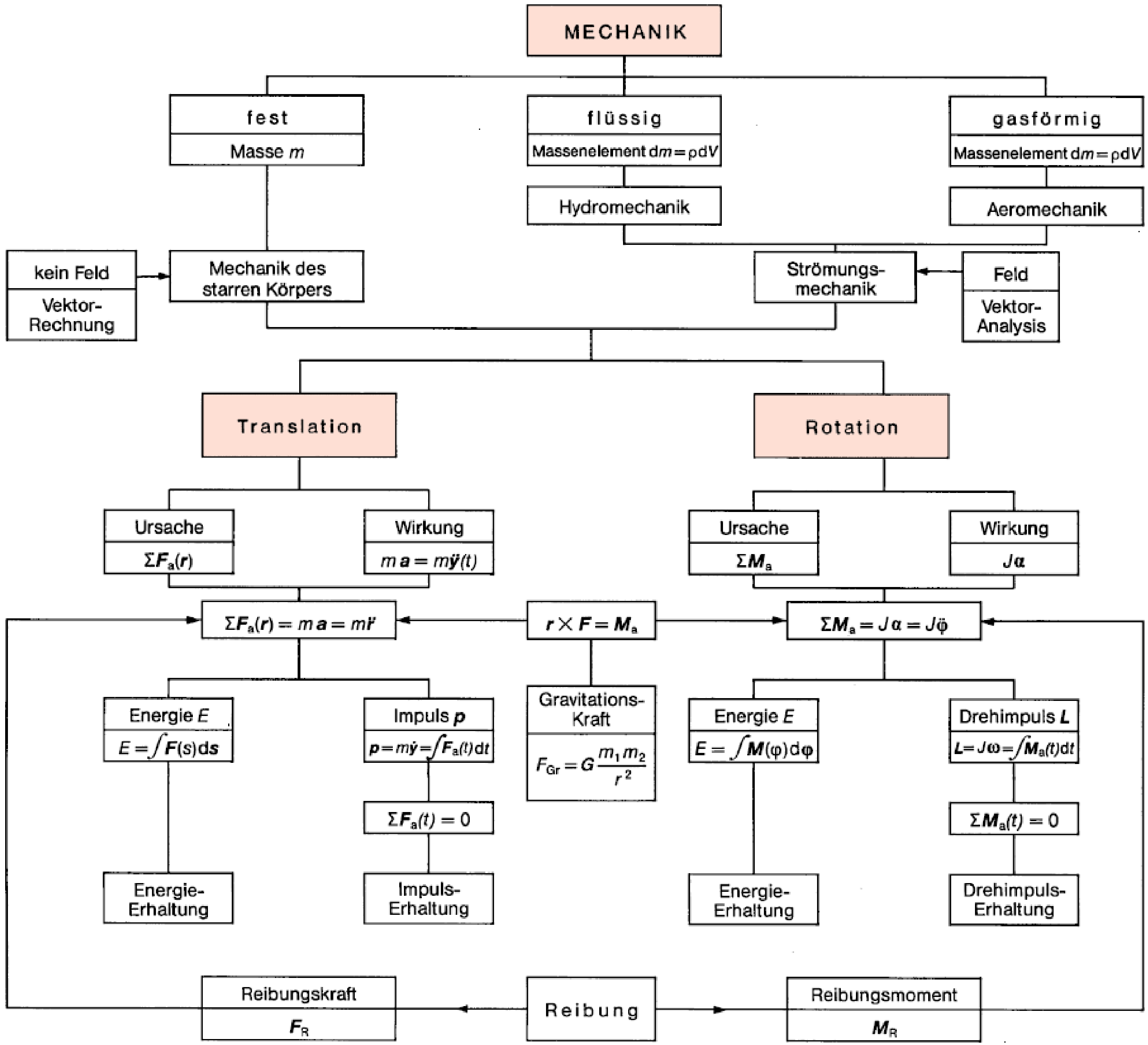


Abb. 2.1 Strukturbild der Mechanik

Kinematik

Geschwindigkeit

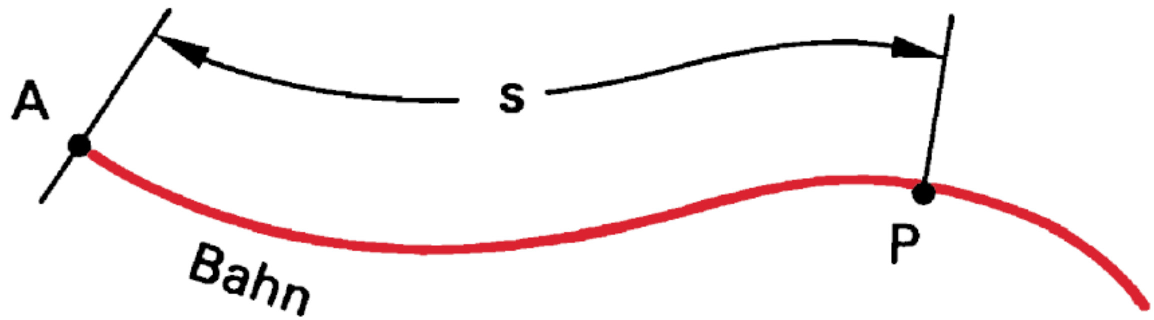


Abb. 2.2 Ortskoordinate eines Punktes P auf vorgegebener Bahn *s* Weg vom Anfangspunkt A

