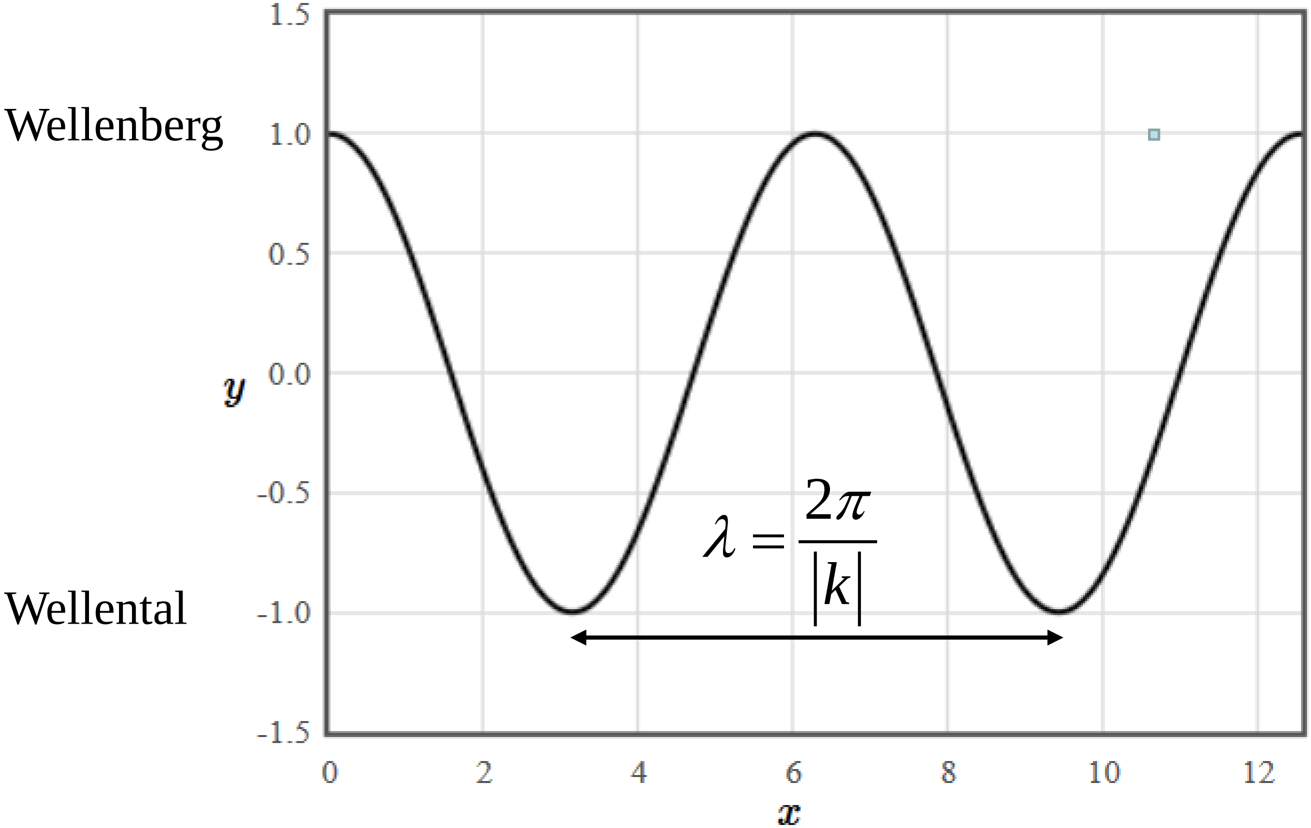
Wellenzahl

$$y = A\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

Wellenzahl [rad/m]

