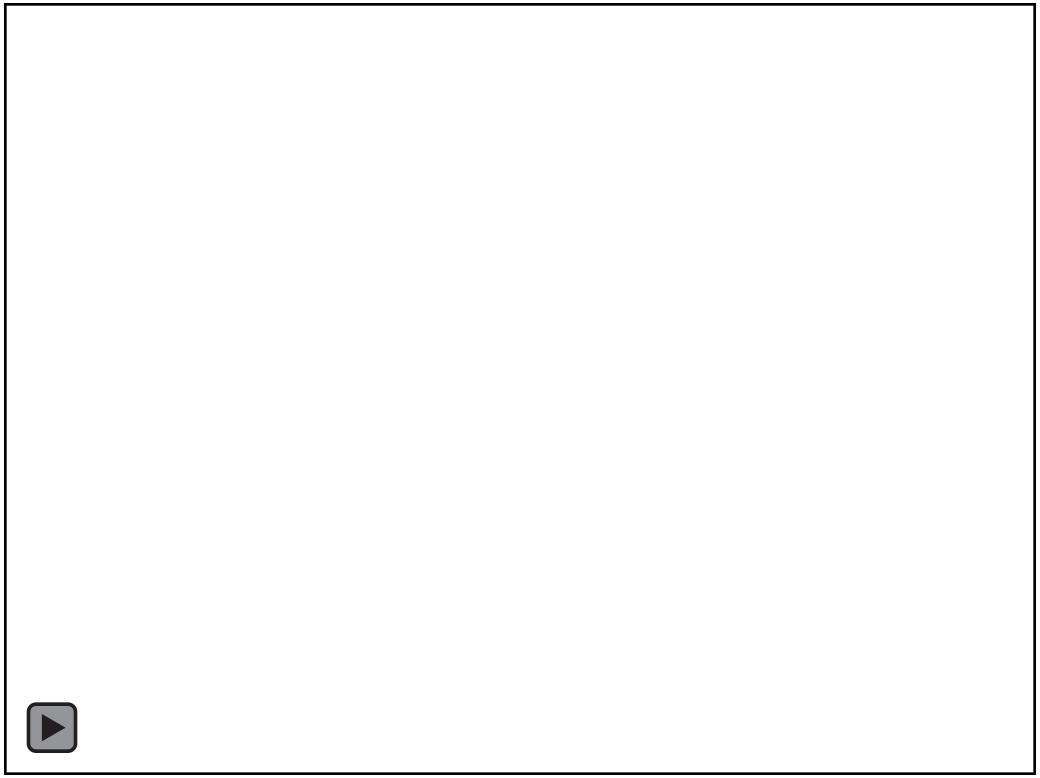
harmonischen Wellen

$$y = A\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

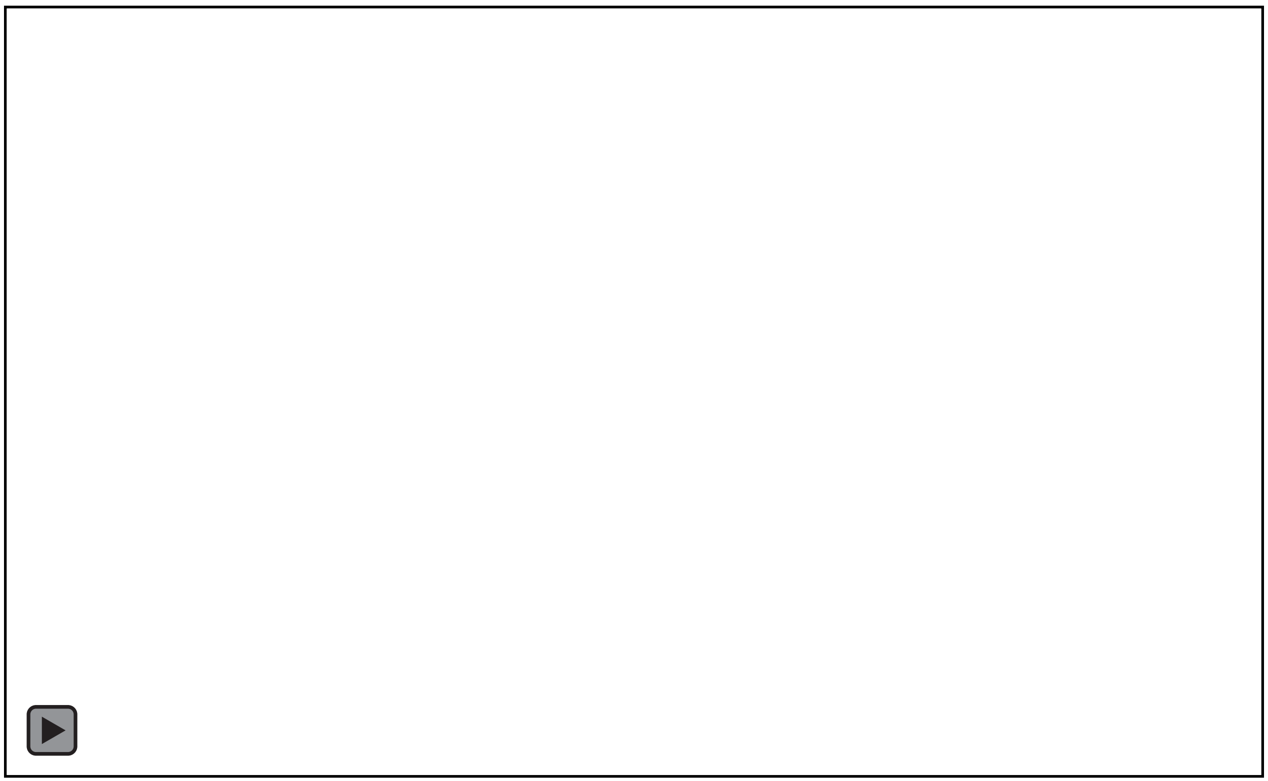


$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \qquad f = \frac{c}{\lambda}$$

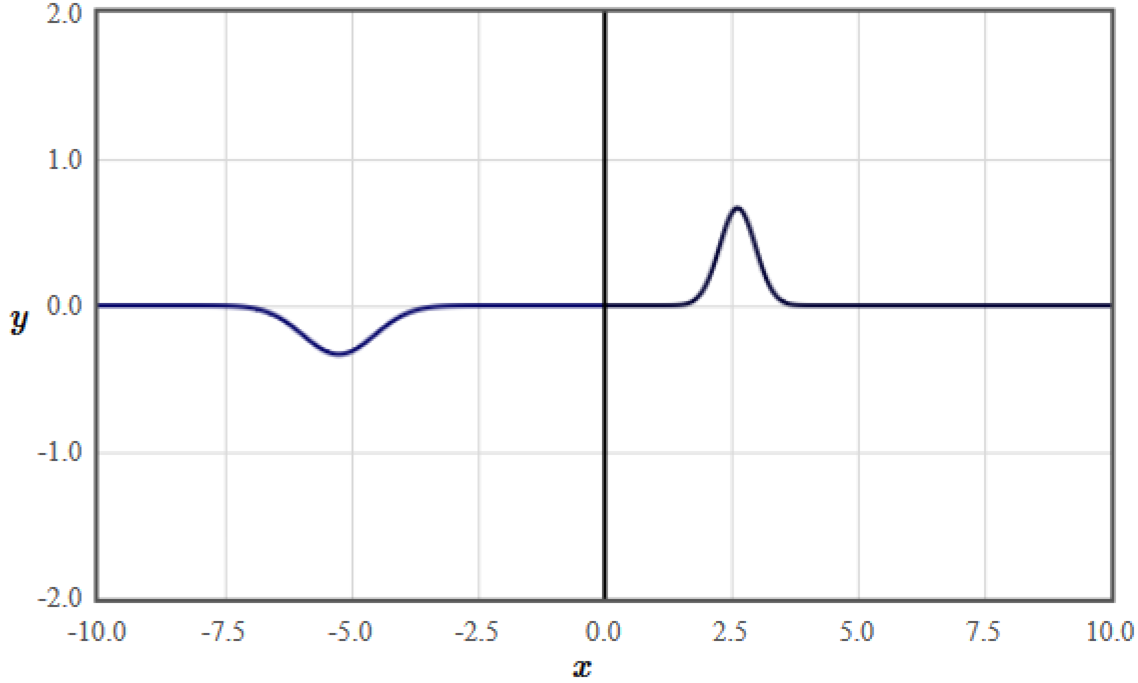
harmonischen Wellen sind die Eigenmoden der Wellengleichung