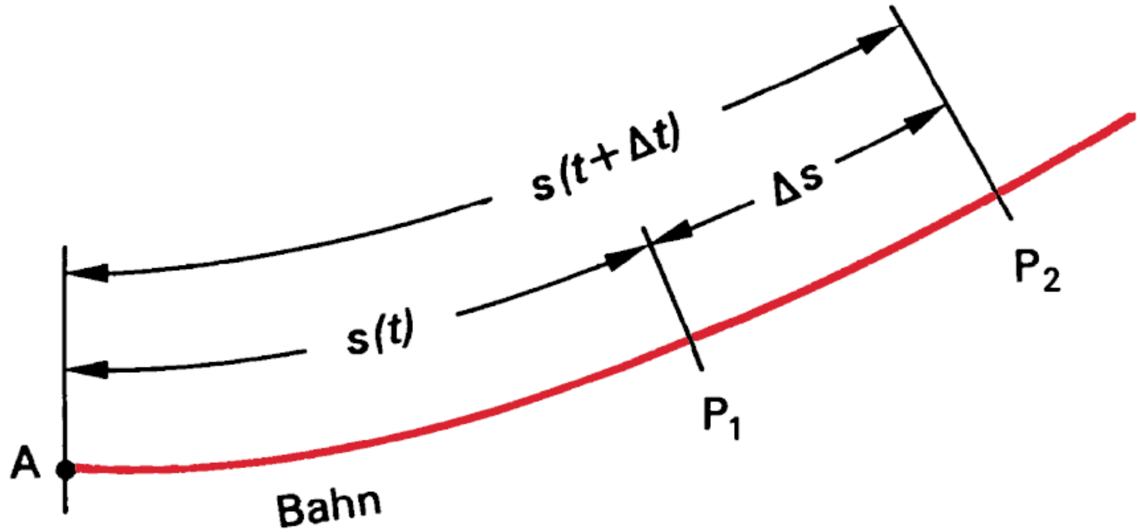


Abb. 2.3 Zur Definition der Geschwindigkeit, t Zeit (sonstige Bezeichnungen wie in Abb. 2.1)

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \,. \tag{2.1}$$

mittlere Geschwindigkeit

m/s

mittlere Geschwindigkeit

Momentangeschwindigkeit

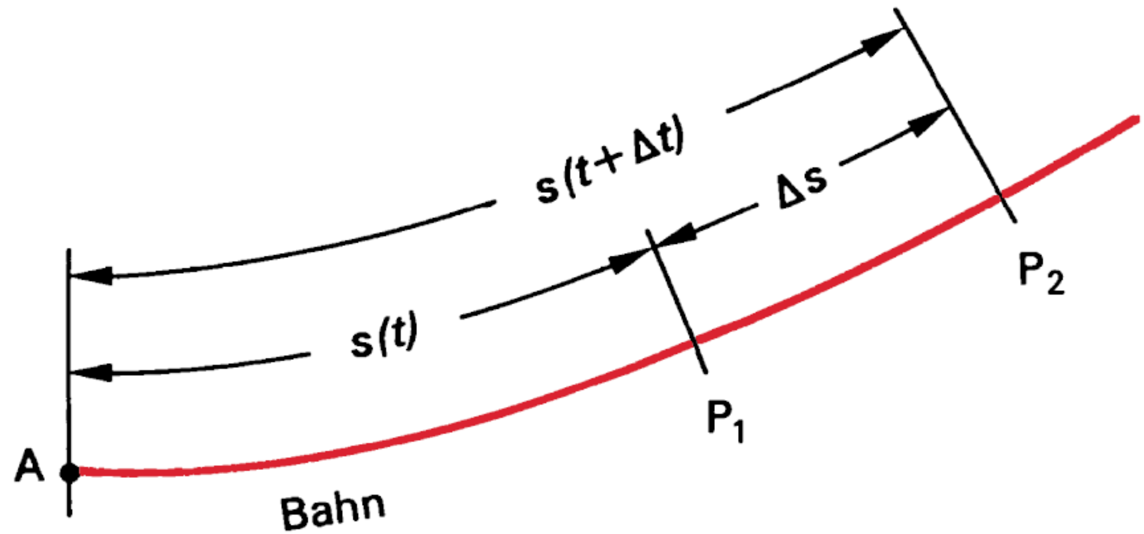


Abb. 2.3 Zur Definition der Geschwindigkeit, *t* Zeit (sonstige Bezeichnungen wie in Abb. 2.1)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}\,. \tag{2.2}$$

Die Geschwindigkeit ist die Steigung der Kurve in einem Weg-Zeit-Diagramm.

