Magnetismus

Das magnetische Feld rührt von elektrischen Strömen her. Von deren Richtung hängt die Richtung der magnetischen Kräfte ab. Diese beiden Richtungen müssen nicht übereinstimmen. Das magnetische Feld beschreibt die Wirkungslinien der magnetischen Kräfte in Betrag und Richtung.

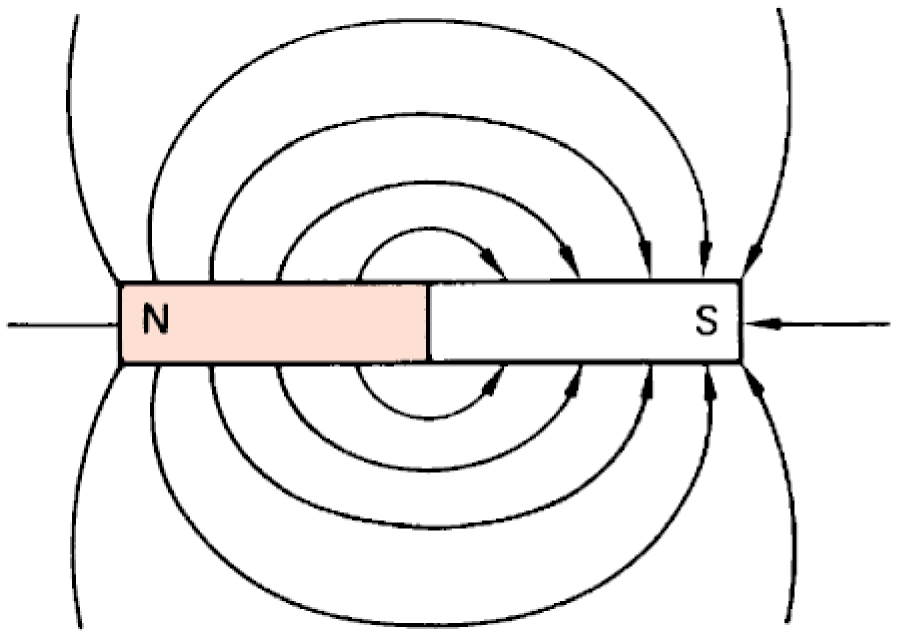


Abb. 4.86 Stabmagnet und magnetische Feldlinien

Die magnetischen Feldlinien weisen analog zu den elektrischen Feldlinien bestimmte Eigenschaften auf:

- die *Tangente an die Feldlinien* gibt die *Kraftrichtung* an;
- die Kraftwirkung ist eindeutig, d. h., die *Feldlinien schneiden sich nicht*;
- die *Dichte* der gezeichneten Feldlinien ist ein Maß für die *Stärke der Kraftwirkungen*.

Im Gegensatz zum elektrischen Feld zeigt das magnetische Feld Besonderheiten:

- es gibt *keine* magnetischen *Monopole*,
- die magnetischen Feldlinien sind *in sich geschlossen*, sie haben keinen Anfang und kein Ende.