Superpositionsprinzip

die Summe von zwei Lösungen für die Wellengleichung ist auch eine Lösung für die Wellengleichung



reflektierten und durchgelassenen Wellen



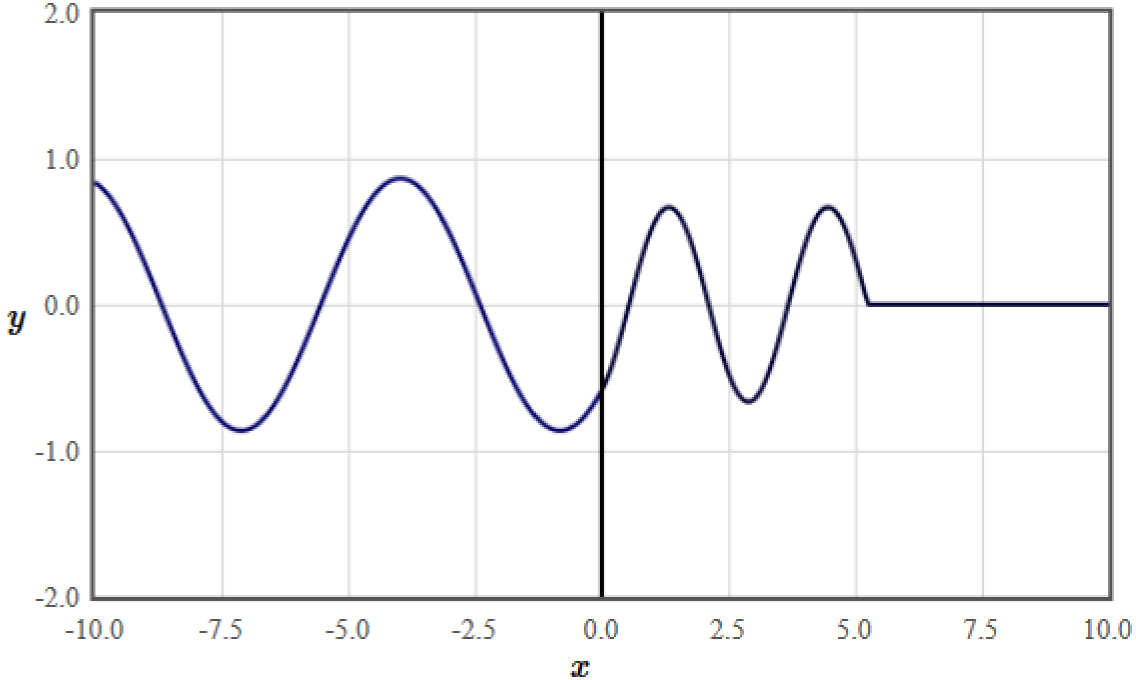
$$A_r = A_i \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$$

$$A_t = A_i \frac{2c_2}{c_2 + c_1}$$

A_i - einfallenden Welle
A_r - reflektierte Welle
A_t - durchgelassenen Welle

http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/physikm/apps/pulse.en.php

reflektierten und durchgelassenen Wellen



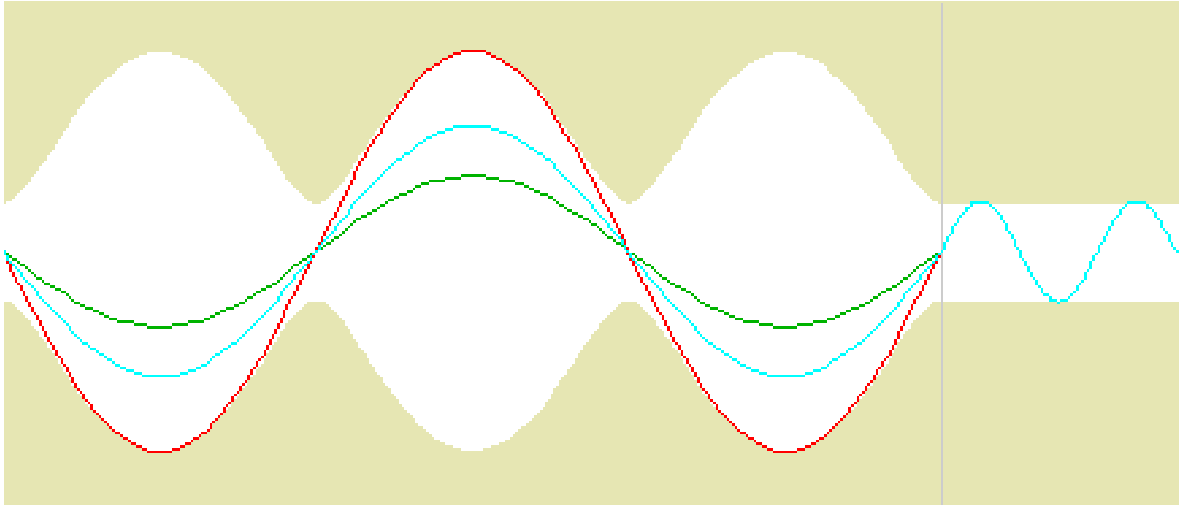
$$A_r = A_i \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$$

$$A_t = A_i \frac{2c_2}{c_2 + c_1}$$

A_i - einfallenden Welle
A_r - reflektierte Welle
A_t - durchgelassenen Welle

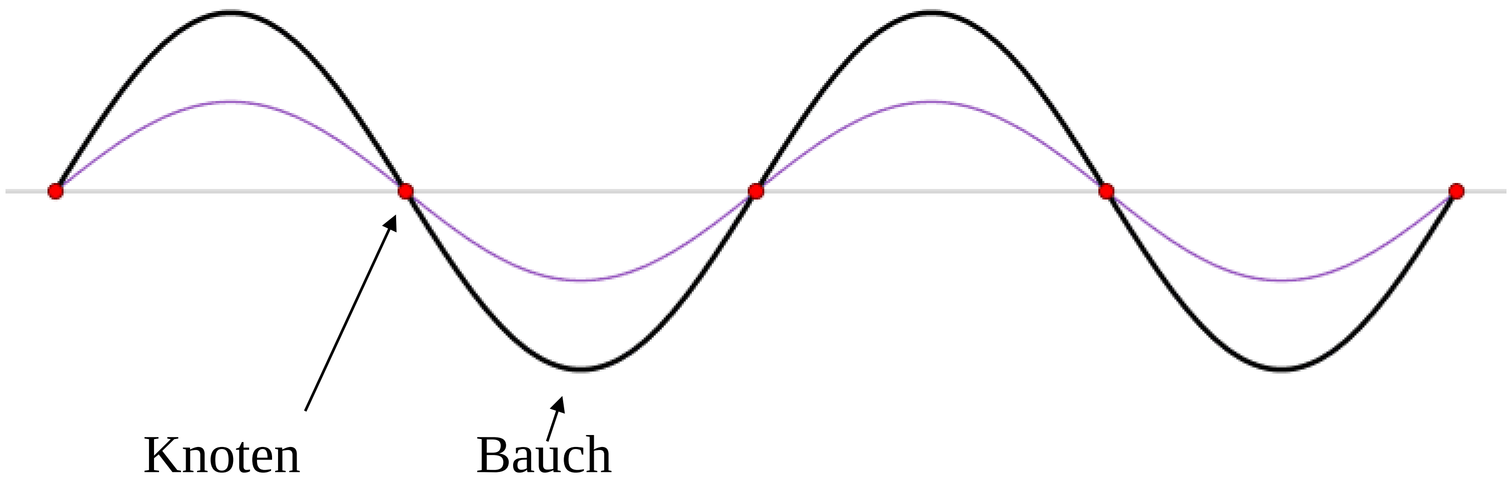
http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/physikm/apps/cw_reflection.en.php