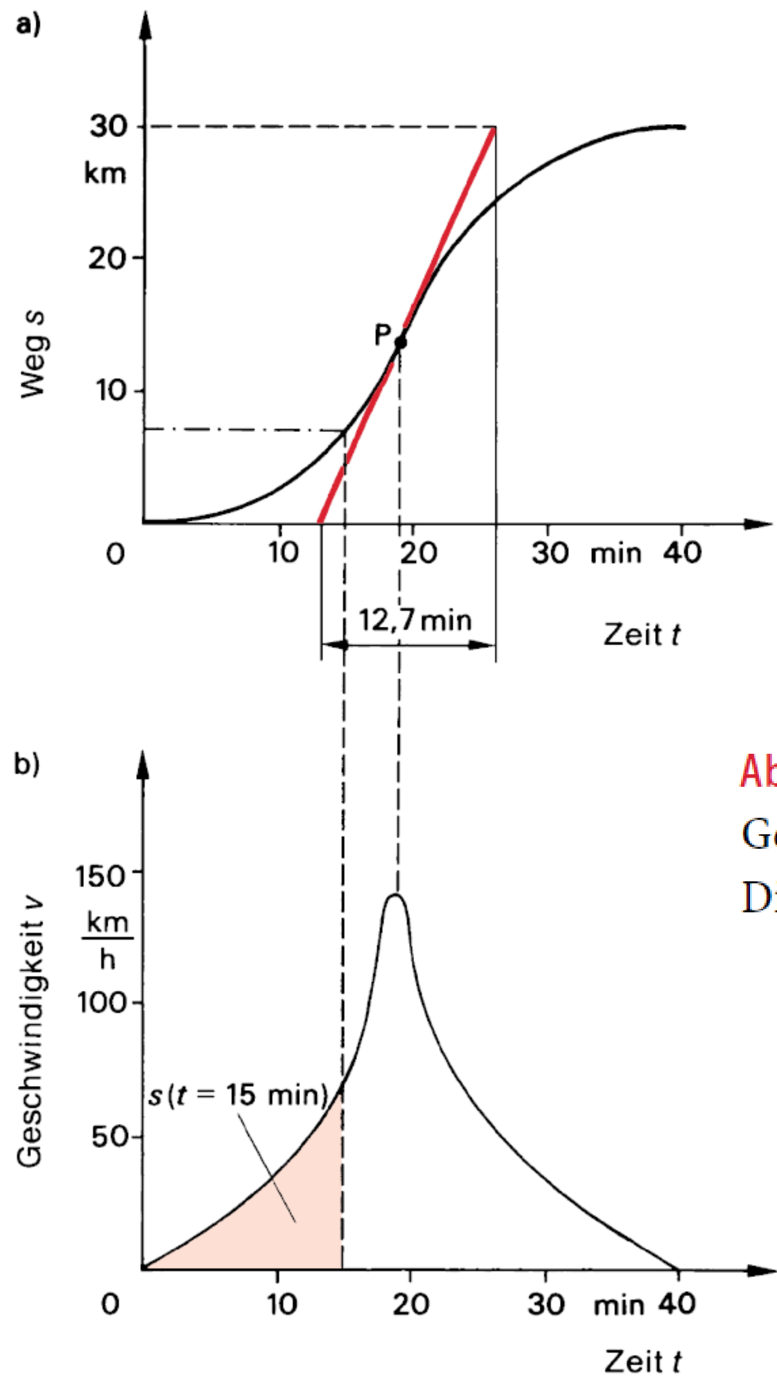


Abb. 2.4 Bewegung mit ungleichförmiger Geschwindigkeit (Beispiel 2.2-1). **a**) Weg-Zeit-Diagramm, **b**) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \qquad (2.3)$$

Beschleunigung

$$a_{\mathrm{m}} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \,. \tag{2.4}$$

mittlere Beschleunigung

m/s²

mittlere Beschleunigung

Momentanbeschleunigung

Momentanbeschleunigung

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v}\,. \qquad (2.5)$$

Die Beschleunigung ist die Steigung der Kurve in einem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

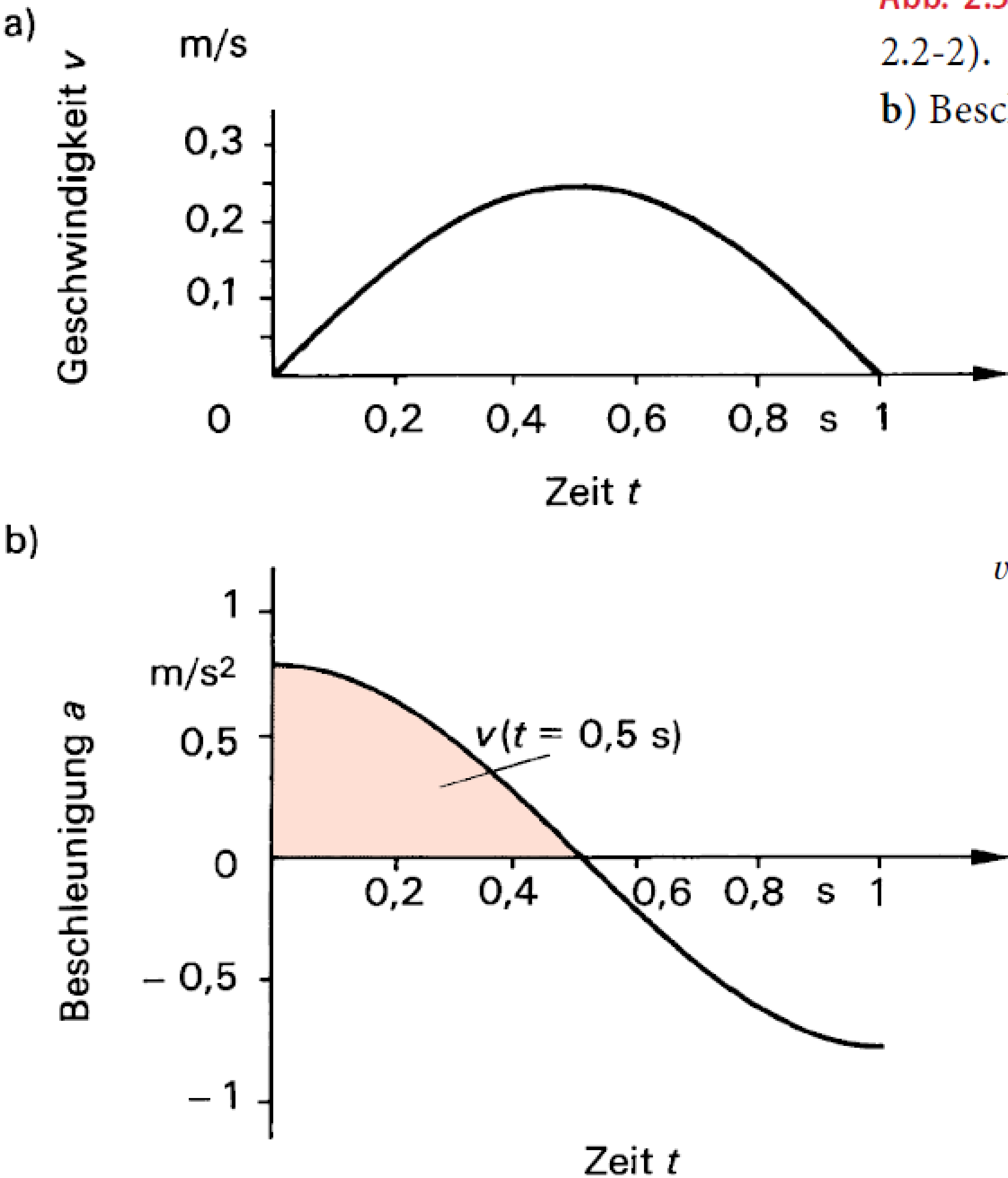
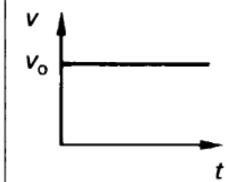
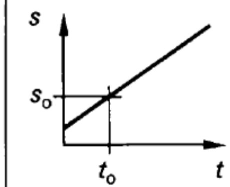
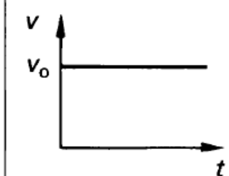
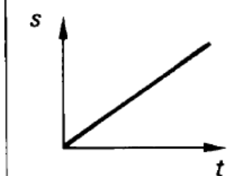
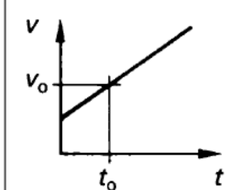
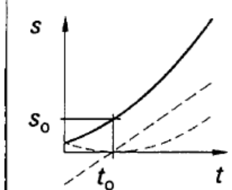
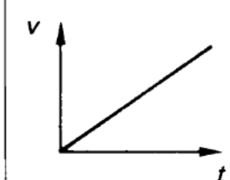
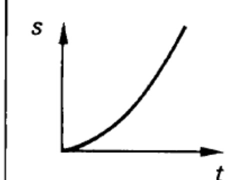