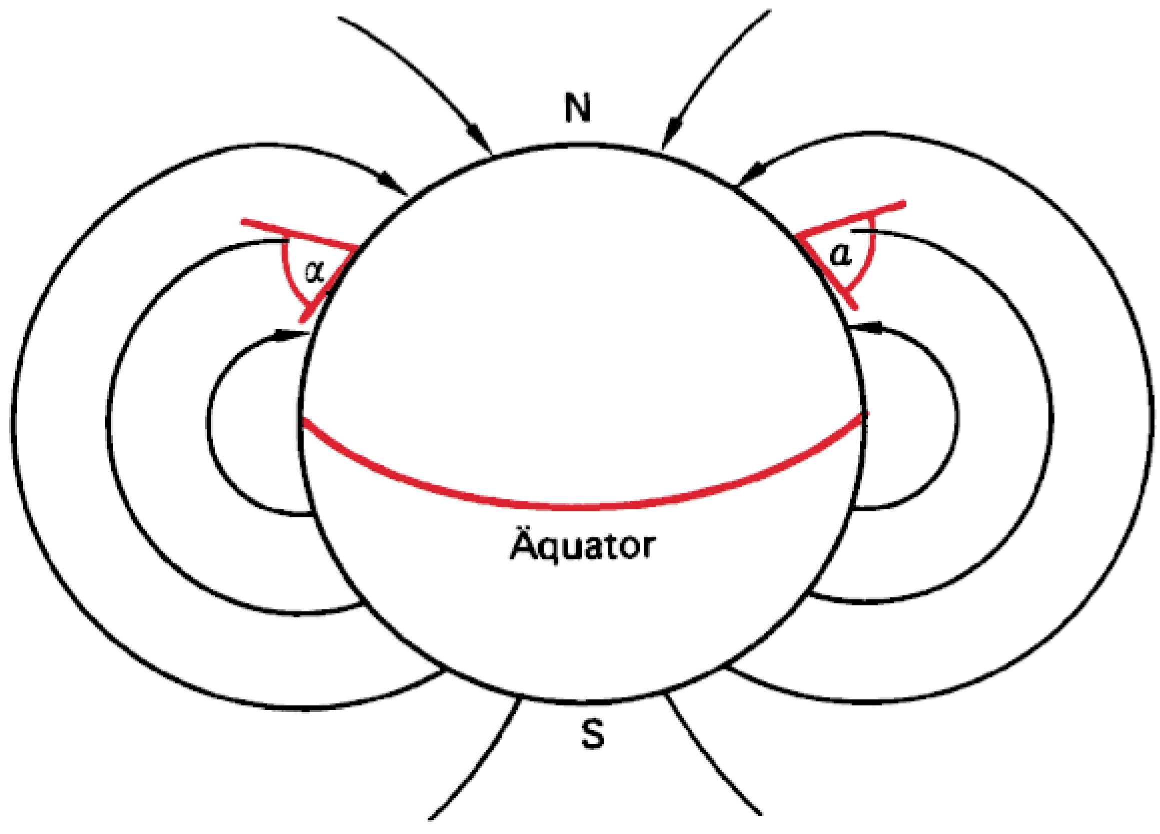
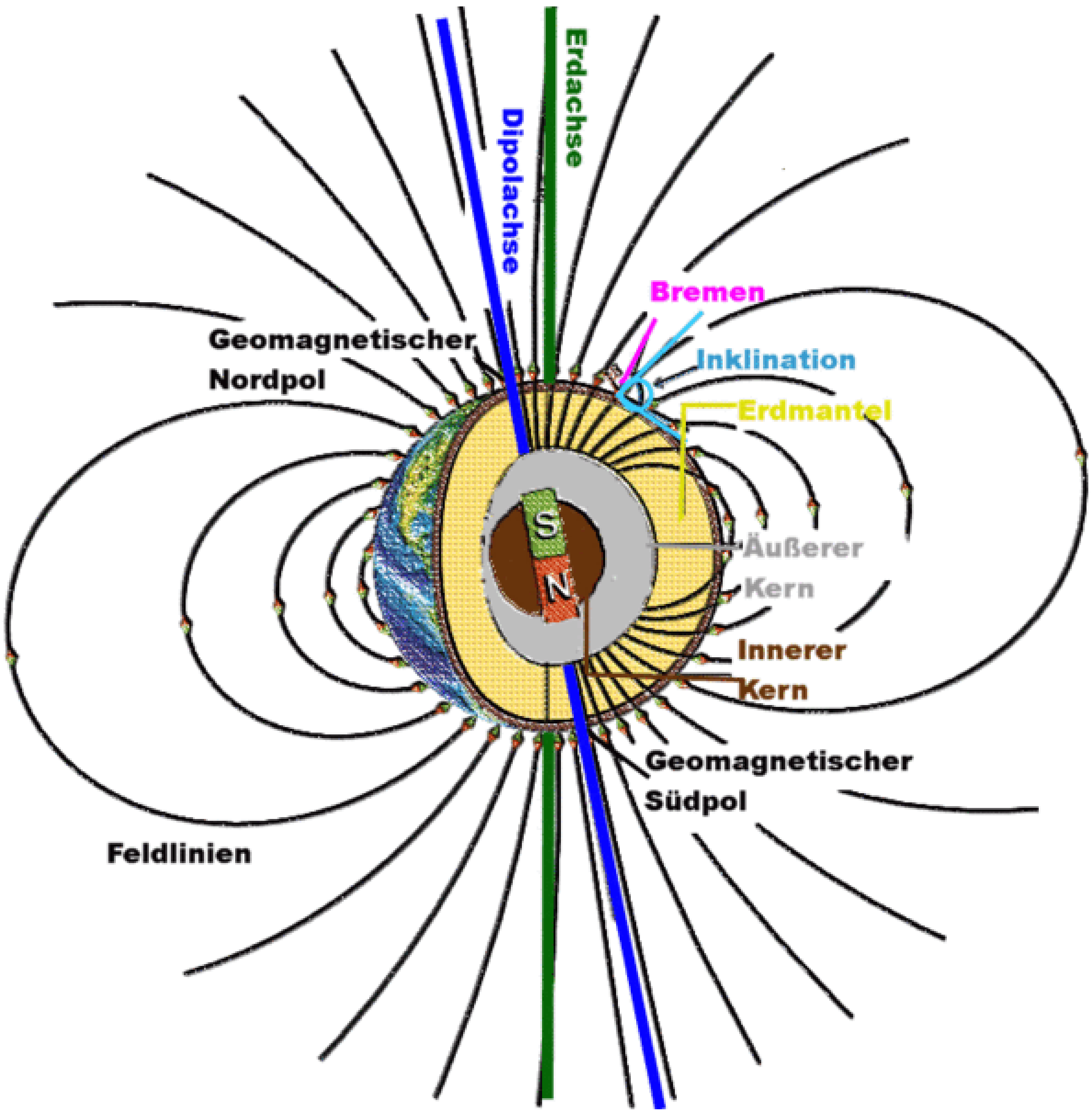


