A charged particle in electric and magnetic fields

When a charged particle moves in a electric field $\vec{E}$ and a magnetic field $\vec{B}$, the force on the particle is,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

where q is the charge of the particle and m is the mass. Written out in terms of its three components, the Lorentz force is,

$$F_x = q(E_x + v_y B_z - v_z B_y),$$
$$F_y = q(E_y + v_z B_x - v_x B_z),$$
$$F_z = q(E_z + v_x B_y - v_y B_x).$$

$m =$ 9.11E-31 kg $q =$ -1.6022E-19 C

$E_x =$ 0 V/m $E_y =$ 0 V/m $E_z =$ 0 V/m

$B_x =$ 0 T $B_y =$ 0 T $B_z =$ exp(-x*x) T

The intitial conditions at $t = 0$ are:

$x =$ 0 m $y =$ 0 m $z =$ 0 m $v_x =$ 1E4 m/s $v_y =$ 0 m/s

Numerical 6th order differential equation solver

$\frac{dx}{dt} = v_x$

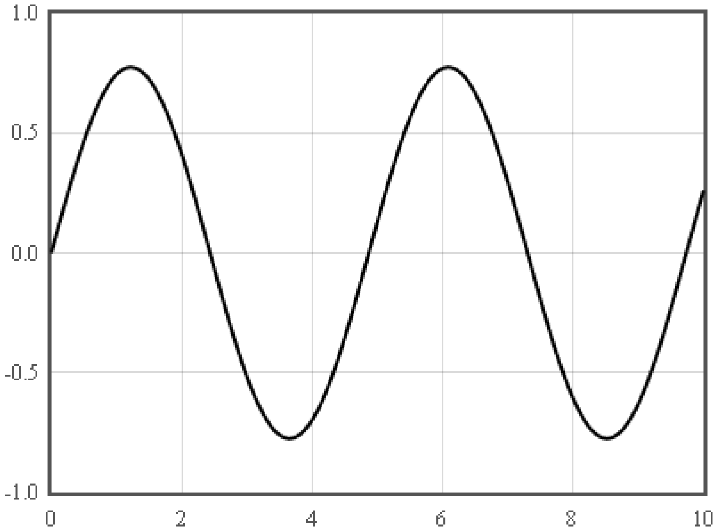
$\frac{dv_x}{dt} =$ -1.6022E-19*((0)+vy*(exp(-x*x))-vz*(0))/9.11E-31

$\frac{dy}{dt} = v_y$

$\frac{dv_y}{dt} =$ -1.6022E-19*((0)+vz*(0)-vx*(exp(-x*x)))/9.11E-31

Harmonische Schwingung

$$f = \frac{1}{T}$$



t

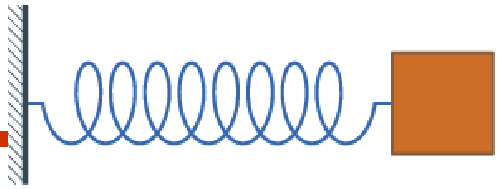
sinusförmig = harmonisch

$$\sin(\omega t)$$

Radiant

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ rad/s

Energie



$$x = A\cos(\omega t)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t)$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow k = m\omega^2$$

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} k A^2 \left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right)$$

Oszillationen eines Masse-Feder Systems

Eine Kugel der Masse 7 kg und des Radiuses 9 cm wird an eine lineare Feder angebracht und oszilliert mit der Bewegung $x(t) = A\cos(\omega t)$. Dabei sei A die Amplitude der Bewegung und ω die Winkelfrequenz. Die auf die Kugel wirkende Kraft ist $F = -kx$ [N], wobei k die Federkonstante und x der Abstand von der Gleichgewichtslage ist. Wenn die Kugel sich durch die Gleichgewichtslage an $x = 0$ bewegt, dann hat sie die Geschwindigkeit 9 cm/s. Sobald sich die Kugel jenseits der Gleichgewichtslage befindet, wird sie langsamer und stoppt schließlich, bevor sie ihre Richtung umgekehrt und zur Gleichgewichtslage zurückstrebt. Die Kugel habe bei dem Abstand 6 cm zur Gleichgewichtslage die Geschwindigkeit Null.

Wie groß ist die Federkonstante und wie groß ist die Oszillationsfrequenz in Zyklen pro Sekunde? Vernachlässigen Sie Reibung.