Abb. 2.5 Beschleunigte Bewegung (Beispiel 2.2-2). **a**) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, **b**) Beschleunigung-Zeit-Diagramm

$$v(0{,}5\,\mathrm{s}) = \int_0^{0{,}5\,\mathrm{s}} 0{,}79\,\mathrm{m/s^2} \cdot \cos(3{,}14\,\mathrm{s}^{-1}t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 0{,}25\,\mathrm{m/s}\,.$$

Einfache Spezialfälle

	Beschleunigung	Anfangsbedingungen	Geschwindigkeit	Ort	v, t-Diagramm	s, t-Diagramm
Definition	a	s_0, v_0	$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$		
gleichmäßige Geschwindigkeit	$a = 0$	$s = s_0$ zur Zeit $t = t_0$	$v = v_0$	$s = s_0 + v_0(t - t_0)$		
		$s = 0$ zur Zeit $t = 0$	$v = v_0$	$s = v_0\, t$		
gleichmäßige Beschleunigung	$a = a_0$	$s = s_0$ $v = v_0$ zur Zeit $t = t_0$	$v = v_0 + a_0(t - t_0)$	$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2$		
		$s = 0$ $v = 0$ zur Zeit $t = 0$	$v = a_0\, t$ $v = \sqrt{2 a_0 s}$	$s = \frac{1}{2} a_0 t^2$ $s = \frac{v^2}{2 a_0}$		

Beispiel: freier Fall

konstante Beschleunigung

$g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

Dreidimensionale Kinematik

Ortsvektor und Bahnkurve

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Wichtig: vorteilhaftes Koordinatensystem