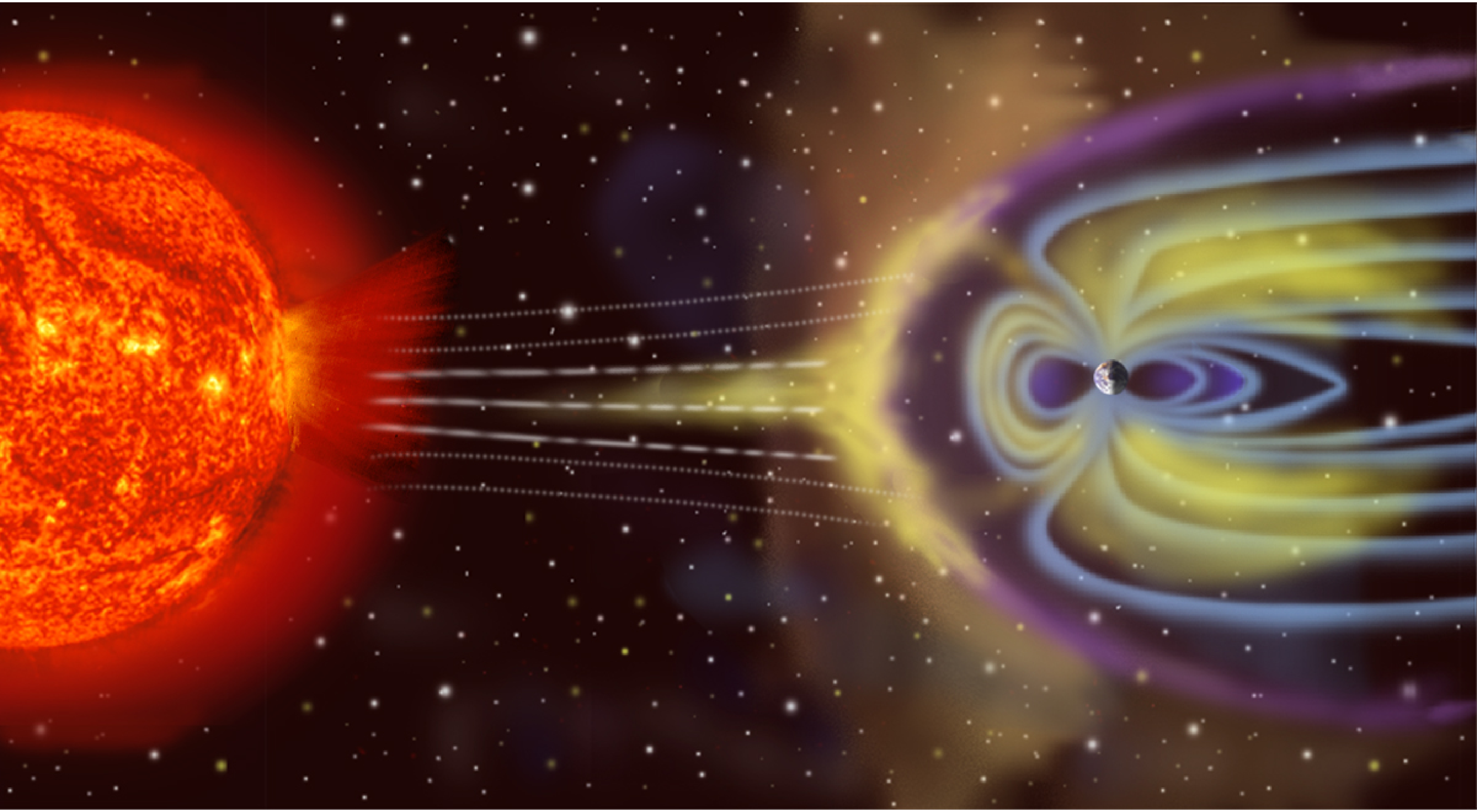
Abb. 4.87 Erdmagnetfeld

Das Magnetfeld der Erde

Die Erde ist von einem Magnetfeld umgeben. Der magnetische Südpol liegt in der Nähe des geografischen Nordpols (74° nördlicher Breite und 100° westlicher Länge auf der Halbinsel Boothia im Norden Kanadas). Der magnetische Nordpol befindet sich in der Nähe des geografischen Südpols (72° südlicher Breite und 155° östlicher Länge in der Antarktis). Die Abweichung des Erdmagnetfeldes von der geografischen Nord-Süd-Richtung wird *Deklination* genannt und beträgt für Deutschland etwa $\varphi = 2°$ westlich.



Erdachse
Dipolachse
Bremen
Inklination
Erdmantel
Äußerer
Kern
Innerer
Kern
Geomagnetischer
Nordpol
Geomagnetischer
Südpol
Feldlinien
S
N



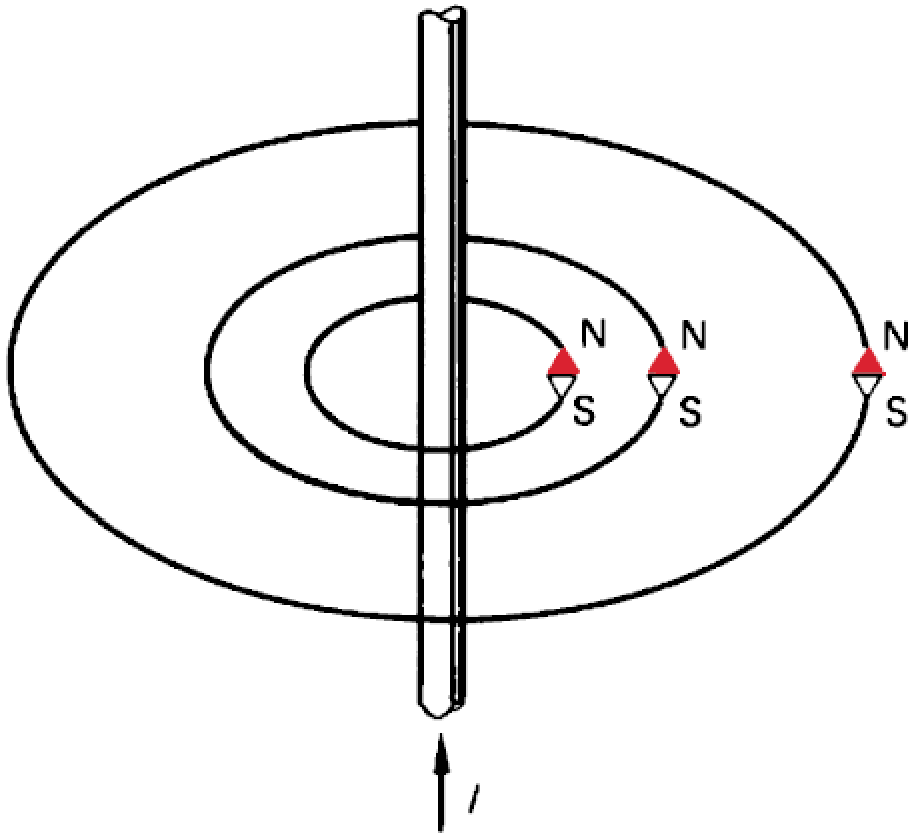


Abb. 4.88 Magnetfeld eines geraden, stromdurchflossenen Leiters

Wird die Stärke des magnetischen Feldes entlang der magnetischen Feldlinien mit $\boldsymbol{H}$ bezeichnet, so beschreibt das *Durchflutungsgesetz* (Ampère'sches Gesetz) den Zusammenhang zwischen Stromdichte $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{I}/\mathrm{A}$ und magnetischer Feldstärke (magnetischer Erregung) $\boldsymbol{H}$:

$$\Theta = \oint \boldsymbol{H}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\mathrm{A}} \boldsymbol{j}\, \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} I_i \,. \tag{4.171}$$

Das Integral der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{H}$ längs einer geschlossenen Umlauflinie ist gleich dem gesamten durch diese Fläche hindurchfließenden Strom I.

Die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ hat die Maßeinheit 1 A/m.

Analog zur elektrischen Spannung $U = \int \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ wird $\int \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ als *magnetische Spannung* bezeichnet.

Der Wert der magnetischen Spannung auf einer geschlossenen magnetischen Feldlinie $\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ ist die magnetische Randspannung Θ. Das Integral der Stromdichte $\boldsymbol{j}$ über die Fläche innerhalb der geschlossenen magnetischen Feldlinie, bei einzelnen Stromfäden wie in Abb. 4.89 also die Summe der Ströme $I_1 + I_2 + \ldots$, ist die elektrische Durchflutung Θ der magnetischen Feldlinie: $\Theta = \int\limits_A \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$.

