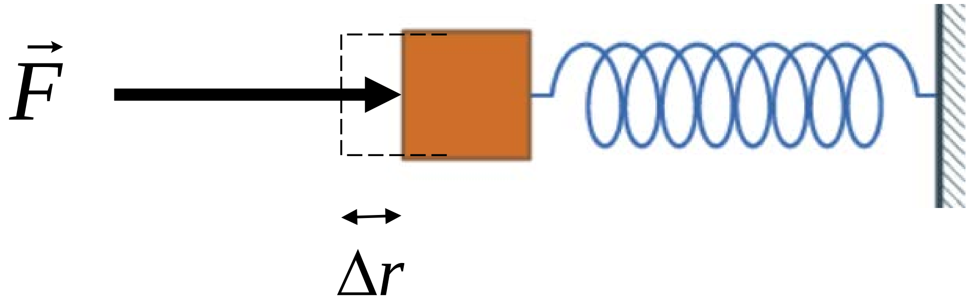
Arbeit

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \times \text{Abstand}$$

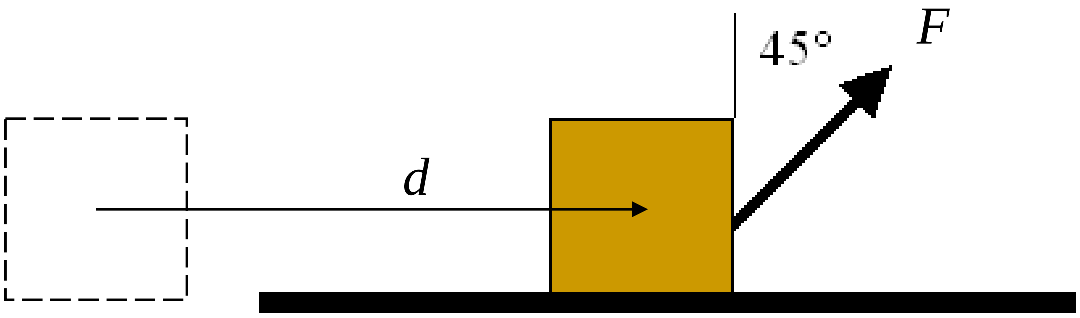


$$\Delta W = F\,\Delta r$$

$$[\text{Nm}] = \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}\right]\text{m} = \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}\right] = \text{J}$$

Kinetische Energie: $\frac{1}{2}mv^2 = \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}\right]$ Potentielle Energie: $mg\Delta y = \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}\right]$

Arbeit



W ?

Arbeit

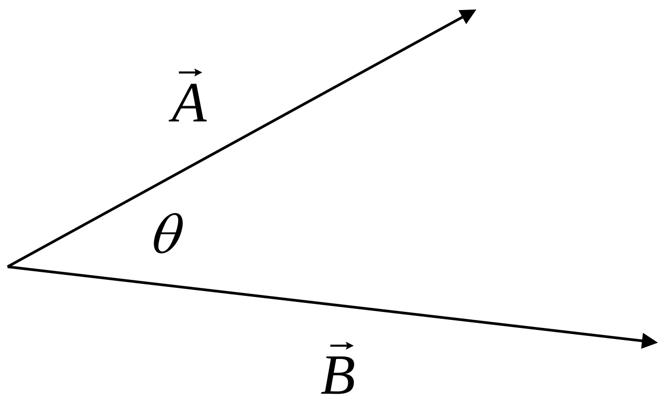
$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$\vec{F} = F_x \ \hat{x} + F_y \ \hat{y} + F_z \ \hat{z}$$

$$d\vec{r} = dx \ \hat{x} + dy \ \hat{y} + dz \ \hat{z}$$

Skalarprodukt

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



Arbeit

$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$\vec{F} = F_x \ \hat{x} + F_y \ \hat{y} + F_z \ \hat{z}$$