stehende Welle, die auf einem Wellenleiter durch Reflexion entsteht



http://de.wikipedia.org/wiki/Stehwellenverh%C3%A4ltnis#mediaviewer/File:Standing_wave_SWR_4_%28forward,_reflected%29_open.gif

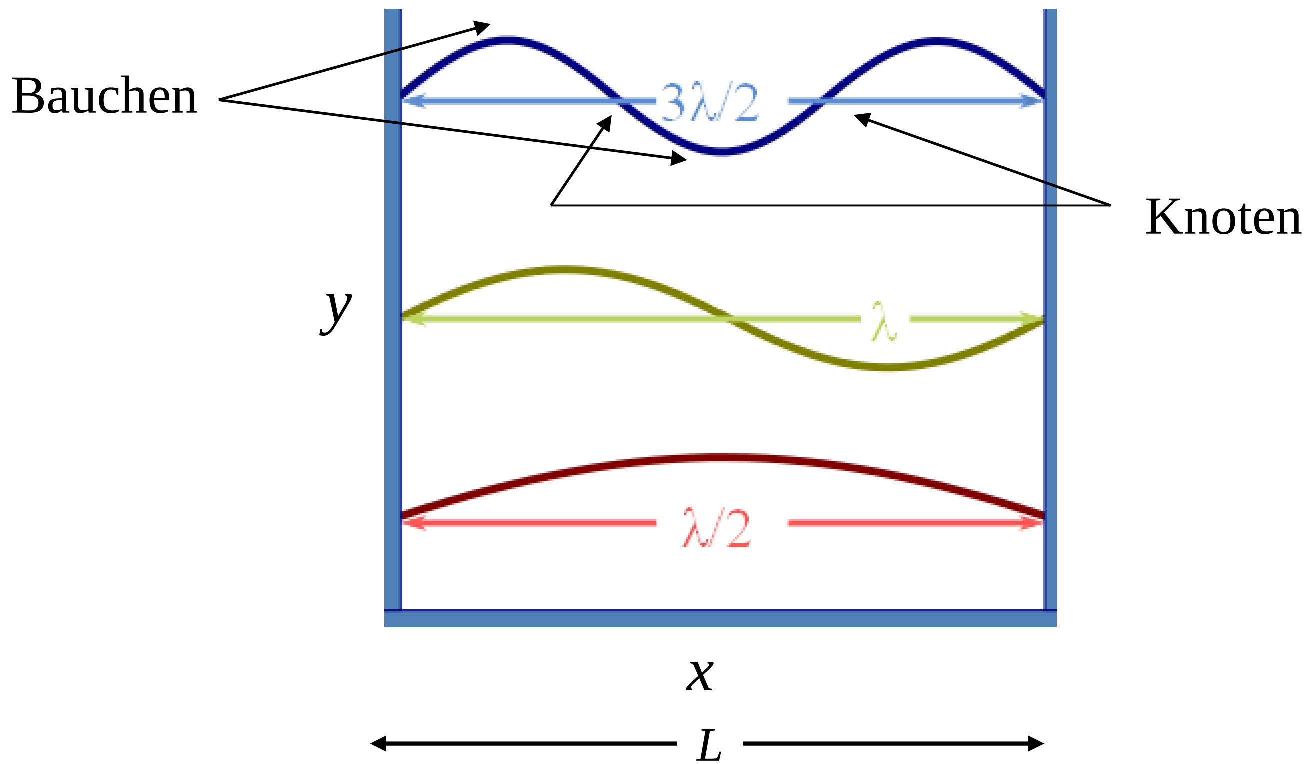
Stehende Welle



Eine stehende Welle kann als Überlagerung zweier gegenläufig fortschreitender Wellen gleicher Frequenz und gleicher Amplitude aufgefasst werden.

http://de.wikipedia.org/wiki/Stehende_Welle#mediaviewer/File:Standing_wave_2.gif

Stehende Welle

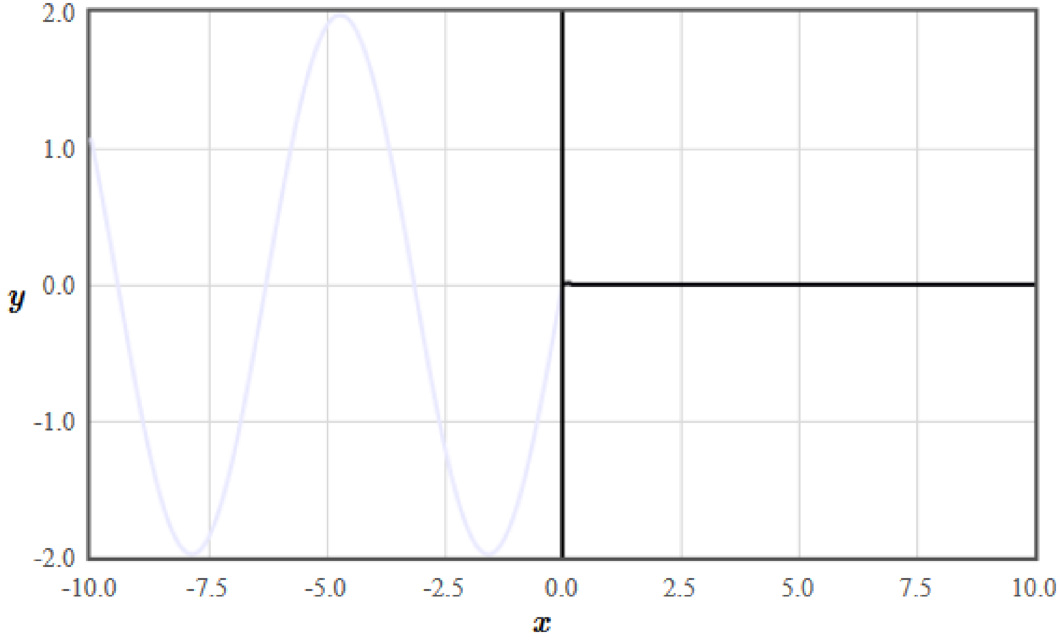


$$y = A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{nL}{2} \qquad n = 1, 2, 3\cdots$$