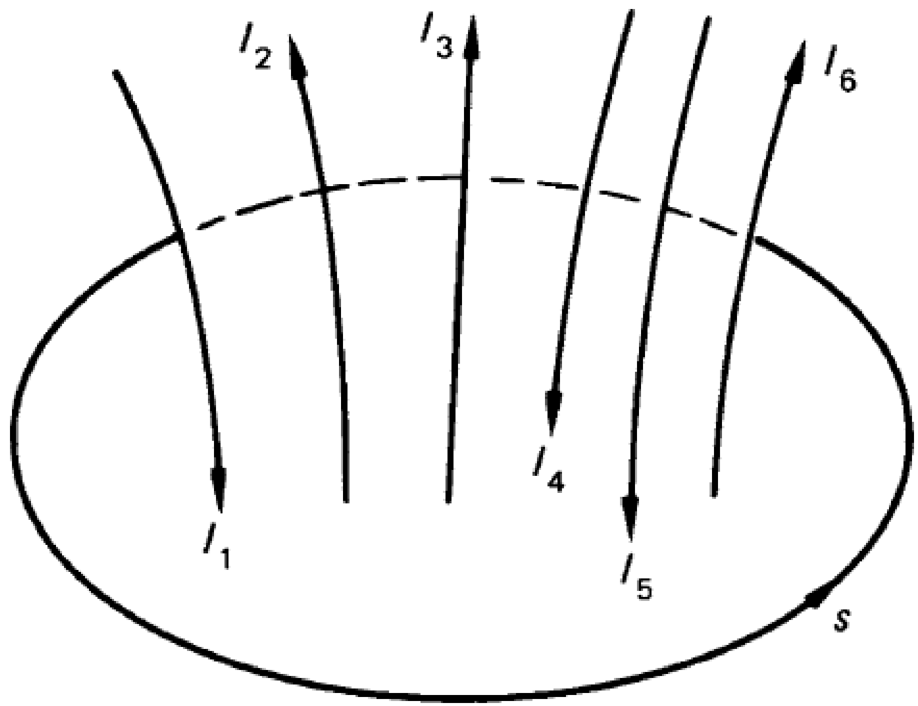


Abb. 4.89 Zum Begriff Durchflutung

$$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 + I_6 \,.$$

Umschließt der in sich geschlossene Integrationsweg keine Ströme, dann gilt, da $\boldsymbol{j} = 0$,

$$\oint \boldsymbol{H} \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \, . \qquad (4.172)$$

Das Durchflutungsgesetz ist allgemein gültig. Mit ihm kann die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ beliebig verlaufender stromführender Leiter berechnet werden.

Magnetische Feldstärke eines geradlinigen, stromdurchflossenen Leiters

Das Durchflutungsgesetz lautet in diesem Fall nach (4.171)

$$\oint \boldsymbol{H}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{n} I_i = I \, .$$

Experimentell zeigt sich, dass die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ auf konzentrischen Kreisen um den stromdurchflossenen Leiter konstant ist. Der Weg auf der geschlossenen Feldlinie in Abb. 4.90 mit dem Radius r beträgt $s = 2\pi r$, sodass gilt

$$H \cdot 2\pi\, r = I \, ,$$

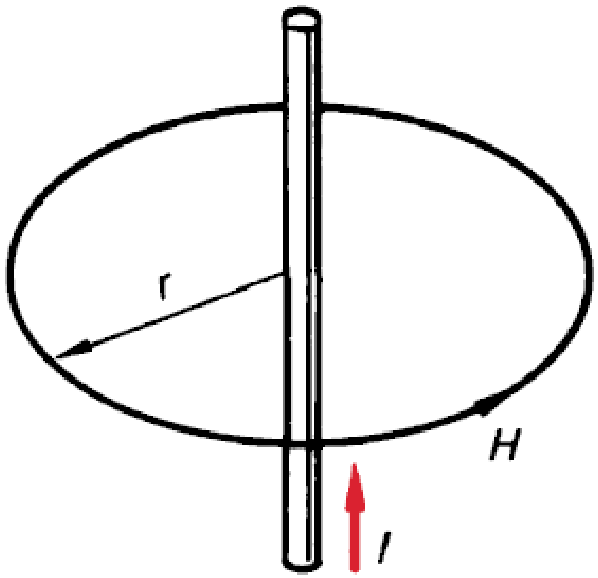


Abb. 4.90 Magnetische Feldstärke H um einen einzelnen geradlinigen stromdurchflossenen Leiter

$$H = \frac{I}{2\pi r}\,. \tag{4.173}$$

Die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ nimmt also mit zunehmender Entfernung proportional zu $1/r$ ab.

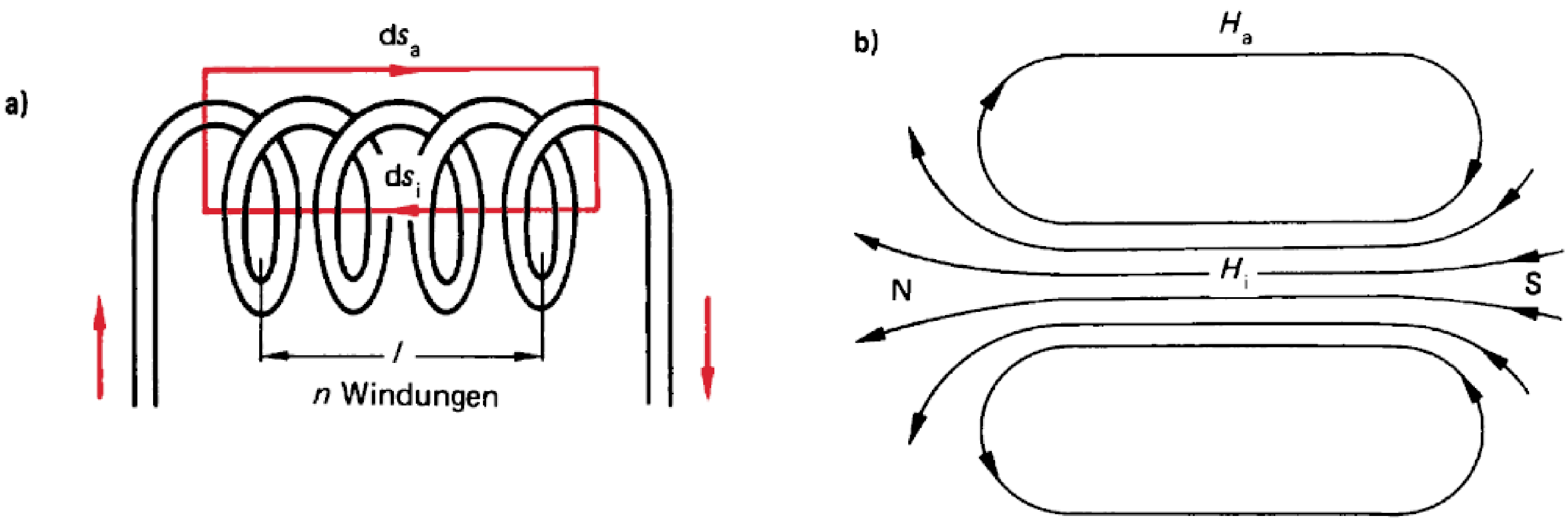


Abb. 4.91 Magnetische Feldlinien in einer Zylinderspule (Solenoid)