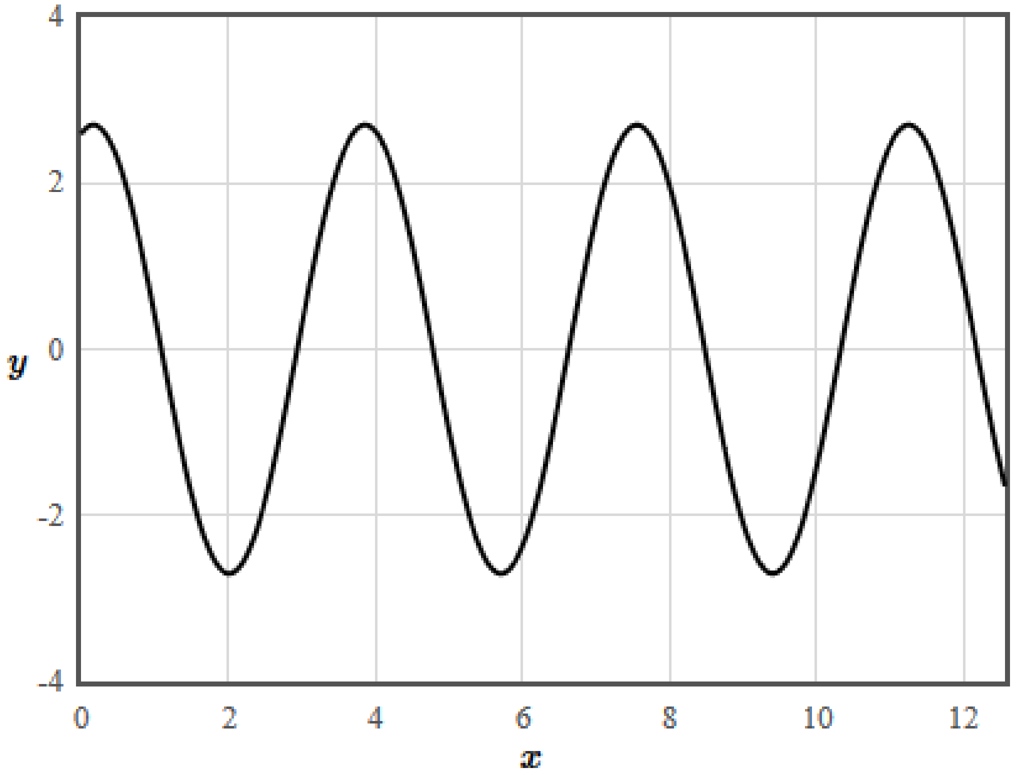


Wellenausbreitung

Eine sich ausbreitende Welle hat die Form

$$y = A\cos(kx - \omega t + \varphi).$$

Ist $k\omega > 0$, bewegt sich die Welle in $+x$-Richtung und bei $k\omega < 0$ in die $-x$ Richtung.



A = 2.7 [m]

k = 1.7 [1/m]

ω = 0.3 [rad/s]

φ = 0 [rad]

$\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$ =3.70 [m]

$T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ =20.9 [s]

$t = 21.9$

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Partielle Differentialgleichung

eine Lösung ist $y = A\cos(kx - \omega t + \varphi)$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = c^2 k^2 \qquad c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \qquad f = \frac{c}{\lambda}$$

harmonischen Wellen sind die Eigenmoden der Wellengleichung

Energie

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(kx - \omega t)$$

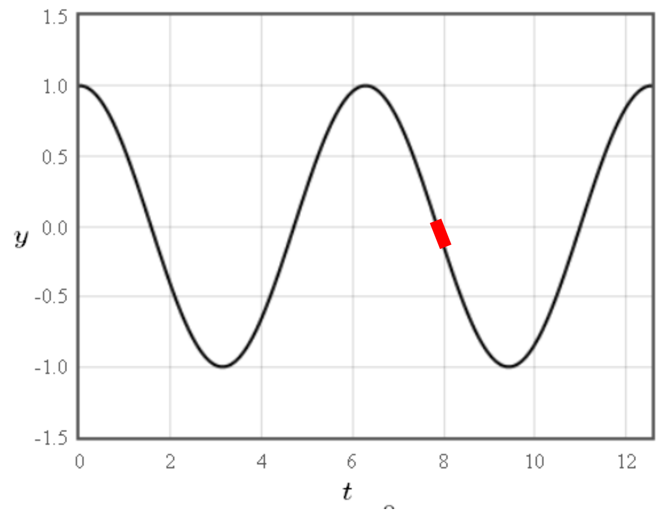
$$F = ma = -m\omega^2 y$$ Hookesches Gesetz