$k =$ ____ [N/m] $f =$ ____ [Hz] Lösung

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

$$k = \frac{mv_{max}^2}{A^2} = 15.8 \text{ [N/m]}.$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.239 \text{ [Hz]}.$$

gedämpte Schwingung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

$m = 1$ [kg] - +

$b = 0.2$ [kg/s] - +

$k = 0.9$ [N/m] - +

Numerical 2nd order differential equation solver

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} = \text{-0.5*x}$$

Intitial conditions:

$x(t_0) =$ 0.02

$v_x(t_0) =$ 0

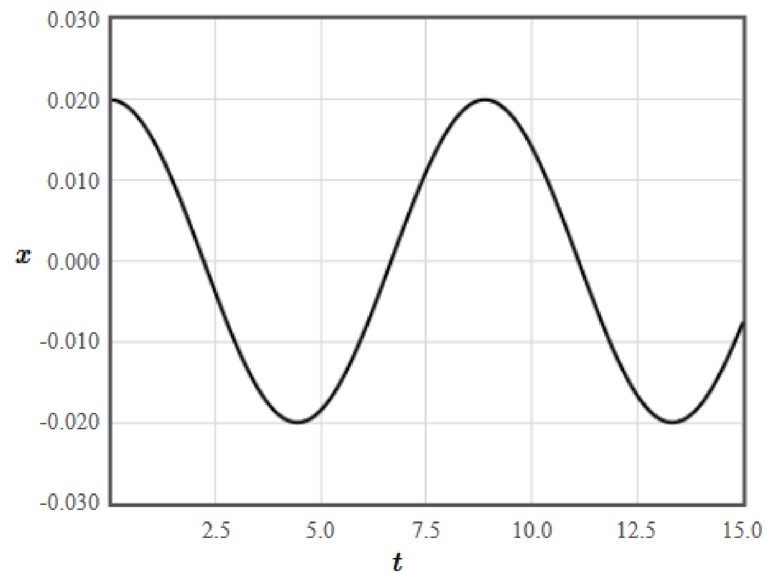
$t_0 =$ 0

$\Delta t =$ 0.05

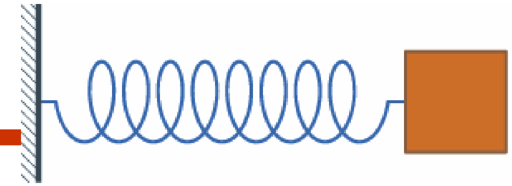
N_{steps} 300

Plot: x vs. t

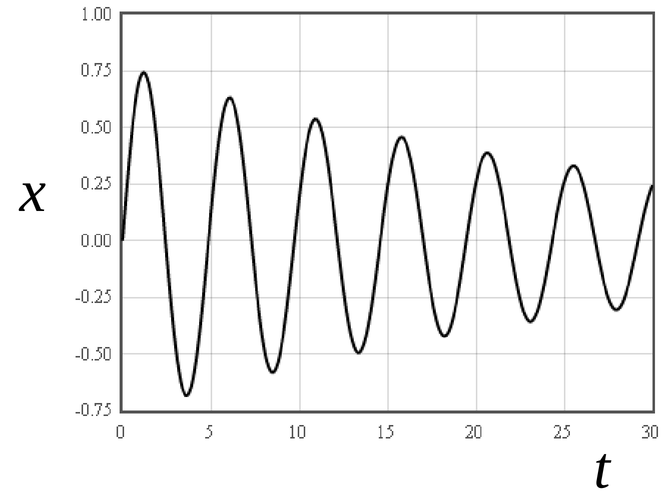
submit



$b^2 < 4km$ Schwingfall