Da eine geschlossene magnetische Feldlinie N Windungen mit jeweils der Stromstärke I umschließt (Abb. 4.91a), gilt nach dem Durchflutungsgesetz (4.168)

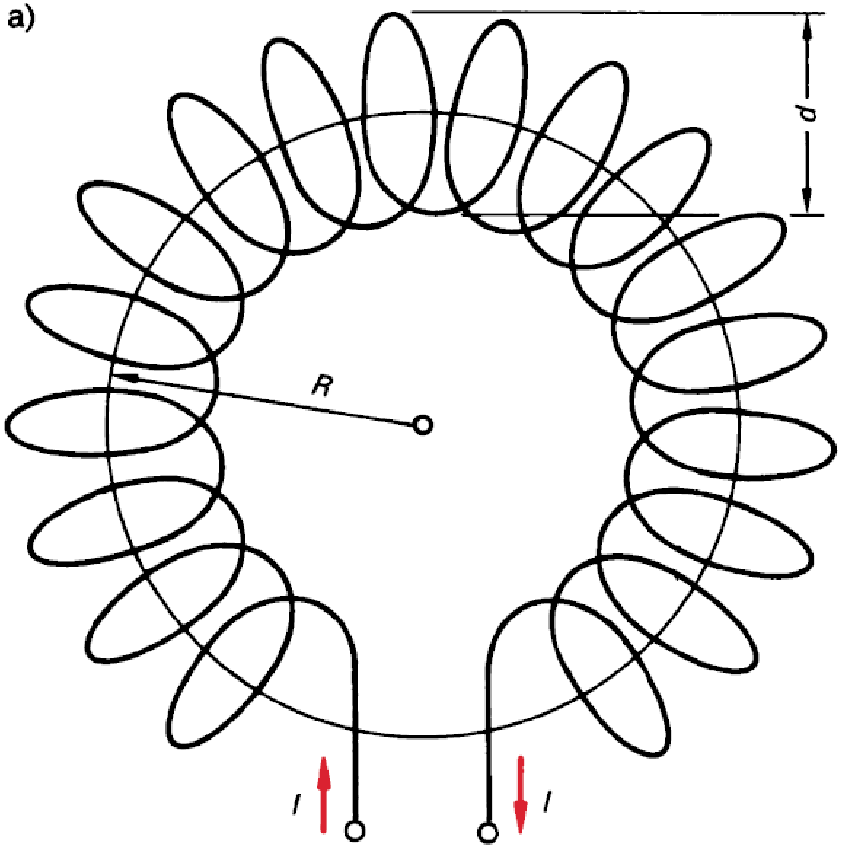
$$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int \boldsymbol{H}_\mathrm{i}(s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}_\mathrm{i} + \int \boldsymbol{H}_\mathrm{a}(s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}_\mathrm{a} = N\,I\,.$$

Im Innern der Spule ist $\boldsymbol{H}_\mathrm{i}(\boldsymbol{s})$ konstant: $\boldsymbol{H}_\mathrm{i} = \boldsymbol{H}$, das Wegintegral ergibt die Spulenlänge l: $H_\mathrm{i} \int \mathrm{d}\boldsymbol{s} = H\,l$. Der Integralanteil außerhalb der Spule ist wegen $\boldsymbol{H}_\mathrm{a} \ll \boldsymbol{H}_\mathrm{i}$ vernachlässigbar klein. Für das Magnetfeld im Innern einer langen Zylinderspule gilt deshalb

$$H = \frac{N\,I}{l}\,. \tag{4.174}$$

Magnetische Feldstärke einer Ringspule

a)



b)

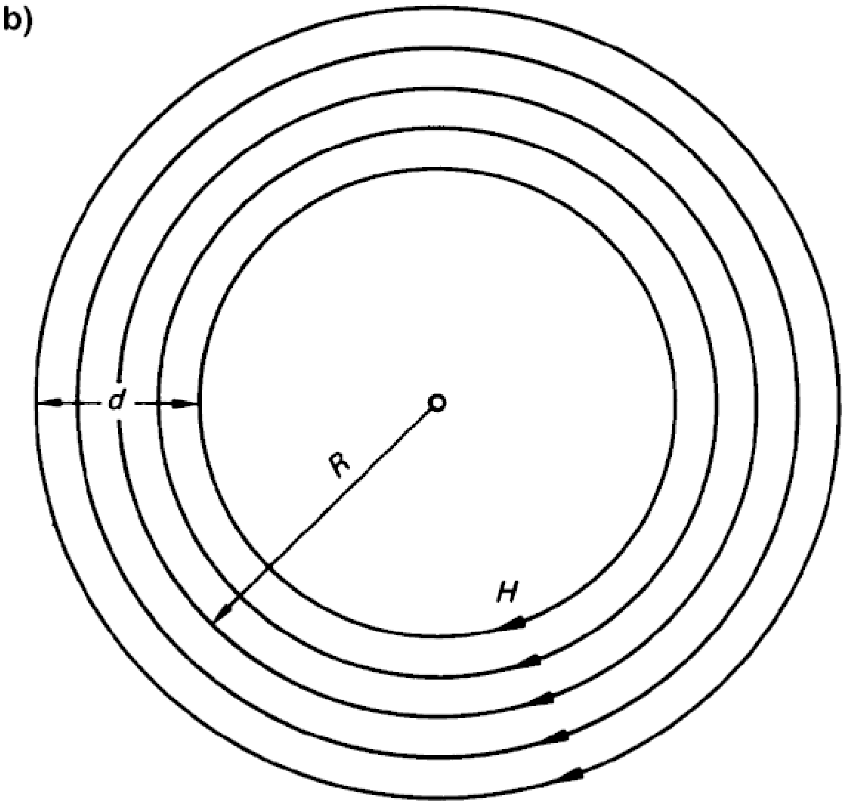


Abb. 4.92 Magnetische Feldlinien in einer Ringspule (Toroid)