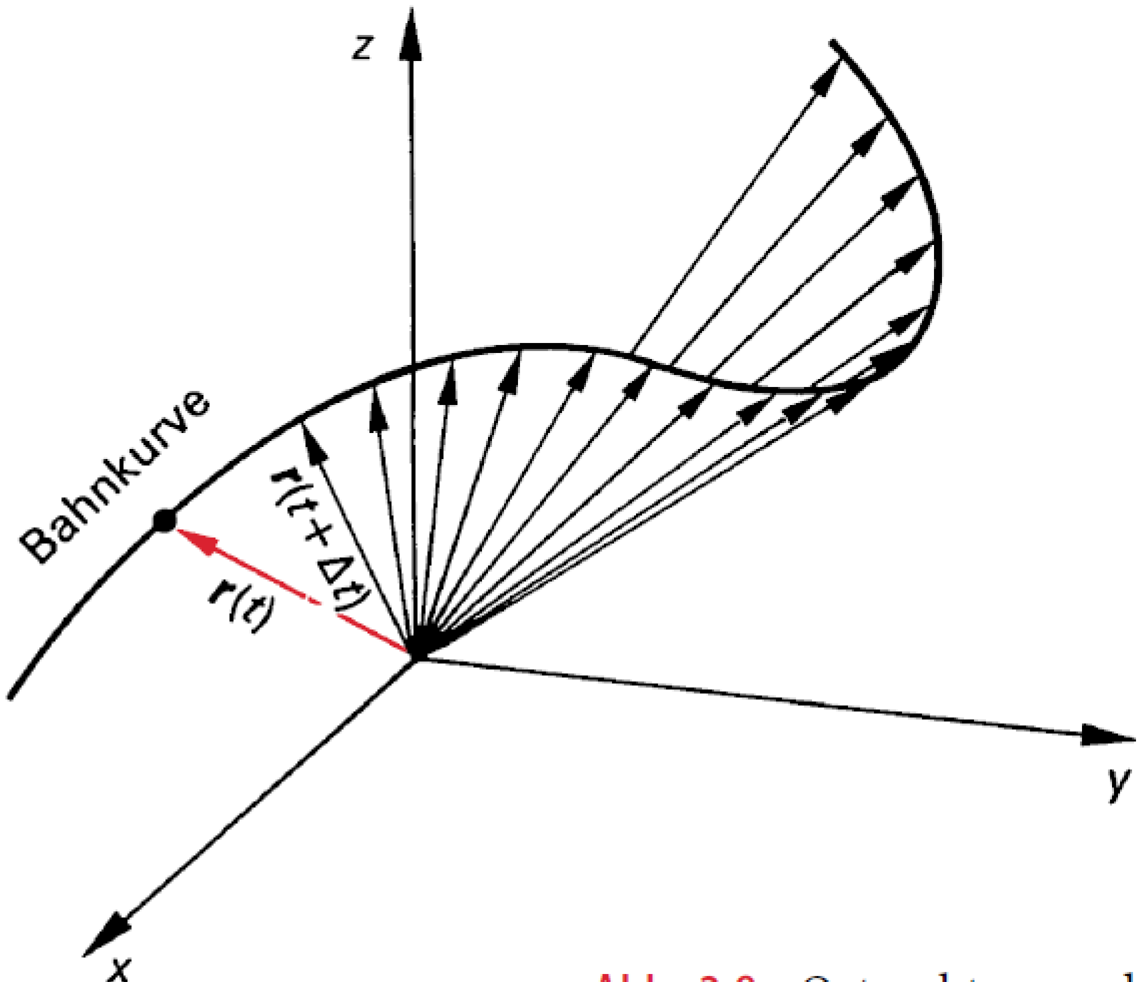


Abb. 2.8 Ortsvektor und Bahnkurve. x, y, z Raumkoordinaten, t Zeit

Geschwindigkeitsvektor

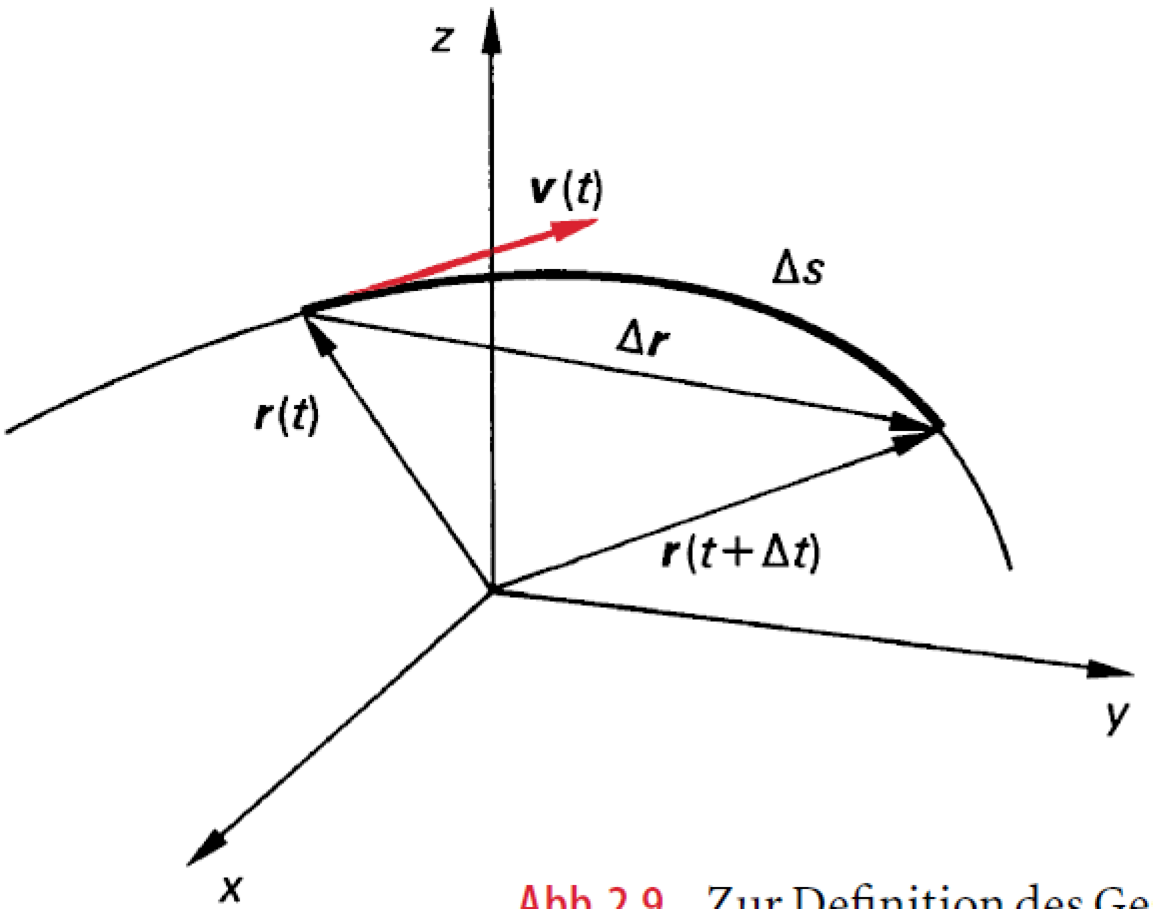


Abb. 2.9 Zur Definition des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$. x, y, z Raumkoordinaten, t Zeit, s Weg, $\boldsymbol{r}$ Ortsvektor

mittlere Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{m}} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \, . \qquad (2.11)$$

Momentangeschwindigkeit

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} . \qquad (2.12)$$

Der Vektor $\boldsymbol{v}$ der Momentangeschwindigkeit liegt stets tangential zur Bahnkurve.