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b1/Waves_in_Box.svg

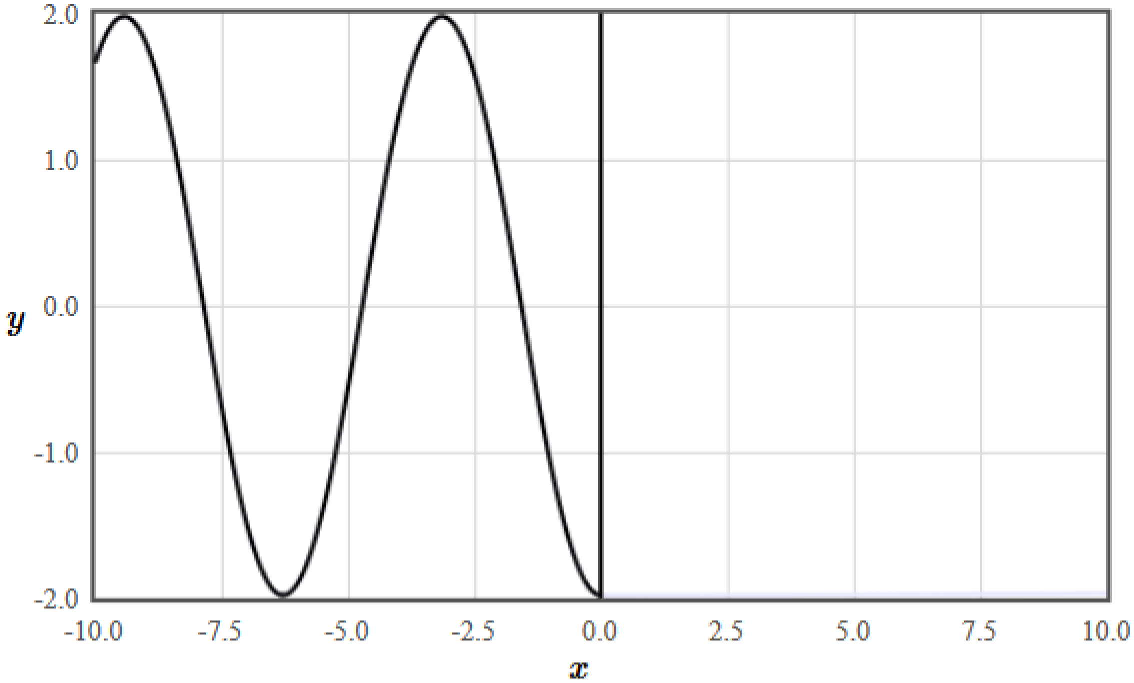
feste Ende

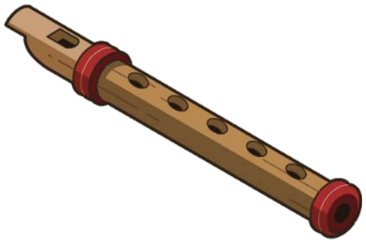


Amplitude der reflektierten Welle ist gleich der Amplitude der einfallenden Welle
reflektierte Welle invertiert
Knoten an der Schnittstelle

http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/physikm/apps/cw_reflection.en.php

freie Ende





Amplitude der reflektierten Welle ist gleich der Amplitude der einfallenden Welle
reflektierte Welle aufrecht
Schwingungsbauch an der Schnittstelle

http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/physikm/apps/cw_reflection.en.php

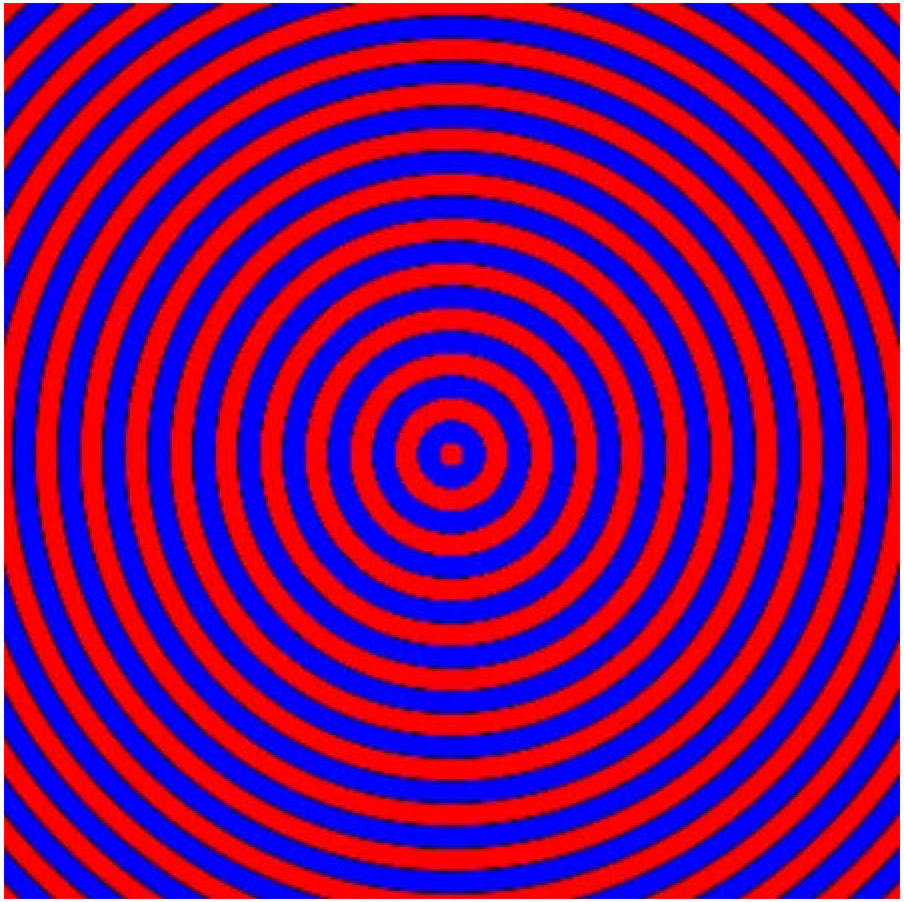
Kugelwelle

2-D:

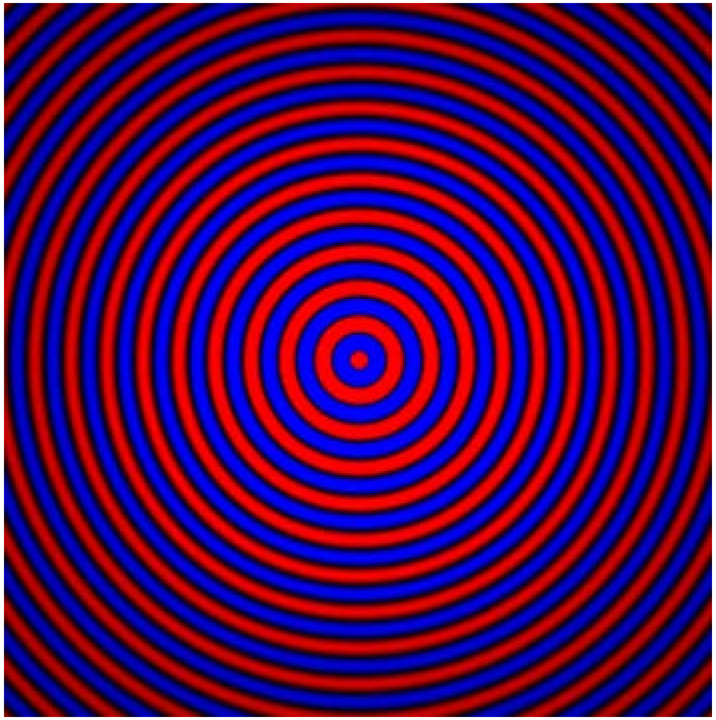
$$y(r,t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos\left(kr - \omega t + \varphi\right)$$