Das magnetische Feld im Innern einer dicht gewickelten ringförmigen Spule gemäß Abb. 4.92 ist kreisförmig innerhalb der Grenzen

$$R - \frac{d}{2} \leqq r \leqq R + \frac{d}{2} \,.$$

Nach dem Durchflutungsgesetz gilt

$$H \, 2 \, \pi \, r = N \, I \,.$$

Ist der Radius der Spule $R \gg d/2$, dann herrscht in der Spule ein annähernd homogenes kreisförmiges Feld (Abb. 4.92b) mit der magnetischen Feldstärke

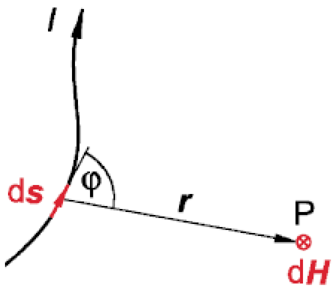
$$H = \frac{N \, I}{2 \, \pi \, R} \,. \qquad (4.175)$$

Magnetische Feldstärke stromdurchflossener Leiter beliebiger Geometrie

Ein kleines Leiterstück der Länge ds liefert in einem Punkt P in der Entfernung r den Beitrag

$$\mathrm{d}H = \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi r^2} \sin\varphi$$

zur magnetischen Feldstärke (Abb. 4.93). Vektoriell gilt



Zum Biot-Savart'schen Gesetz

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3} . \qquad (4.176)$$

Gleichung (4.176) ist das *Biot-Savart'sche Gesetz* (J.B. Biot, 1774 bis 1862, und F. Savart, 1791 bis 1841).

Beispiel

4.4-1 Die magnetische Feldstärke H im Mittelpunkt eines kreisförmig fließenden Stroms ($I = 10$ A, $r = 10$ cm) ist zu berechnen.

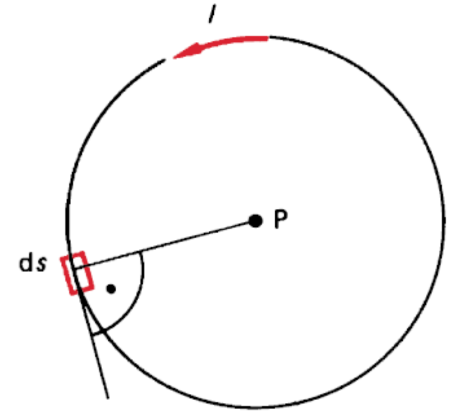


Abb. 4.94 Magnetische Feldstärke im Mittelpunkt eines Kreisstroms

Lösung

Da der Radius r gemäß Abb. 4.94 senkrecht zum Linienelement ds steht, ist $\sin\varphi = 1$. Somit lautet das Biot-Savart'sche Gesetz (4.176)

$$\mathrm{d}H = \frac{I}{4\pi r^2}\,\mathrm{d}s \quad \text{oder} \quad H = \frac{I}{4\pi r^2}\oint \mathrm{d}s\,.$$

Das geschlossene Wegintegral $\oint \mathrm{d}s$ ist der Umfang des Kreises $2\pi r$. Man schreibt also

$$H = \frac{I}{4\pi r^2}\,2\pi r\,.$$

Daraus ergibt sich für die magnetische Feldstärke im Mittelpunkt des stromdurchflossenen Kreises

$$H = \frac{I}{2\,r}\,.$$

Es resultiert $H = \frac{10}{2\cdot 0{,}1}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 50$.

4.4.3 Magnetische Flussdichte und Kraftwirkungen im Magnetfeld

4.4.3.1 Magnetischer Fluss, magnetische Flussdichte

magnetische Fluss Φ

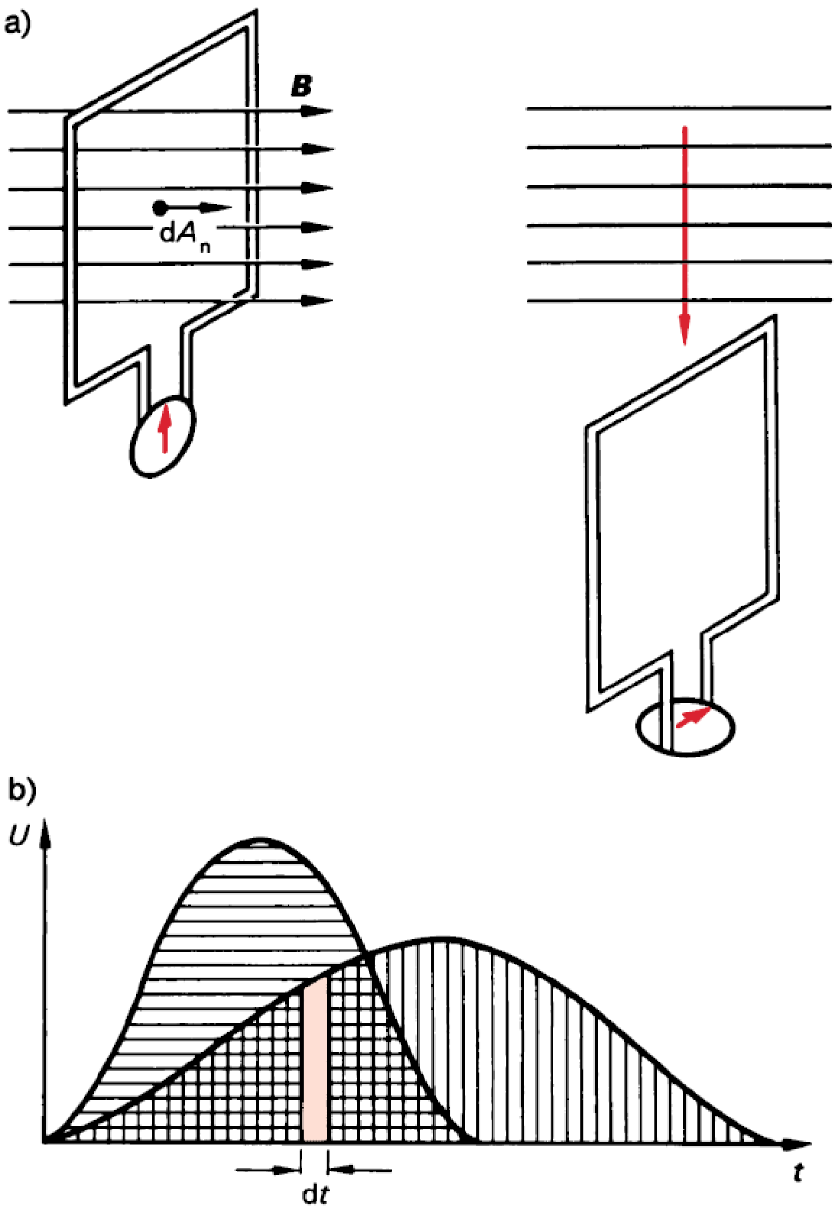


Abb. 4.97 Spannungsstoß und magnetischer Fluss

Der Fluss durch die Leiterschleife ändert sich durch das Herausziehen der Leiterschleife von ursprünglich Φ auf null um $\Delta\Phi = \Phi - 0 = \Phi$. Die Änderung des magnetischen Flusses wird direkt dem Spannungsstoß zugeordnet:

$$\Delta\Phi = \frac{\int U(t)\,\mathrm{d}t}{N} \, . \qquad (4.187)$$

Entsprechend gilt für den Spannungsstoß

$$\int U(t)\,\mathrm{d}t = N\Delta\Phi \, . \qquad (4.188)$$

Der Spannungsstoß $\int U\,\mathrm{d}t$ ist gleich der Änderung des magnetischen Flusses Φ, der die Fläche eines Leiters senkrecht durchsetzt.

Die Einheit des Flusses ist 1 Vs = 1 Wb (Weber).

Wegen der Abhängigkeit des Spannungsstoßes von der Größe und der Orientierung der Leiterschleifenfläche zur Richtung des magnetischen Flusses wird außer der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{H}$ eine weitere vektorielle magnetische Feldgröße, die *magnetische Flussdichte* oder die *magnetische Induktion* $\boldsymbol{B}$ definiert:

$$B = \frac{\Phi}{A_\perp} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A_\perp}\,. \qquad (4.189)$$

Die magnetische Induktion oder Flussdichte $\boldsymbol{B}$ beschreibt den magnetischen Fluss Φ pro Flächeneinheit senkrecht zu den Feldlinien.

Die Einheit der magnetischen Induktion ist $1\,\mathrm{Vs/m^2} = 1\,\mathrm{T}$ (Tesla).

$$B = \frac{\Phi}{A_\perp} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A_\perp}\,. \tag{4.189}$$

Aus (4.189) lässt sich der magnetische Fluss Φ durch eine Fläche z. B. einer beliebig orientierten Leiterschleife berechnen:

$$\Phi = \int \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int B\cos\varphi\,\mathrm{d}A\,. \tag{4.190}$$

Sind also die magnetischen Feldlinien unter einem Winkel φ zur Flächennormalen geneigt, so ist nur die Flussdichte senkrecht zur Fläche $B\cos\varphi$ maßgebend, wie Abb. 4.98 zeigt.

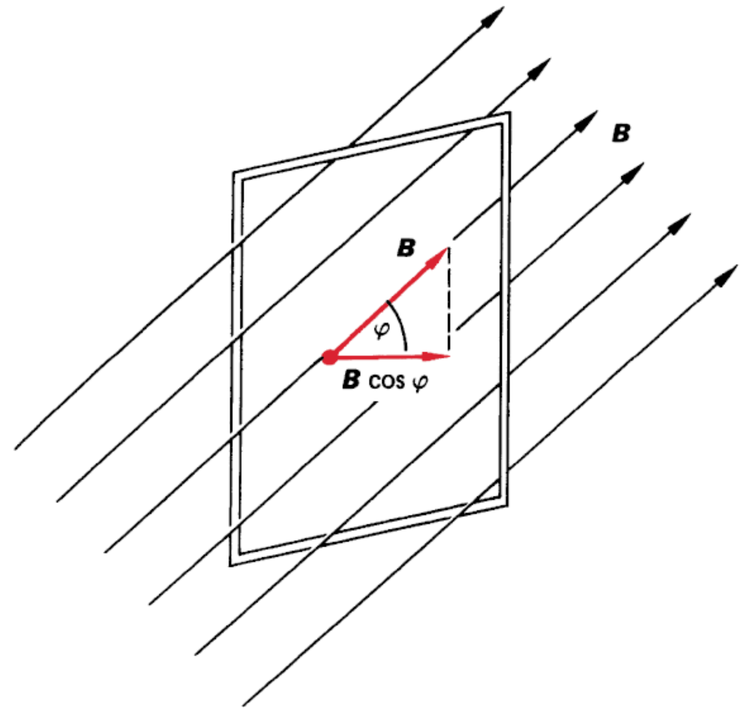


Abb. 4.98 Beliebig orientierte Leiterschleife im Magnetfeld

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\,\boldsymbol{H}\,. \tag{4.191}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \; . \tag{4.191}$$

Die Proportionalitätskonstante ist die *magnetische Feldkonstante* μ_0. Ihr Zahlenwert ergibt sich aus den Kraftwirkungen elektrischer Ströme (s. Definition des Ampère in Abschn. 1.3.1 und 4.1.2).

Die magnetische Feldkonstante beträgt demnach

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \approx 1{,}257 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \; . \tag{4.192}$$

Gleichung (4.191) gilt nur im *materiefreien* Raum.