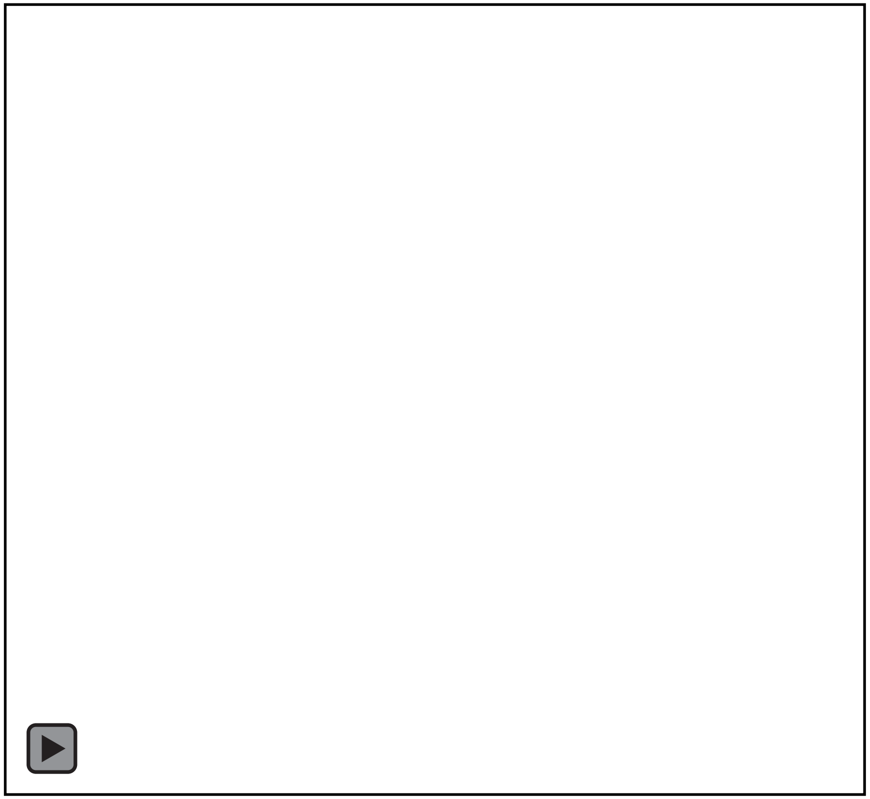
$$d\vec{r} = dx \ \hat{x} + dy \ \hat{y} + dz \ \hat{z}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\boxed{W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz}$$

Arbeit

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



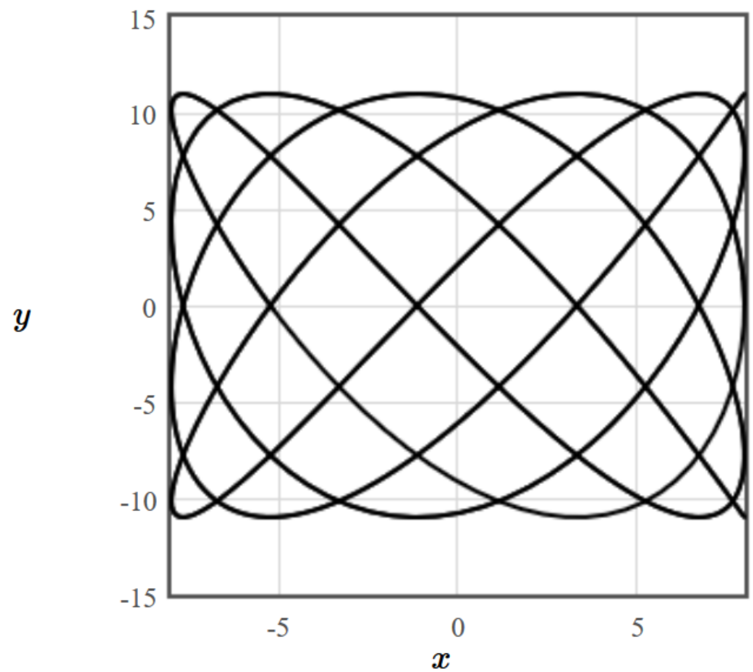
http://en.wikipedia.org/wiki/Line_integral

Kurvenintegral

Zurückgelegter Weg

Ein Käfer krabbelt entlang einer Lissajous-Kurve. Der Ortsvektor in Abhängigkeit der Zeit ist gegeben durch:

$$\vec{r}(t) = 8\cos(8t)\hat{x} + 11\sin(11t)\hat{y} \quad [\mathrm{m}]$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -64\sin(8t)\hat{x} + 121\cos(11t)\hat{y}.$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-64\sin(8t))^2 + (121\cos(11t))^2}$$

$$d = \int_0^6 |\vec{v}| dt.$$

mit t der Zeit in Sekunden. Berechnen Sie die Entfernung die der Käfer zwischen $t = 0$ und $t = 6$ s zurückgelegt hat.