3-D:

$$y(r,t) = \frac{A}{r} \cos\left(kr - \omega t + \varphi\right)$$



Energie 2-D



$$z(r,t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(kr - \omega t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \omega \frac{A}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(kr - \omega t)$$

$$F = ma = -m\omega^2 z$$

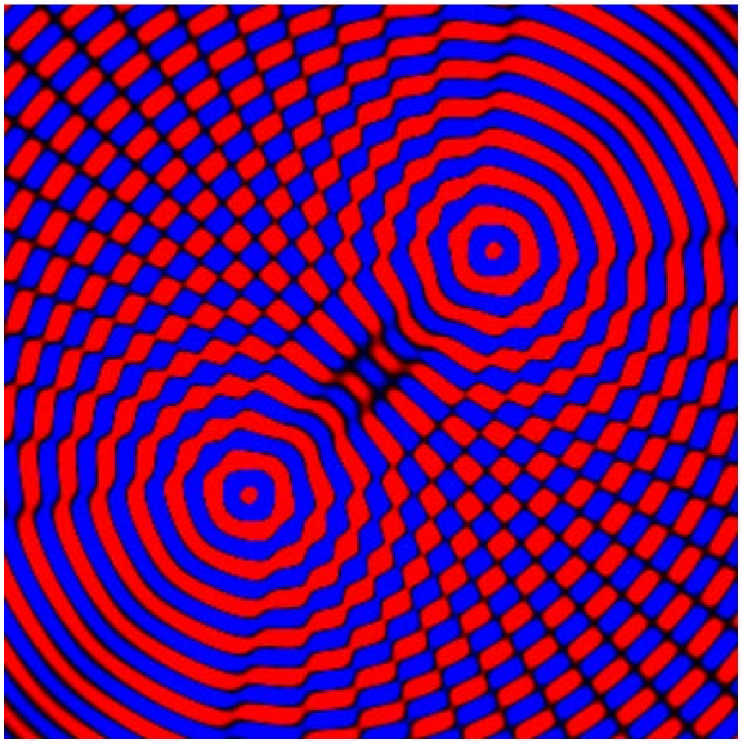
$$E_{pot} = -\int F dz = \frac{m\omega^2 z^2}{2}$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$E_{tot}(r) = \frac{2\pi r \omega^2 A^2 \rho dr}{2r}\left(\cos^2(kr - \omega t) + \sin^2(kr - \omega t)\right) = \pi\omega^2 A^2 \rho dr$$

ρ = Massendichte [kg/m^2]

Interferenz zweier Oberflächenwellen



$A_1 =$	0.1	[cm²]	$A_2 =$	0.1	[cm²]
$x_1 =$	2	[cm]	$x_2 =$	4	[cm]
$y_1 =$	2	[cm]	$y_2 =$	4	[cm]
$\phi_1 =$	0	[rad]	$\phi_2 =$	0	[rad]
$\lambda =$	0.3	[cm]	$T =$	0.5	[s]

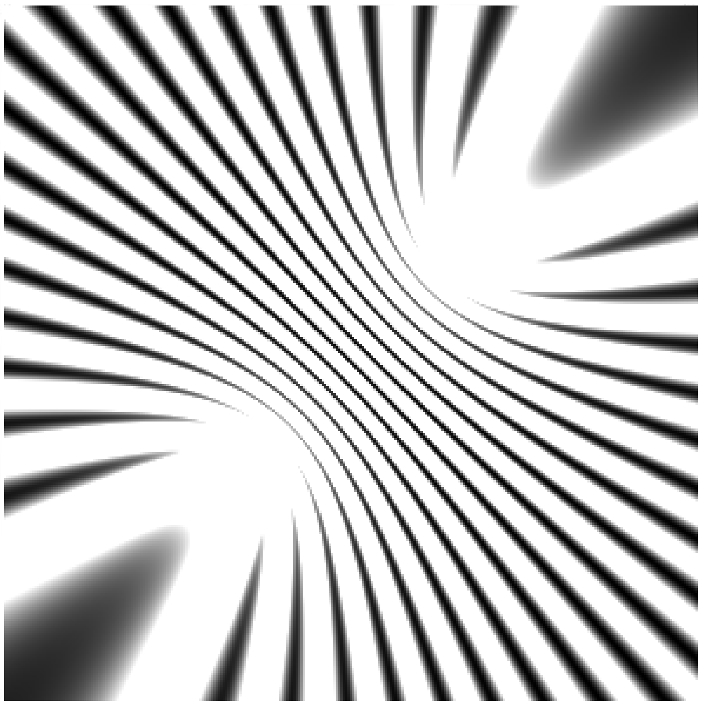
plot at $t =$ 0 [s].

t - T/10 t + T/10

$$c = \frac{\lambda}{T}$$

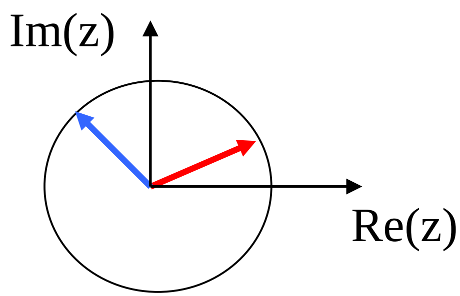
$$y(r,t) = \frac{A_1}{\sqrt{|r - r_1|}} \cos\left(k|r - r_1| - \omega t + \varphi_1\right) + \frac{A_2}{\sqrt{|r - r_2|}} \cos\left(k|r - r_2| - \omega t + \varphi_2\right)$$

Intensität zweier interferierender Oberflächenwellen



$A_1 =$	0.1	[cm²]	$A_2 =$	0.1	[cm²]
$x_1 =$	2	[cm]	$x_2 =$	4	[cm]
$y_1 =$	2	[cm]	$y_2 =$	4	[cm]
$\phi_1 =$	0	[rad]	$\phi_2 =$	0	[rad]
$\lambda =$	1	[cm]			

plot



Wellenamplitude

Zwei Punktquellen emittieren Oberflächenwellen, die miteinander interferieren. Die Amplituden der von den Quellen emittierten Wellen sind gegeben durch:

$$z_1 = A_1 \cos(k|\vec{r} - \vec{r}_1| - \omega t)/\sqrt{|\vec{r} - \vec{r}_1|}\ \text{cm}$$

$$z_2 = A_2 \cos(k|\vec{r} - \vec{r}_2| - \omega t)/\sqrt{|\vec{r} - \vec{r}_2|}\ \text{cm}$$

Hier ist $|\vec{r} - \vec{r}_1|$ der Abstand von Quelle 1 und $|\vec{r} - \vec{r}_2|$ der Abstand von Quelle 2. Die Wellenzahl k hängt mit der Wellenlänge λ zusammen, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und die Kreisfrequenz ω mit der Periodendauer $T, \omega = \frac{2\pi}{T}$.

Punktquelle 1 emittiert Wellen von der Position $\vec{r}_1 = 2\hat{x} + 9\hat{y}$ (/cm) mit der Amplitude $A_1 = 0.5\ \text{cm}^{3/2}$.

Punktquelle 2 emittiert Wellen von der Position $\vec{r}_2 = 7\hat{x} + 2\hat{y}$ (/cm) mit der Amplitude $A_2 = 0.6\ \text{cm}^{3/2}$.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen ist $c = 49$ cm/s und die Kreisfrequenz der Schwingungen ist $\omega = 9$ rad/s.

Das Interferenzmuster dieser Wellen ruft vertikale einfach harmonische Schwingungen an jedem Punkt hervor. Wie groß ist die Amplitude dieser Oszillationen an der Position $\vec{r} = -7\hat{x} + 7\hat{y}$ cm?