$$E_{pot} = -\int F dy = \frac{m\omega^2 y^2}{2}$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$E_{tot} = \frac{\omega^2 A^2 \rho dx}{2}\left(\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t)\right) = \frac{\omega^2 A^2 \rho dx}{2}$$

$$y = A\cos(kx - \omega t + \varphi).$$



ρ = Massendichte [kg/m]

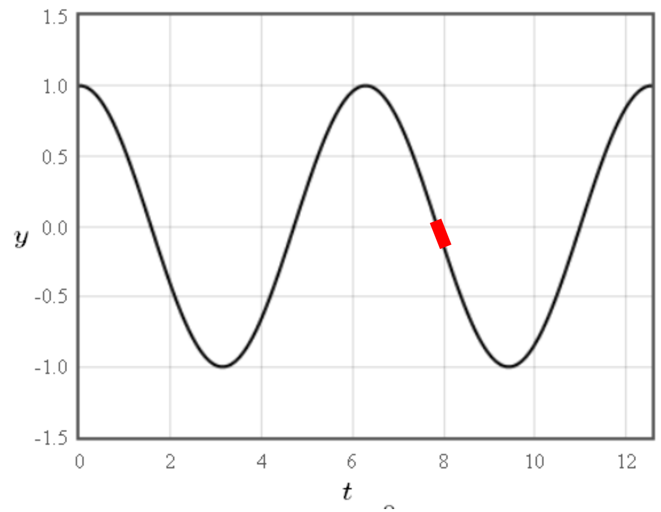
Leistung

$$y = A\cos(kx - \omega t + \varphi).$$

$$E_{tot} = \frac{\omega^2 A^2 \rho dx}{2} \ [\mathrm{J}]$$

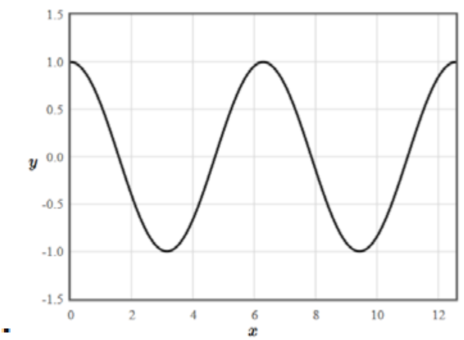
$$P = \frac{\omega^2 A^2 \rho}{2} \frac{\lambda}{T} \ \left[\frac{J}{s} = W\right]$$

$$P = \frac{\omega^2 A^2 \rho}{2} c \ [W]$$



ρ = Massendichte [kg/m]
c = Wellengeschwindigkeit [m/s]

Wellenausbreitung



Eine sich ausbreitende Welle hat die Form

$$y = -57\cos(-63x + 35t + 17).$$

Hier werden x und y in Metern und t in Sekunden angegeben.

Wie groß ist die Wellenlänge? $\lambda =$ ____ [m]

Wie groß ist die Periode? $T =$ ____ [s]

Wie lautet die Wellengeschwindigkeit? (Die Geschwindigkeit kann negativ werden.) $v =$ ____ [m/s]

Welchen Maximalwert kann $\frac{\partial y}{\partial t}$ annehmen? $\frac{\partial y}{\partial t} =$ ____ [m/s]

Welchen Maximalwert kann $\frac{\partial y}{\partial x}$ annehmen? $\frac{\partial y}{\partial x} =$ ____

Lösung

Ein sich ausbreitende Welle,

$$y = A\cos(kx - \omega t + \phi),$$

hat die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{|k|} = 0.0997$ [m],

und die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 0.180$ [s].