$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$$

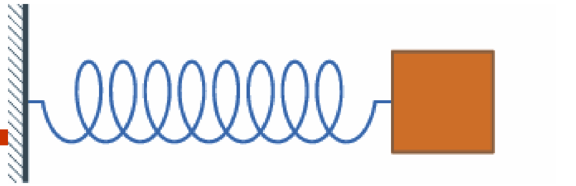


$$x(t)=C_1\exp(-t/\tau)\sin(\omega_0 t)+C_2\exp(-t/\tau)\cos(\omega_0 t)$$

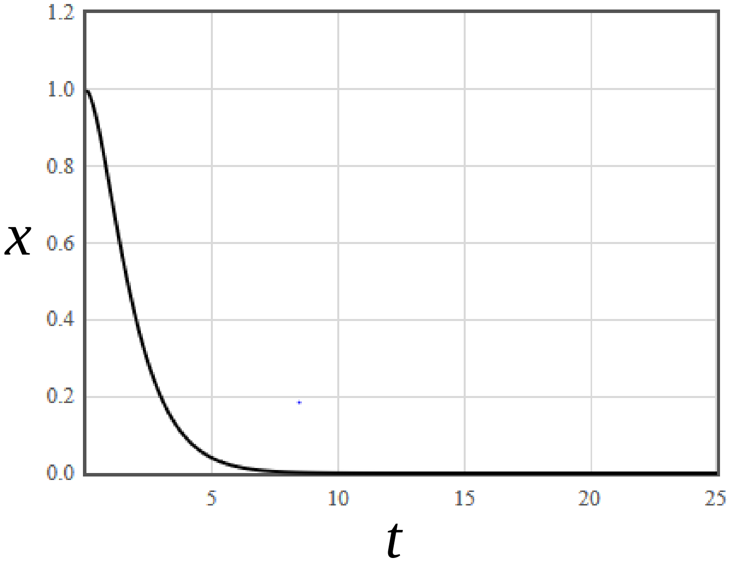
$$\tau=\frac{2m}{b}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}}$$

$b^2 > 4km$ Kriechfall



$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$$

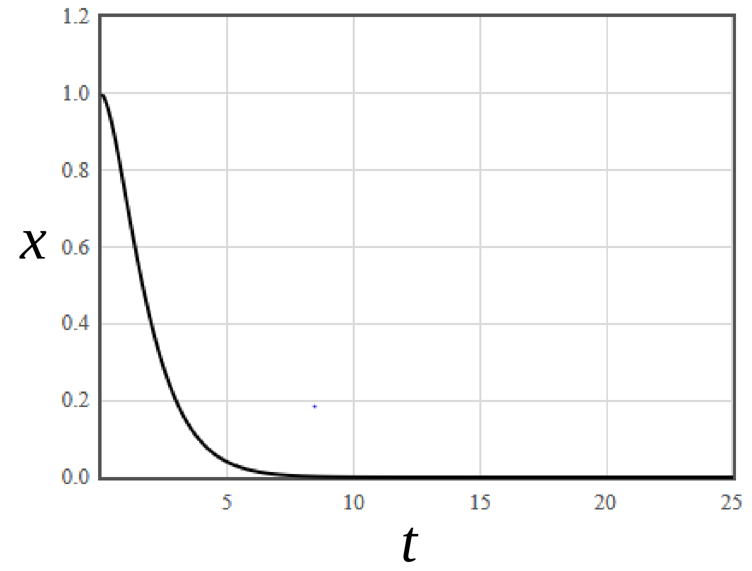


$$x(t)=C_1\exp(-t/\tau_1)+C_2\exp(-t/\tau_2)$$

$$\tau_1=\frac{2m}{b+\sqrt{b^2-4km}} \qquad \tau_2=\frac{2m}{b-\sqrt{b^2-4km}}$$

$b^2 = 4km$ aperiodischer Grenzfall

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$



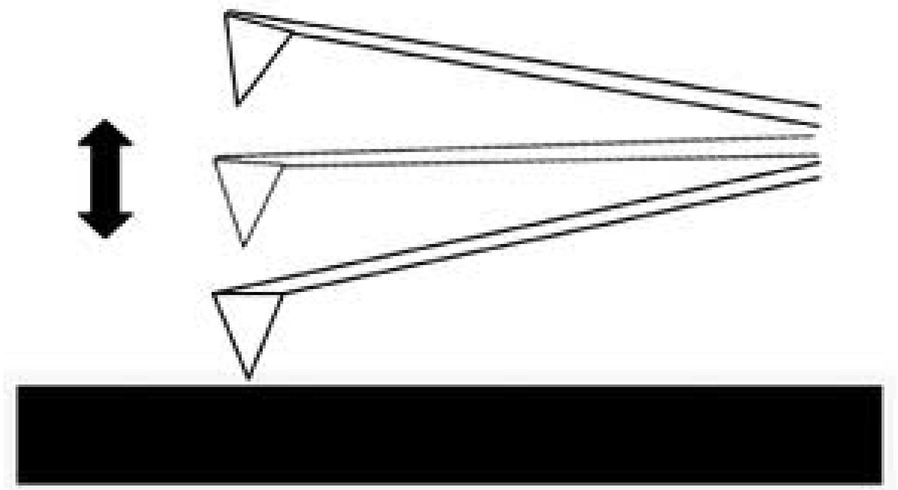
$$x(t) = C_1 \exp(-t/\tau) + C_2 t \exp(-t/\tau)$$