Tangenteneinheitsvektor

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{tan}}$$

- Betrag eins
- Richtung der Tangente an die Bahnkurve

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_{\mathrm{tan}} \; . \tag{2.13}$$

Beschleunigungsvektor

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} . \qquad (2.14)$$

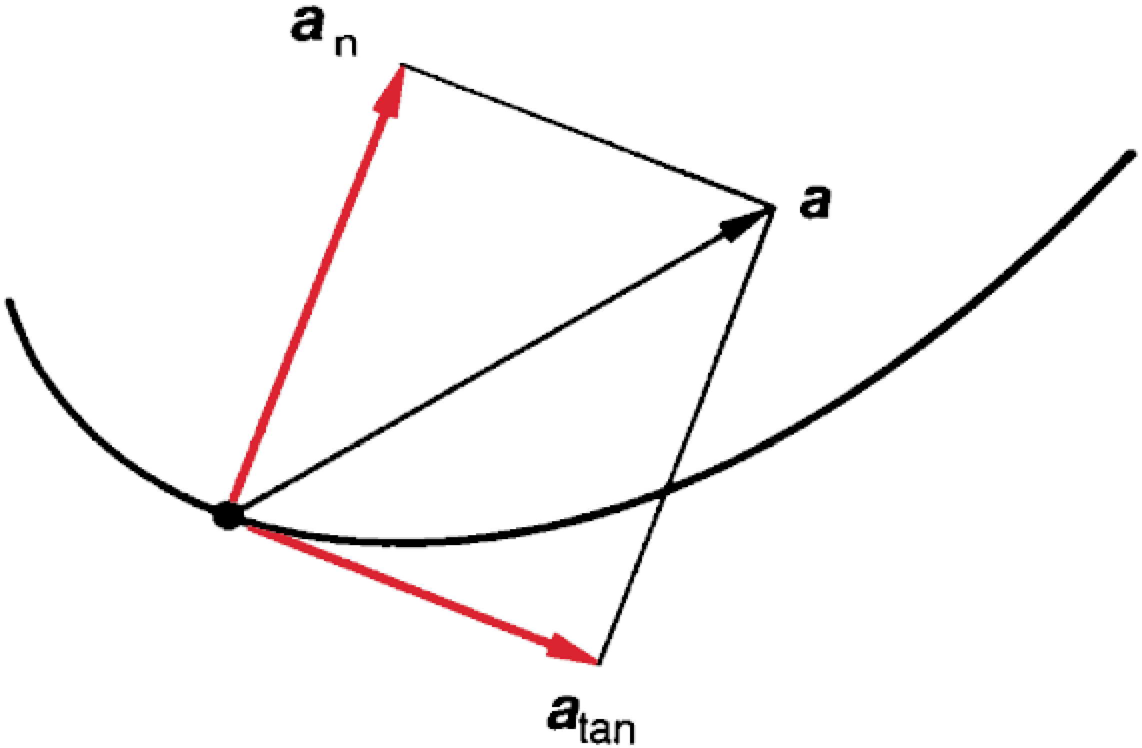


Abb. 2.10 Tangential- und Normalkomponenten des Beschleunigungsvektors

Tangentialkomponenten a_{tan}

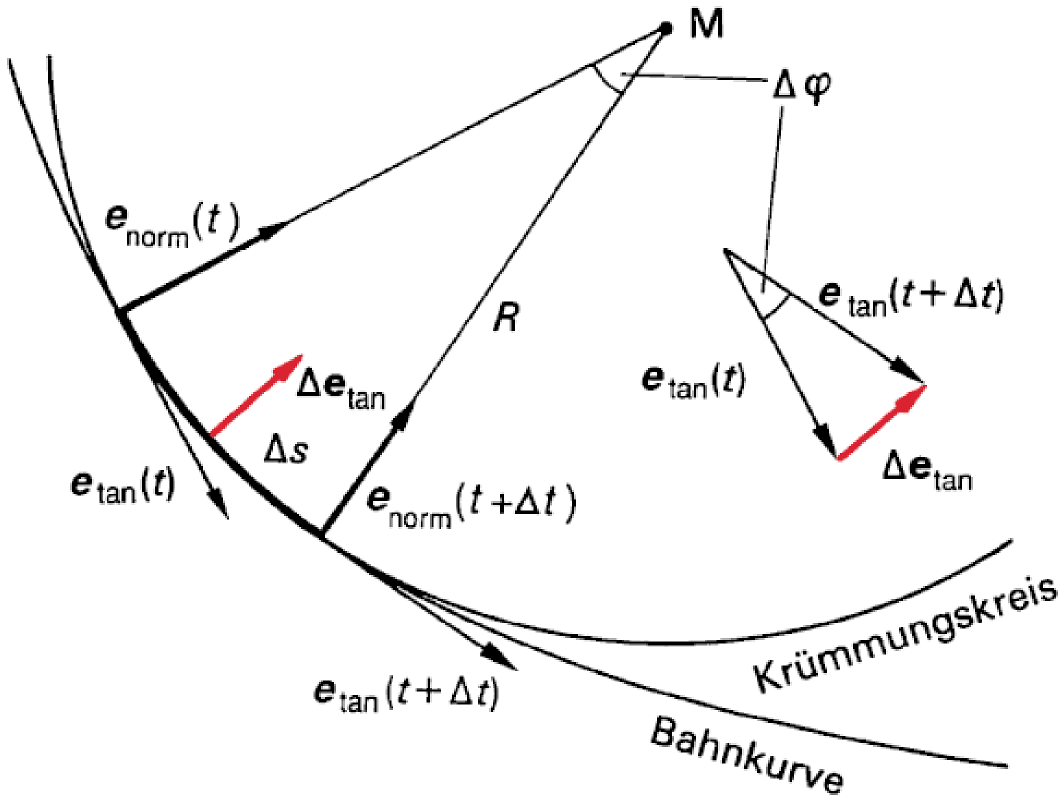
Normalkomponenten a_{norm}

$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_{\mathrm{tan}}$.

nach der Zeit differenziert

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{tan}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{norm}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{tan}} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{tan}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{tan}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{tan}} \tag{2.15}$$