$d =$ [m] Lösung

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (1)$$

$$\vec{F}(t), \vec{r}(t) \quad \text{bekannt}$$

oder $\quad \vec{F}(t), \vec{v}(t) \quad$ bekannt

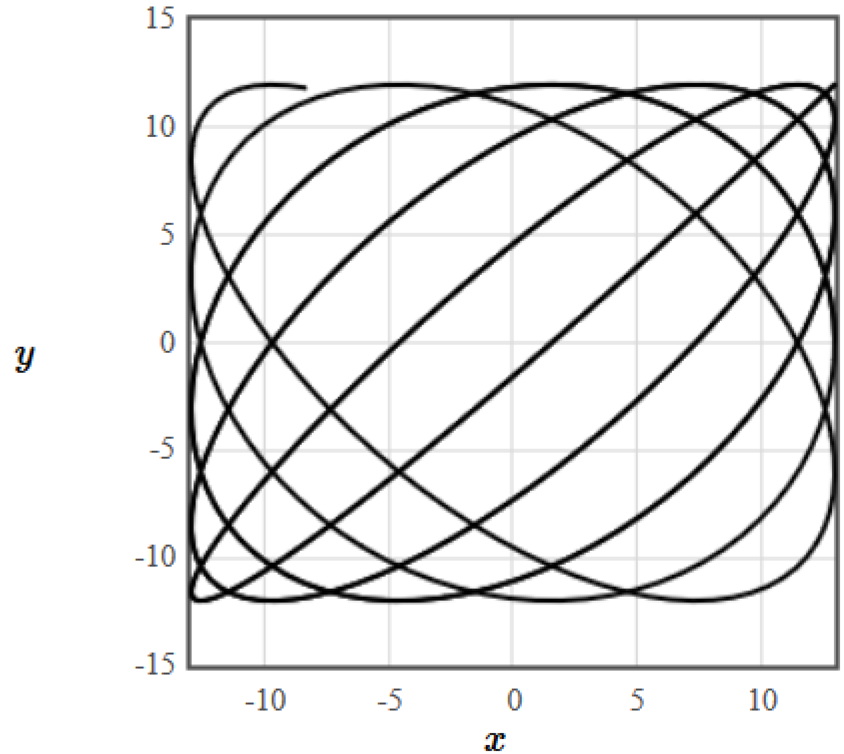
$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

$$W = \int F_x(t)v_x(t)dt + \int F_y(t)v_y(t)dt + \int F_z(t)v_z(t)dt$$

Arbeit gegen eine Reibungskraft(2)

Der Ortsvektor eines Teilchens ist gegeben durch:

$$\vec{r}(t) = 13\cos(12t)\hat{x} + 12\sin(13t)\hat{y} \quad [\mathrm{m}]$$



12*13=156

Mit t der Zeit in Sekunden.Das Teilchen bewegt sich durch eine viskose Flüssigkeit entgegen einer Reibungskraft $\vec{F} = -|\vec{v}|\vec{v}$. Wie groß ist die benötigte Arbeit um das Teilchen zwischen der Zeit $t = 0$ Sekunden und $t = 4$ Sekunden zu bewegen?

$W =$ [J] Submit

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (2)$$

$\vec{F}(\vec{r})$ ist bekannt

$$W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

Nichtlineare Feder

Die Kraft, die für das Zusammendrücken einer nichtlinearen Feder um die Strecke x benötigt wird, ist:

$$\vec{F} = 205x^{1.2}\hat{x} \quad [\mathrm{N}],$$

wobei x in Metern angegeben ist. Wieviel Arbeit wird verrichtet, wenn eine ursprünglich entspannte Feder um 12 Zentimeter zusammengedrückt wird?