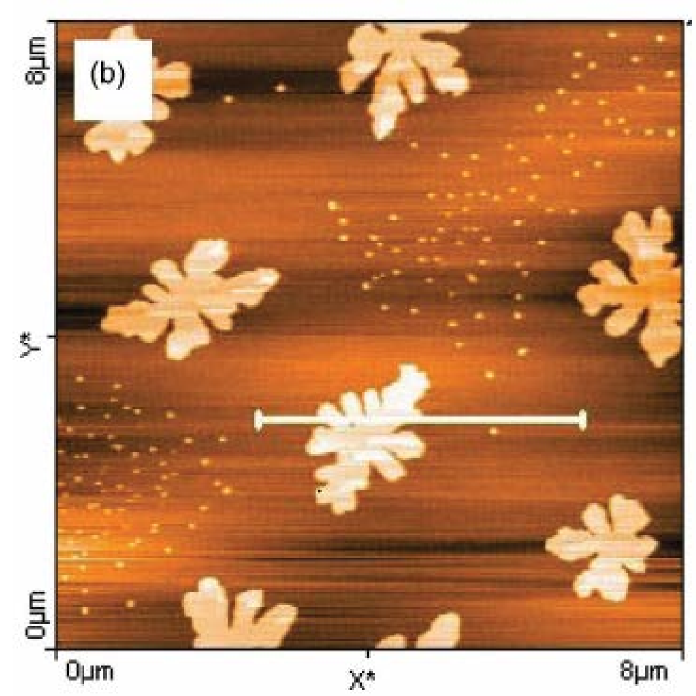
$$\tau = \frac{-1}{\lambda_1} = \frac{-1}{\lambda_2} = \frac{2m}{b}$$

Stoßdämpfer

Rasterkraftmikroskop

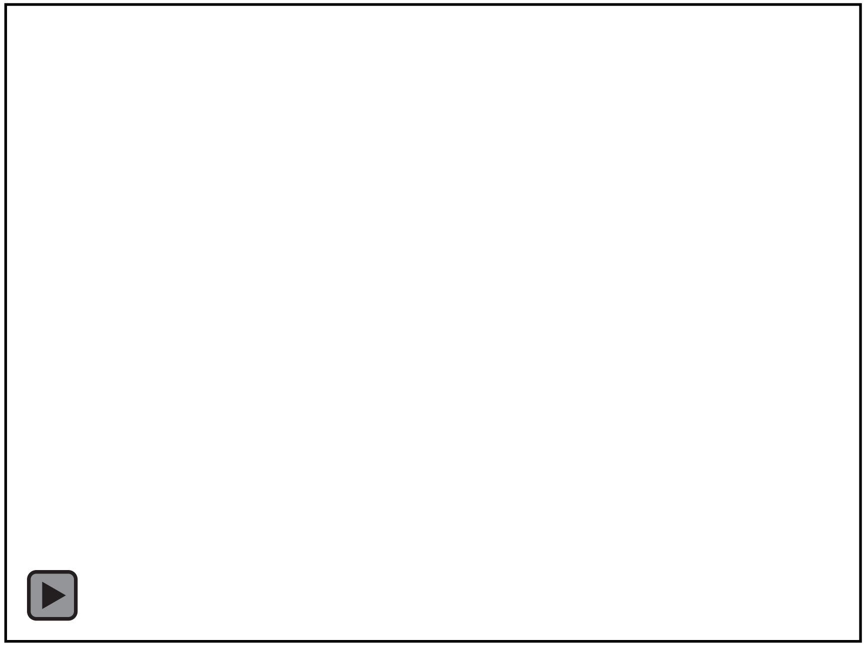
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$





L. Tumbek, C. Gleichweit, K. Zojer, and A. Winkler
Phys. Rev. B 86, 085402 (2012)

Oszillationen eines Masse-Feder Systems



Quarzkristall-Mikrowaage