$z_{\text{amplitude}} =$ ____ cm Lösung

Die Wellenzahl ist $k = \frac{\omega}{c}$ =0.129 cm^{-1}.

Die durch Punktquelle 1 verursachten Schwingungen können durch einen in der komplexen Ebene rotierenden Phasor beschrieben werden:

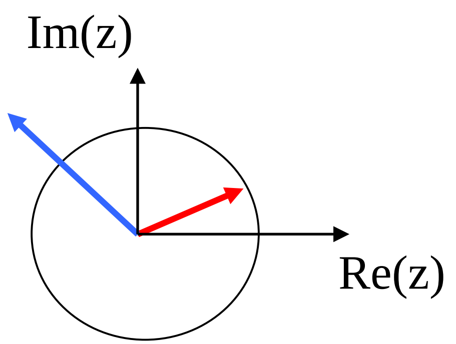
$$\frac{A_1}{\sqrt{|\vec{r}-\vec{r}_1|}} e^{i(k|\vec{r}-\vec{r}_1|-\omega t)} = 0.0697(\cos(1.30 - 8t) + i\sin(1.30 - 8t)).$$

Die durch Punktquelle 2 verursachten Schwingungen können ebenso durch einen Phasor in der komplexen Ebene beschrieben werden:

$$\frac{A_2}{\sqrt{|\vec{r}-\vec{r}_2|}} e^{i(k|\vec{r}-\vec{r}_2|-\omega t)} = 0.0248(\cos(2.08 - 8t) + i\sin(2.08 - 8t)).$$

Die Summation dieser beiden Phasoren ergibt einen einzelnen Phasor, der in der komplexen Ebene mit der Kreisfrequenz 8 rad/s rotiert. Die Länge dieses Phasors entspricht der Amplitude der Schwingungen am Punkt $\vec{r}$, welche sich aufgrund der Interferenz der beiden Einzelwellen einstellt.

$$z_{\text{amplitude}} = 0.129 \text{ cm}.$$



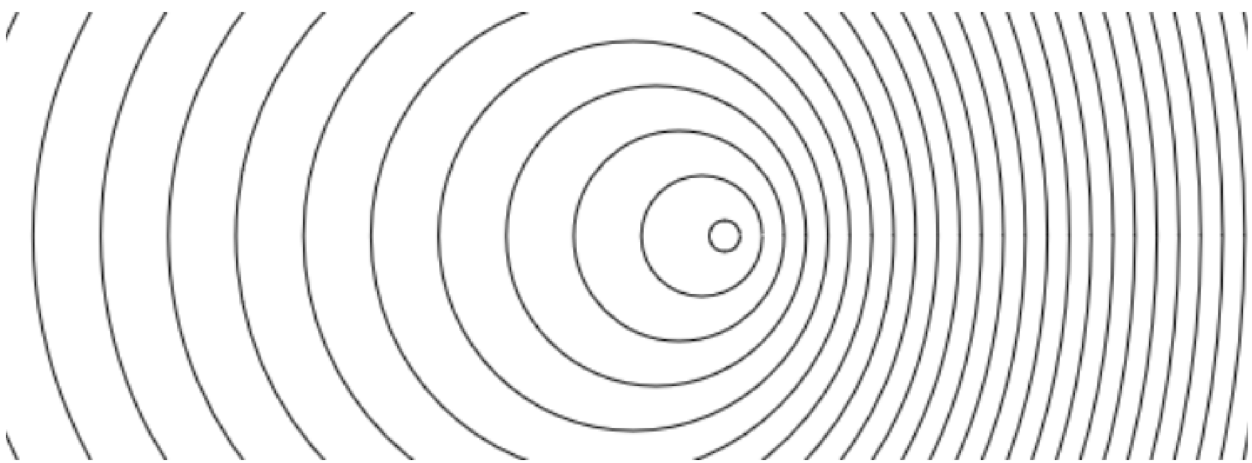
ie auch die APP: Interferenz zweier Oberflächenwellen

Dopplereffekt

http://en.wikipedia.org/wiki/Doppler_effect

Christian Doppler

Bewegte Wellenquelle

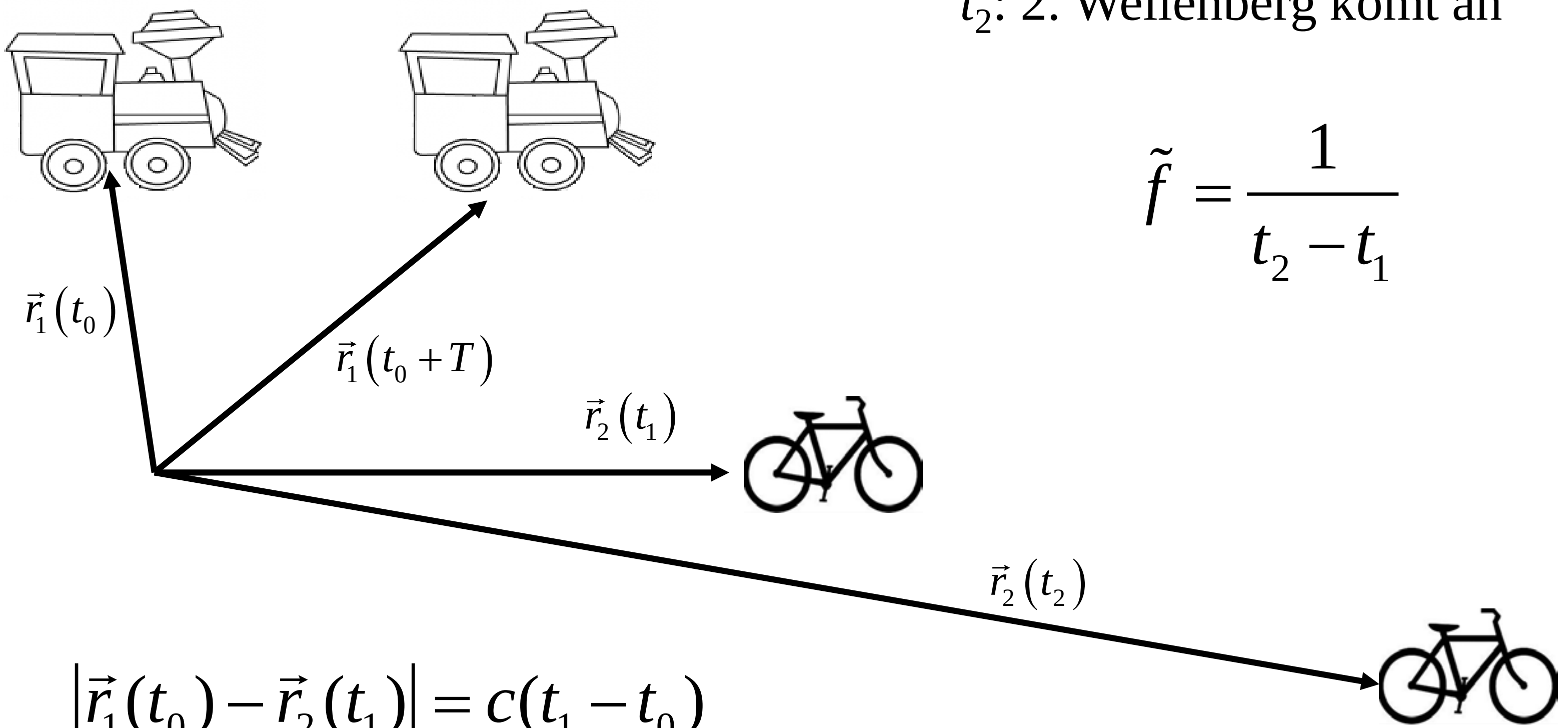


http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/physikm/apps/shockwave.en.php?vc=0.2