$W =$ ______ [J] Lösung

$$\int_0^{0.12} 205x^{1.2}dx = \frac{205}{2.2}x^{2.2}\Big|_0^{0.12} = 0.878 \text{ J}$$

Verrichtete Arbeit durch konstante Kraft

Ein Objekt bewegt sich geradlinig von Position

$$\vec{r}_1 = 9\hat{x} - 6\hat{y} + 2\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

zu Position

$$\vec{r}_2 = 6\hat{x} - 5\hat{y} + 2\hat{z} \quad [\mathrm{m}],$$

während eine konstante Kraft

$$\vec{F} = 3\hat{x} + 7\hat{y} + 5\hat{z} \quad [\mathrm{N}].$$

auf das Objekt wirkt. Welche Arbeit wird durch diese Kraft verrichtet (die Arbeit kann negativ sein) ?

$W =$ [J] Lösung

Im Allgemeinen ist die Arbeit das Integral des inneren Produktes (Skalarproduktes) aus der Kraft und der zurückgelegten Entfernung:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz.$$

In diesem Fall ist die Kraft konstant,

negative Arbeit

$$W = \int_{9}^{6} (3) dx + \int_{-6}^{-5} (7) dy + \int_{2}^{2} (5) dz.$$

$$W = 3(6\text{-}9)+7(\text{-}5+6)+5(2\text{-}2) = \text{-}2 \text{ [J]}.$$

Die Arbeit ist negativ, wenn das Objekt in die der Kraft entgegengesetzte Richtung bewegt wird.

Konservative Kraft

Konservative Kraft: Arbeit entlang eines beliebigen Weges ist nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig.

$$\oint_C \vec{F}_{konservative} \cdot d\vec{r} = 0$$

konservative Kräfte: Schwerkraft, Coulombkraft, elastische Kraft

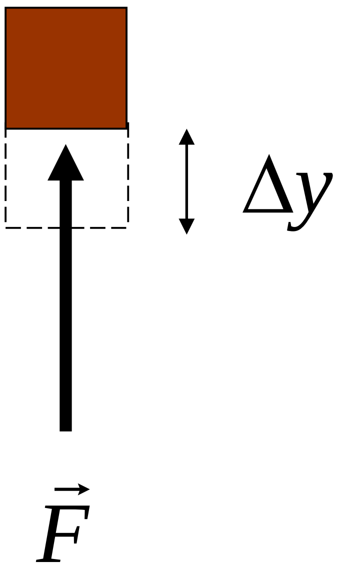
nicht konservative Kräfte: Reibungskräfte, dissipative Kräfte