Normaleinheitsvektor

$\boldsymbol{e}_{\mathrm{norm}}$

Abb. 2.11 Zur Bestimmung der Differentialquotienten $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{tan}}/\mathrm{d}t$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{norm}} = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_{\mathrm{norm}} \qquad (2.16)$$

Kreisbewegungen

Bei einer Kreisbewegung ist die Normalkomponente der Beschleunigung stets zum Kreismittelpunkt gerichtet; man nennt sie deshalb auch *Zentripetalbeschleunigung*.

$$|\boldsymbol{a}_{\mathrm{zp}}| = \frac{v^2}{r} \,. \qquad (2.18)$$

Tangentialbeschleunigung $|\boldsymbol{a}_{\tan}| = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$

$$\varphi = \frac{s}{r} \; . \tag{2.19}$$

1 m/m = 1 rad

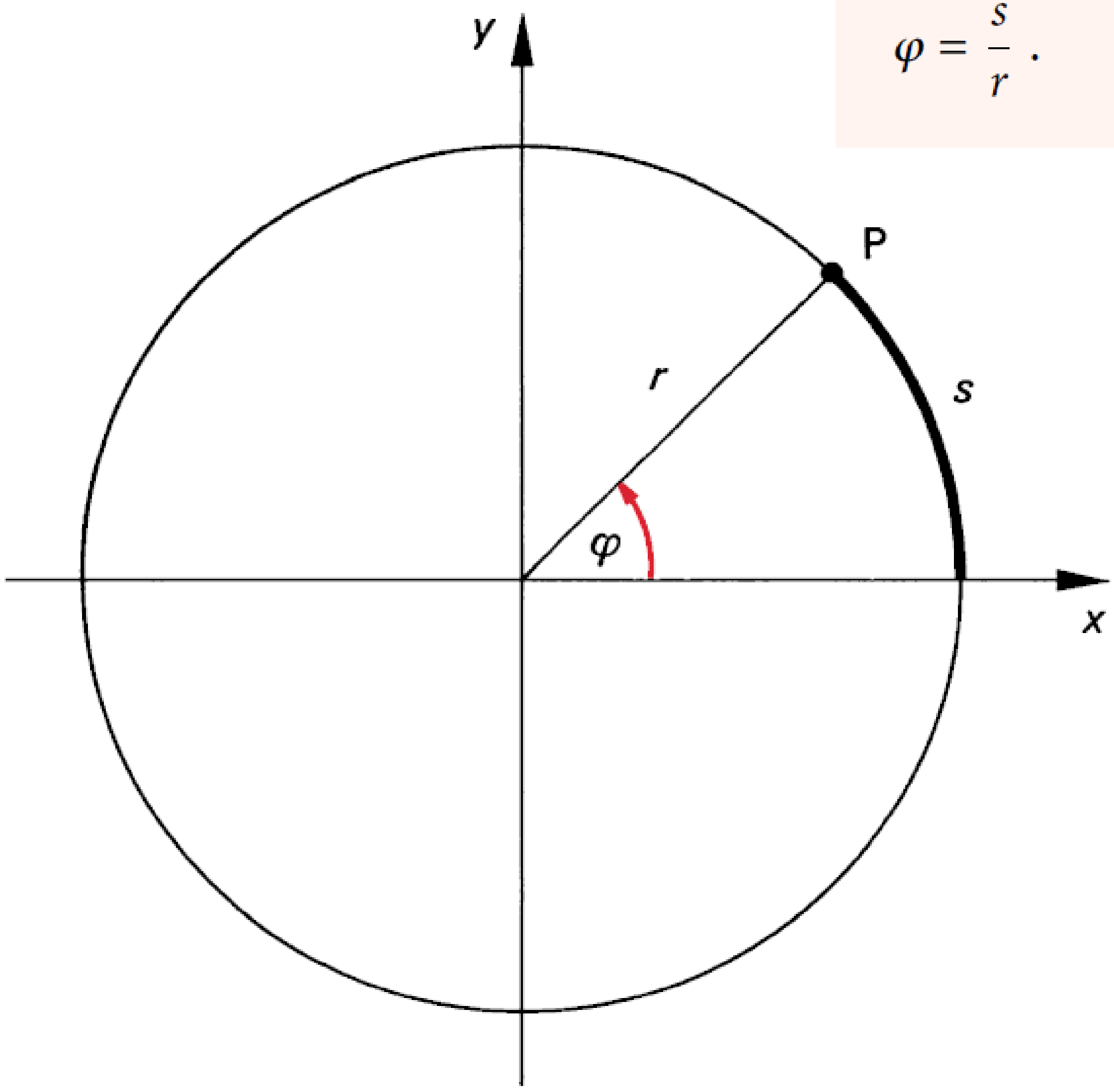


Abb. 2.13 Definition des Drehwinkels φ der Kreisbewegung. r Radius, s Bogenlänge

Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (2.20)$$

1 rad/s oder $1\ \mathrm{s}^{1}$

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}\ . \qquad (2.21)$$

Drehzahl bzw. Drehfrequenz *n*

Periodendauer *T*

Zentripetalbeschleunigung $\boldsymbol{a}_{\mathrm{zp}}$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{zp}} = -\omega^2 \boldsymbol{r} \,. \tag{2.22}$$