Dopplereffekt

t_0: 1. Wellenberg verlässt Zug
t_1: 1. Wellenberg komt an
t_0+T: 2. Wellenberg verlässt Zug
t_2: 2. Wellenberg komt an

$$\tilde{f} = \frac{1}{t_2 - t_1}$$



$$\left|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_1)\right| = c(t_1 - t_0)$$

$$\left|\vec{r}_1(t_0 + T) - \vec{r}_2(t_2)\right| = c(t_2 - t_0 - T)$$

Dopplereffekt

Ein vorbeifahrender Zug pfeift mit einer Frequenz von 440 Hz. Die Position der Dampfpfeife des Zuges ist durch den Vektor gegeben:

$$\vec{r}_1(t) = 23t\hat{x} + 25t\hat{y} + 10\hat{z} \text{ [m]}.$$

Dabei ist t die Zeit in Sekunden. Ein Mädchen auf einem Fahrrad hat die Geschwindigkeit,

$$\vec{r}_2(t) = 6t\hat{x} + 3t\hat{y} + 0\hat{z} \text{ [m]}.$$

Welche Frequenz hört das Mädchen an $t = 5$ s?

$\tilde{f}$ = [Hz]

Lösung

Die Schallgeschwindigkeit ist $c = 340$ m/s. Finden die Lösung mittels der APP Graphisches Lösen.

Die Gleichungen für den Dopplereffekt lauten zusammengefasst:

$$|\vec{r}_2(t_1) - \vec{r}_1(t_0)| = c(t_1 - t_0)\,,$$
$$|\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_0 + T)| = c(t_2 - t_0 - T)\,,$$
$$\tilde{f} = \tfrac{1}{t_2 - t_1}\,.$$

Das Mädchen hört die Pfeife zur Zeit $t = 5$ s. Sei dies der Zeitpunkt t_1, bei welchem der erste Wellenbauch ihr Ohr erreicht. Die folgende Gleichung kann nach t_0 aufgelöst werden:

$$|\vec{r}_2(t_1) - \vec{r}_1(t_0)| = c(t_1 - t_0)\,.$$

Der Abstand zwischen den Vektoren lautet ausgeschrieben:

$$\sqrt{(6*5 - 23*t_0)^2 + (3*5 - 25*t_0)^2 + (10)^2} = 340(5 - t_0),$$

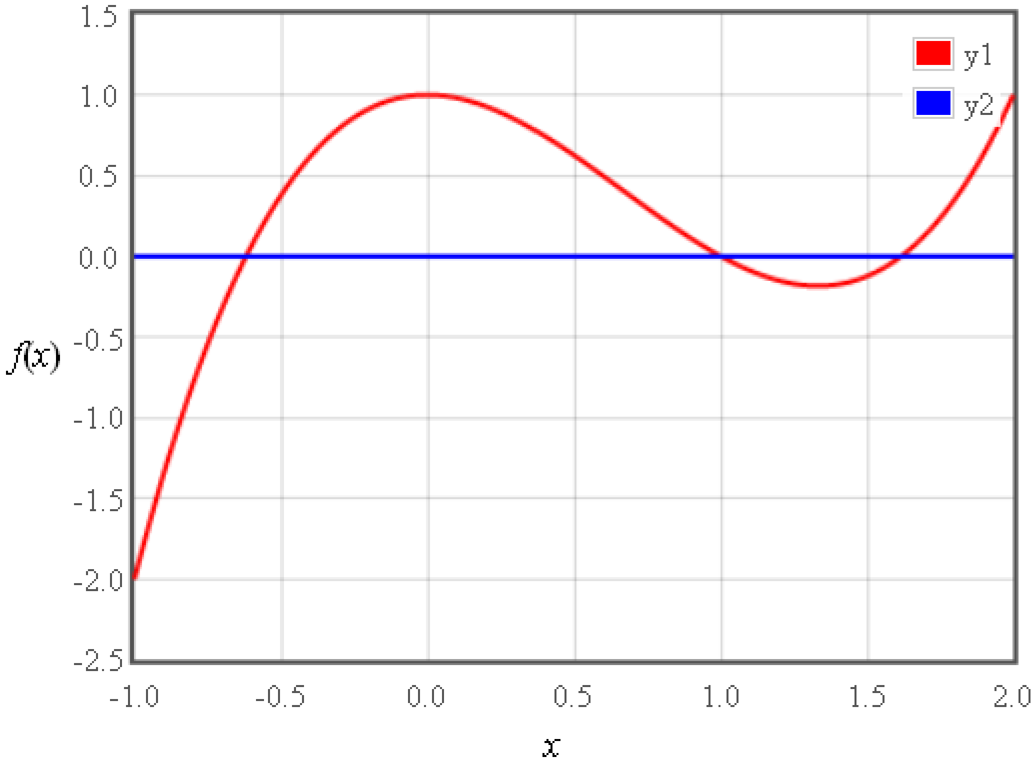
Eine solche Gleichung kann graphisch gelöst werden, indem man beide Seiten der Gleichung in einem gemeinsamen Diagramm graphisch darstellt. Um die APP **Graphisches Lösen** für die Bestimmung von t_0 benutzen zu können, sei

y_1 = sqrt(pow(6*5-23*x,2)+pow(3*5-25*x,2)+100),

y_2 = 340*(5 - x).

Die Zeit ist $t_0 = 4.6271$ s.

Graphische Lösungen



$y_1(x) =$ pow(x,3)-2*pow(x,2) +1

$y_2(x) =$ 0

Plot **from** $x =$ -1 **to** $x =$ 2.

Die andere Bestimmungsgleichung für den Dopplereffekt lautet

$$|\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_0 + T)| = c(t_2 - t_0 - T)\,.$$

Diese kann für t_2 gelöst werden, d.h. der Zeit, bei der der nächste Peak ihr Ohr erreicht. Der Abstand zwischen den Vektoren lautet ausgeschrieben:

$$\sqrt{(6*t_2 - 23*(4.6271 + 1/440))^2 + (3*t_2 - 25*(4.6271 + 1/440))^2 + (10)^2} = 340(t_2 - 4.6271 - 1/440),$$

Um die APP **Graphisches Lösen** für die Bestimmung von t_2 benutzen zu können, sei

y_1 = sqrt(pow(6*x-23*(4.6271+1/440),2)+pow(3*x-25*(4.6271+1/440),2)+100),

y_2 = 340*(x-4.6271-1/440).

Die Zeit ist $t_2 = 5.0025$ s.

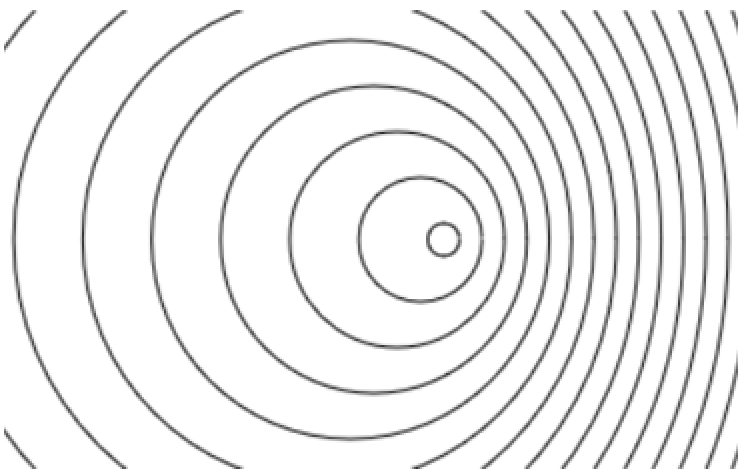
Das Mädchen hört nimmt die Frequenz $\tilde{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} = 407$ Hz wahr.