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \geq 0$$

konservative Kraft → Potentielle energie

$$E_{pot}(x,y,z) = -W$$

Hubarbeit gegen Gewichtskraft

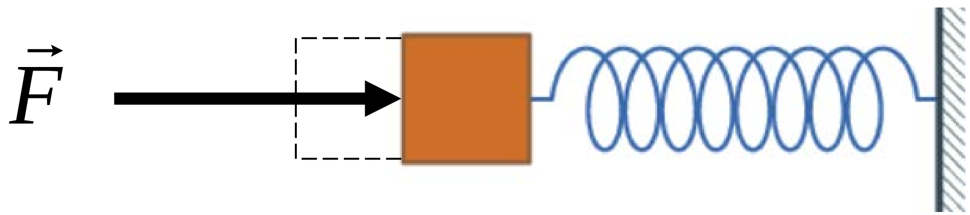


$$\vec{F} = -mg\hat{z}$$

$$E_{pot} = -W$$

Potentielle energie: $$\Delta E_{pot}(x, y, z) = mg\Delta y$$

Feder



Hookesches Gesetz: $F(x) = -kx$

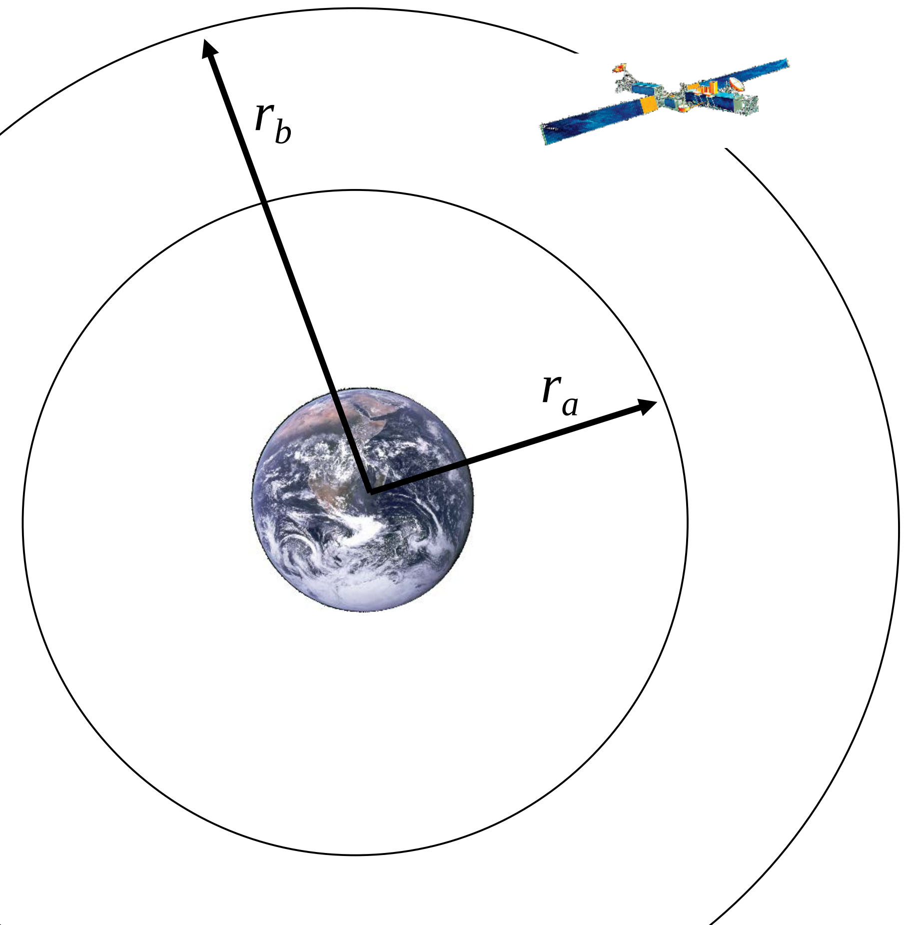
$$W = -\int_0^{x_e} kx\,dx = -\tfrac{1}{2}kx_e^2 \quad [\mathrm{J}]$$

Potentielle energie: $$E_{pot} = \frac{kx^2}{2}$$

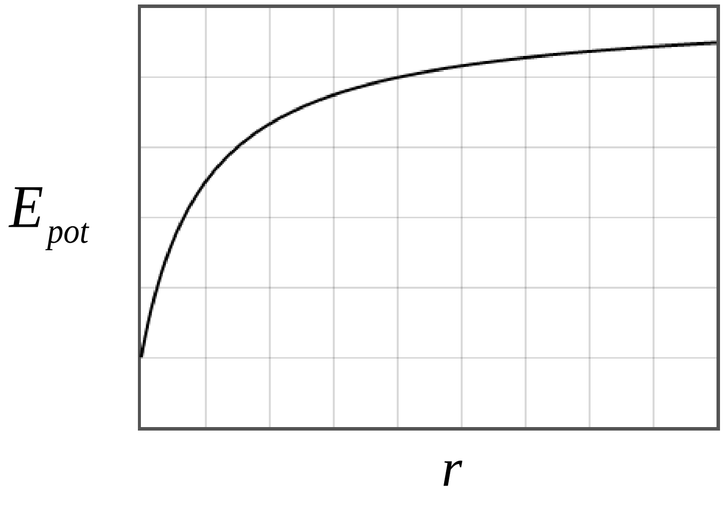
Gravitation

$$\Delta E_{pot}\left(\vec{r}\right) = -W$$

$$-W = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{-Gm_1m_2}{r^2}dr = \frac{-Gm_1m_2}{r_b} - \frac{-Gm_1m_2}{r_a}$$



$$E_{pot}\left(\vec{r}\right) = \frac{-Gm_1m_2}{\left|\vec{r}\right|}$$



konservative Kraft → Potentielle energie

$$E_{pot}(x,y,z) = -W$$

	Kraft	Potentielle energie
Schwerkraft	$\vec{F} = -mg\ \hat{y}$	$E_{pot}(x,y,z) = mgy$
Feder	$\vec{F} = -kx\ \hat{x}$	$E_{pot}(x,y,z) = \frac{kx^2}{2}$
Gravitation	$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\ \hat{r}$	$E_{pot}(x,y,z) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
Coulomb	$\vec{F} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$	$E_{pot}(x,y,z) = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$