Die Geschwindigkeit ist $v = \frac{\omega}{k}$ =0.556 [m/s].

Die Ableitung nach t liefert,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega A\sin(kx - \omega t + \phi),$$

Der Maximalwert von $\frac{\partial y}{\partial t}$ ist $|\omega A| = 1995$ [m/s].

Die Ableitung nach x liefert,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA\sin(kx - \omega t + \phi),$$

Der Maximalwert von $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist $|kA| = 3591$.

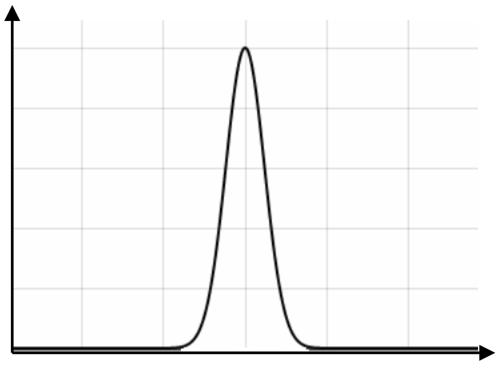
Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Partielle Differentialgleichung

$$\xi = kx - \omega t + \varphi$$

eine Lösung ist $\quad y = f(kx - \omega t + \varphi)$



$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

Kettenregel

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\omega^2 = c^2 k^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

jede Funktion der Form $y = f\,(kx - \omega t + \varphi)$ löst das Wellengleichung

harmonischen Wellen sind die Eigenmoden der Wellengleichung

Solitärwelle

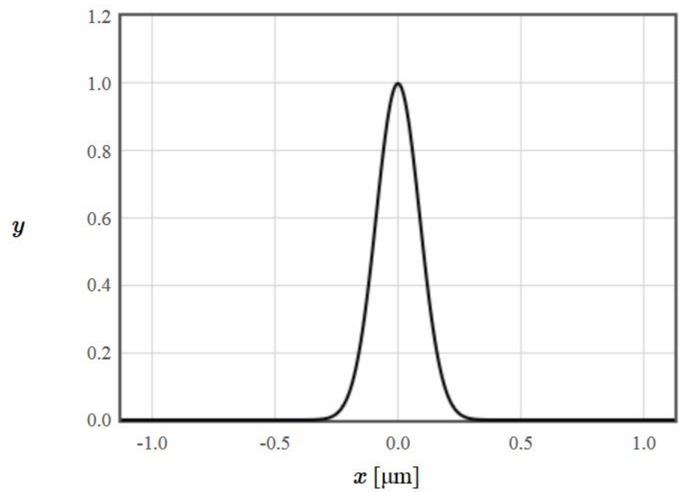
Eine Solitärwelle wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$y = \exp(-(8x - 2t)^2)\ [\mathrm{m}].$$

Hier ist t die in Sekunden angegebene Zeit und x ist Metern gegeben.

Argument 8*x*-2*t* ist 0 bei

$$x = \frac{t}{4}$$



Kettenregel

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = \frac{df(x)}{dx}e^{f(x)}$$

Wie lautet die Wellengeschwindigkeit?
(Die Geschwindigkeit kann negativ werden.) $v =$ [m/s]

Welchen Maximalwert kann $\frac{\partial y}{\partial t}$ annehmen? $\frac{\partial y}{\partial t} =$ [m/s]

Welchen Maximalwert kann $\frac{\partial y}{\partial x}$ annehmen? $\frac{\partial y}{\partial x} =$

Korteweg-de-Vries-Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 6y\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Die Korteweg-de-Vries-Gleichung (KdV) ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zur Analyse von Flachwasserwellen