Dopplereffekt

$$|\vec{r}_2(t_1) - \vec{r}_1(t_0)| = c(t_1 - t_0),$$

$$|\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_0 + T)| = c(t_2 - t_0 - T),$$

$$\tilde{f} = \frac{1}{t_2 - t_1}.$$

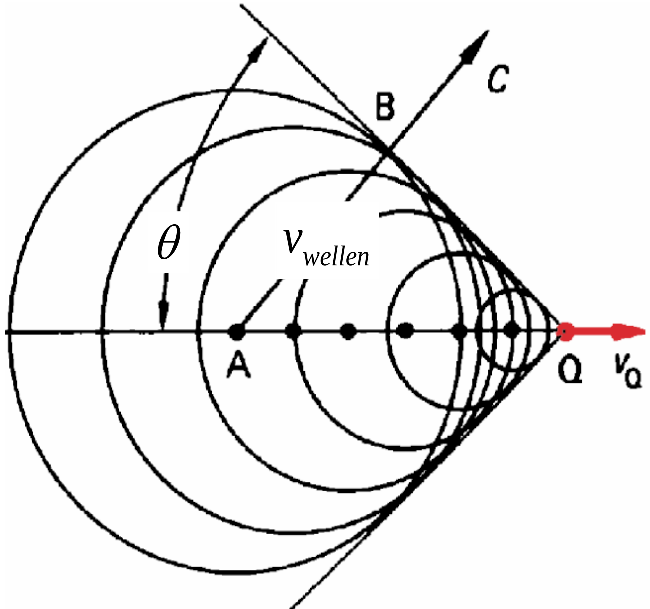


Quelle	Beobachter	beobachtete Frequenz	
$\bullet$	$\leftarrow \bullet$	$f_B = f_Q\left(1 + \frac{v_B}{c}\right)$	(5.205)
$\bullet$	$\bullet \rightarrow$	$f_B = f_Q\left(1 - \frac{v_B}{c}\right)$	(5.206)
$\bullet \rightarrow$	$\bullet$	$f_B = \frac{f_Q}{1 - \frac{v_Q}{c}}$	(5.207)
$\leftarrow \bullet$	$\bullet$	$f_B = \frac{f_Q}{1 + \frac{v_Q}{c}}$	(5.208)
$\bullet \rightarrow$	$\leftarrow \bullet$	$f_B = f_Q \frac{c + v_B}{c - v_Q}$	(5.209)
$\leftarrow \bullet$	$\bullet \rightarrow$	$f_B = f_Q \frac{c - v_B}{c + v_Q}$	(5.210)
$\leftarrow \bullet$	$\leftarrow \bullet$	$f_B = f_Q \frac{c + v_B}{c + v_Q}$	(5.211)
$\bullet \rightarrow$	$\bullet \rightarrow$	$f_B = f_Q \frac{c - v_B}{c - v_Q}$	(5.212)

Hering

Überschallgeschwindigkeit

$$\sin\theta = \frac{v_{wellen}}{v_{flugzeug}}$$



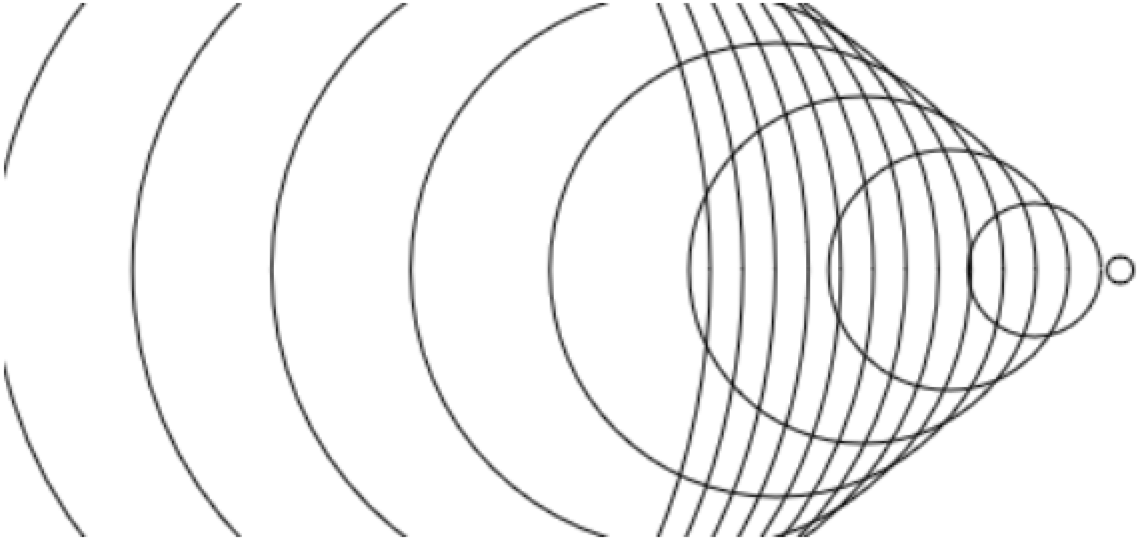
Hering

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Fjord.surface.wave.boat.jpeg

Mach-Zahl $= \dfrac{v}{v_{wellen}}$

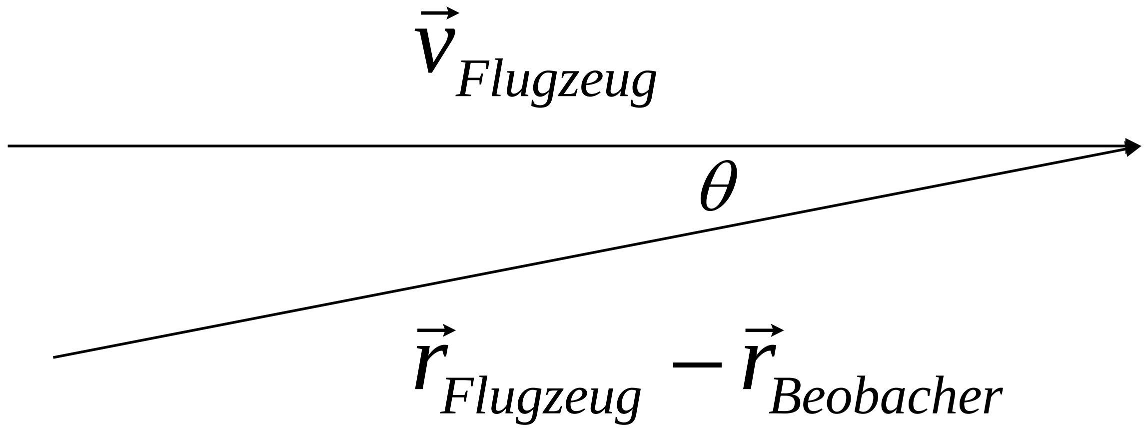
Ernst Mach

Bewegte Wellenquelle



http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/physikm/apps/shockwave.en.php

Überschallgeschwindigkeit



$$\sin\theta = \frac{\left|\vec{v}_{wellen}\right|}{\left|\vec{v}_{flugzeug}\right|}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_{Flugzeug} \cdot \left(\vec{r}_{Flugzeug} - \vec{r}_{Beobacher}\right)}{\left|\vec{v}_{flugzeug}\right|\left|\vec{r}_{Flugzeug} - \vec{r}_{Beobacher}\right|}$$