Winkelbeschleunigung α

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \,. \tag{2.23}$$

1 rad/s^2 oder 1 s^2

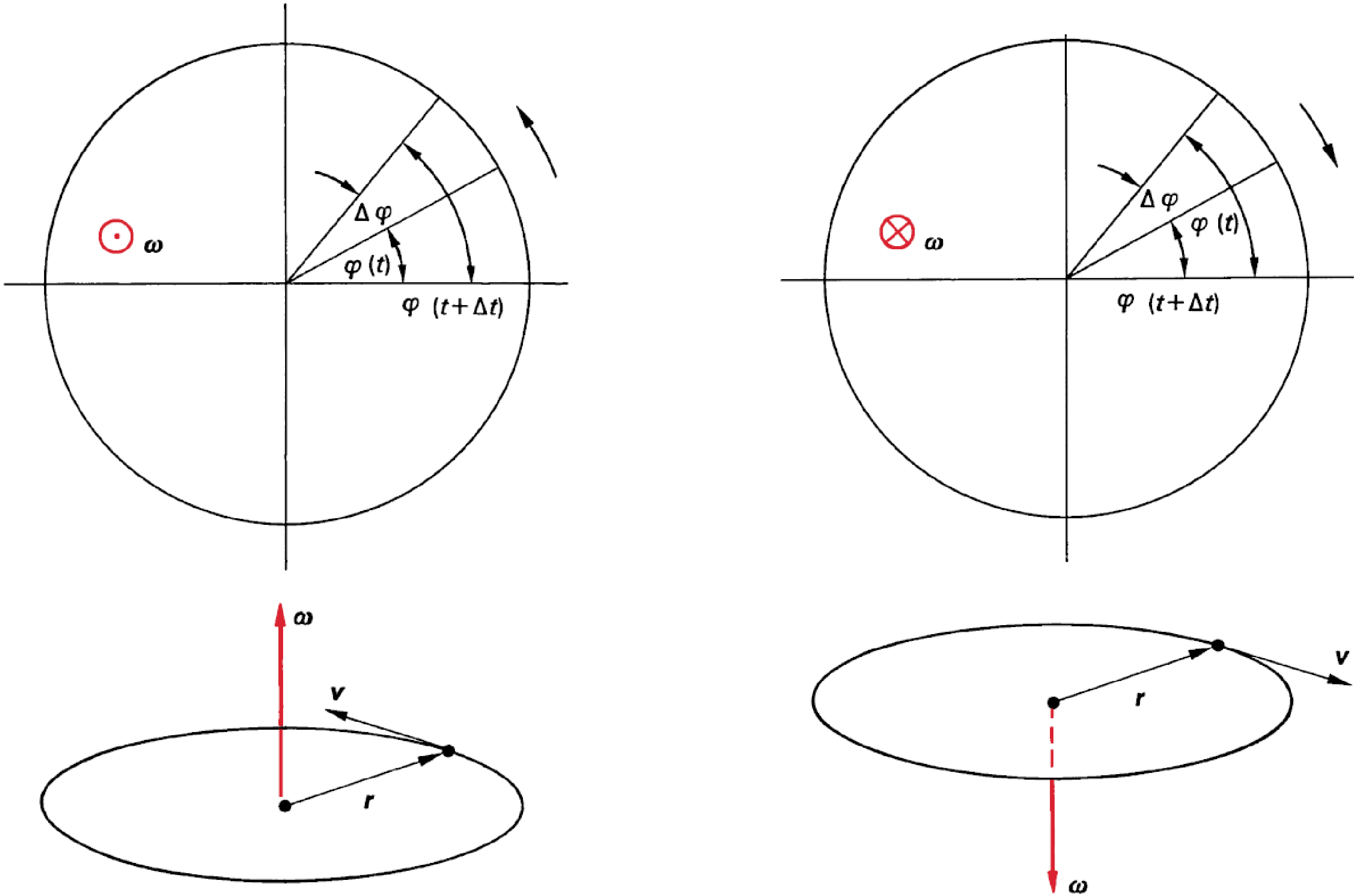


Abb. 2.14 Zur Definition der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ bei verschiedenen Drehrichtungen.

Pfeilspitze $\odot\ \omega$

Pfeilende $\otimes\ \omega$

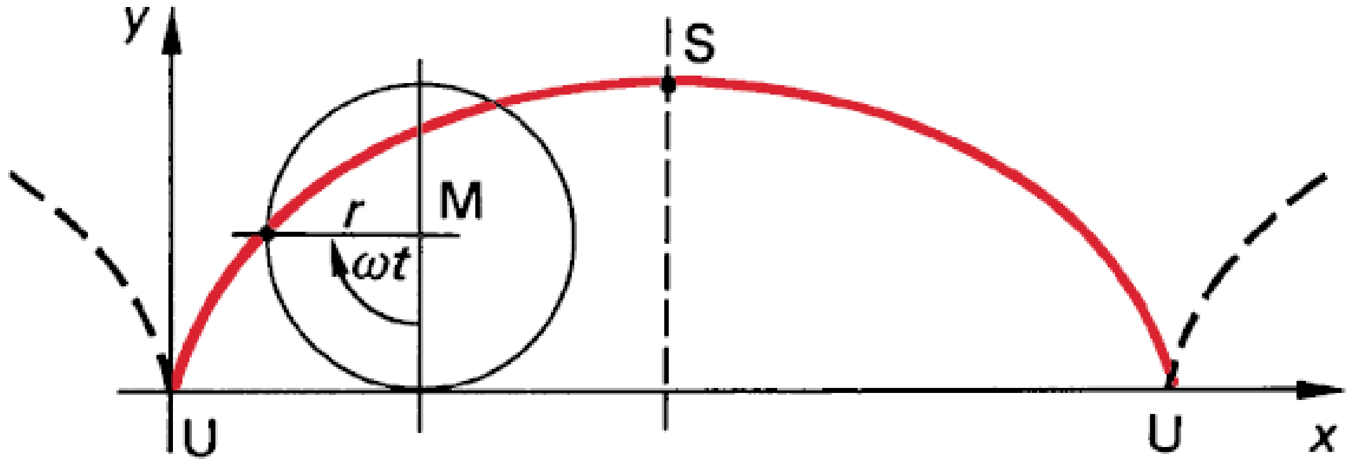


Abb. 2.15 Zykloide als Bahnkurve eines Punktes auf der Lauffläche eines Rads (Beispiel 2.2-5)