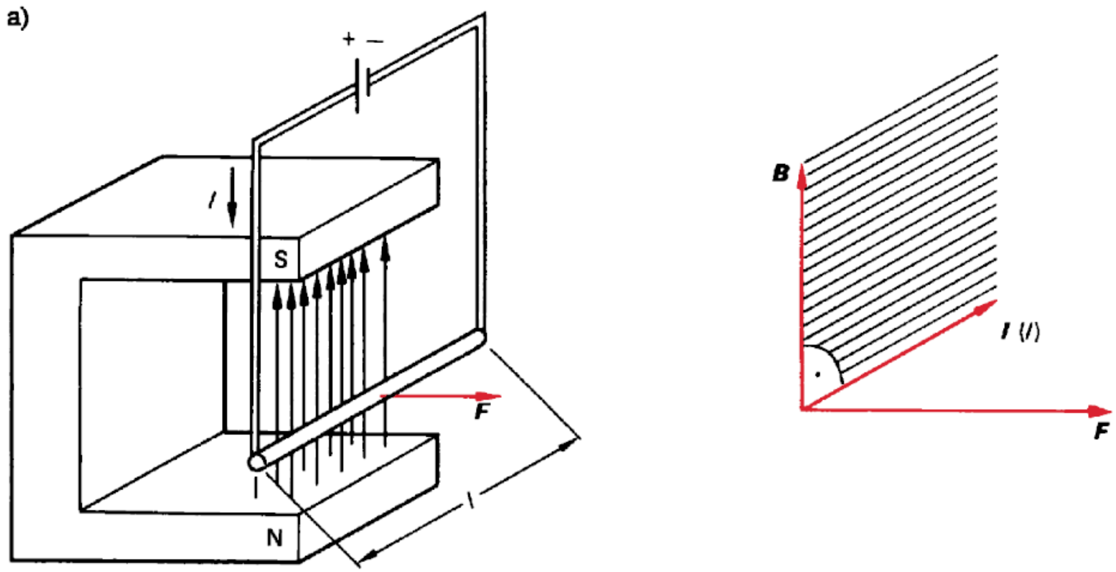
4.4.3.2 Kraftwirkungen im Magnetfeld

Verschiedene Magnetfelder überlagern sich zu einem resultierenden Magnetfeld, z. B. das Magnetfeld eines Permanentmagneten und das eines stromdurchflossenen Leiters. Aus diesem resultierenden Feld lassen sich Kraftwirkungen ableiten.

Stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld

Experimentell gilt für den Kraftbeitrag d$\boldsymbol{F}$ eines stromdurchflossenen Leiterelementes der Länge d$\boldsymbol{l}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,(\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})\,. \tag{4.193}$$



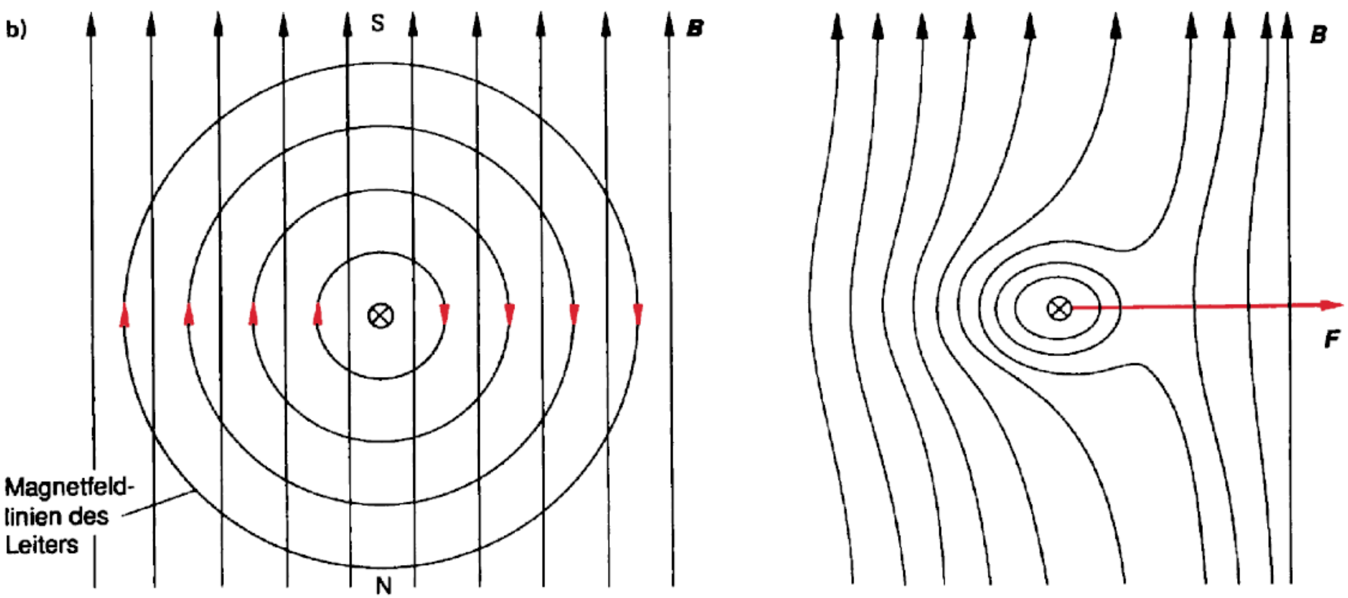


Abb. 4.99 Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld

Verläuft der stromführende Leiterabschnitt mit der Länge l senkrecht zum Magnetfeld, so gilt

$$\boldsymbol{F} = I \int_0^l (\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}) = -I \int_0^l \boldsymbol{B} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= -I\,\boldsymbol{B} \times \int_0^l \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

$\boldsymbol{F} = -I\,\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{l}$ oder

$$\boldsymbol{F} = I\,(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})\,. \tag{4.194}$$

Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter hat den Betrag

$$F = I\,l\,B \sin\varphi\,. \tag{4.195}$$

φ ist der Winkel zwischen Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ und dem geraden Leiterstück $\boldsymbol{l}$.

Die Kraft $\boldsymbol{F}$ auf einen stromdurchflossenen Leiter der Länge $\boldsymbol{l}$ in einem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ wirkt senkrecht zur Fläche, die von den Vektoren $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{B}$ aufgespannt wird.

(Veranschaulichung durch die Rechte-Hand-Regel: Daumen in Stromrichtung, Zeigefinger in magnetischer Feldrichtung: dann zeigt der Mittelfinger in Kraftrichtung.)

Befindet sich der stromdurchflossene Leiter senkrecht zum Magnetfeld, dann gilt (da $\sin\varphi = 1$):

$$F = I\,l\,B\,. \tag{4.196}$$

Gemäß (4.196) lässt sich die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ über die Kraftwirkung im Magnetfeld erklären:

$$B = \frac{F}{I\,l}\,. \tag{4.197}$$

Die magnetische Flussdichte B gibt an, wie groß die Kraft ist, die je Stromstärke- und je Längeneinheit auf einen stromdurchflossenen Leiter wirkt.

Die Einheit von B ist damit auch 1 N/Am.

Magnetisches Moment

Eine kleine Kompassnadel dreht sich im Magnetfeld stets so, dass sie parallel zu den Feldlinien ausgerichtet ist. Dreht man sie im Feld, so entsteht ein rücktreibendes Drehmoment. Dasselbe gilt für einen elektrischen Dipol (Abschn. 4.3.7), wie Abb. 4.101a zeigt.

Auf jede Ladung Q des Dipols wirkt eine Kraft $F = QE$. Das Drehmoment dieses Kräftepaars ist (Abschn. 2.9.2)

$$M = F\,d \sin\varphi = Q\,\mathrm{d}E\,\sin\varphi\,.$$

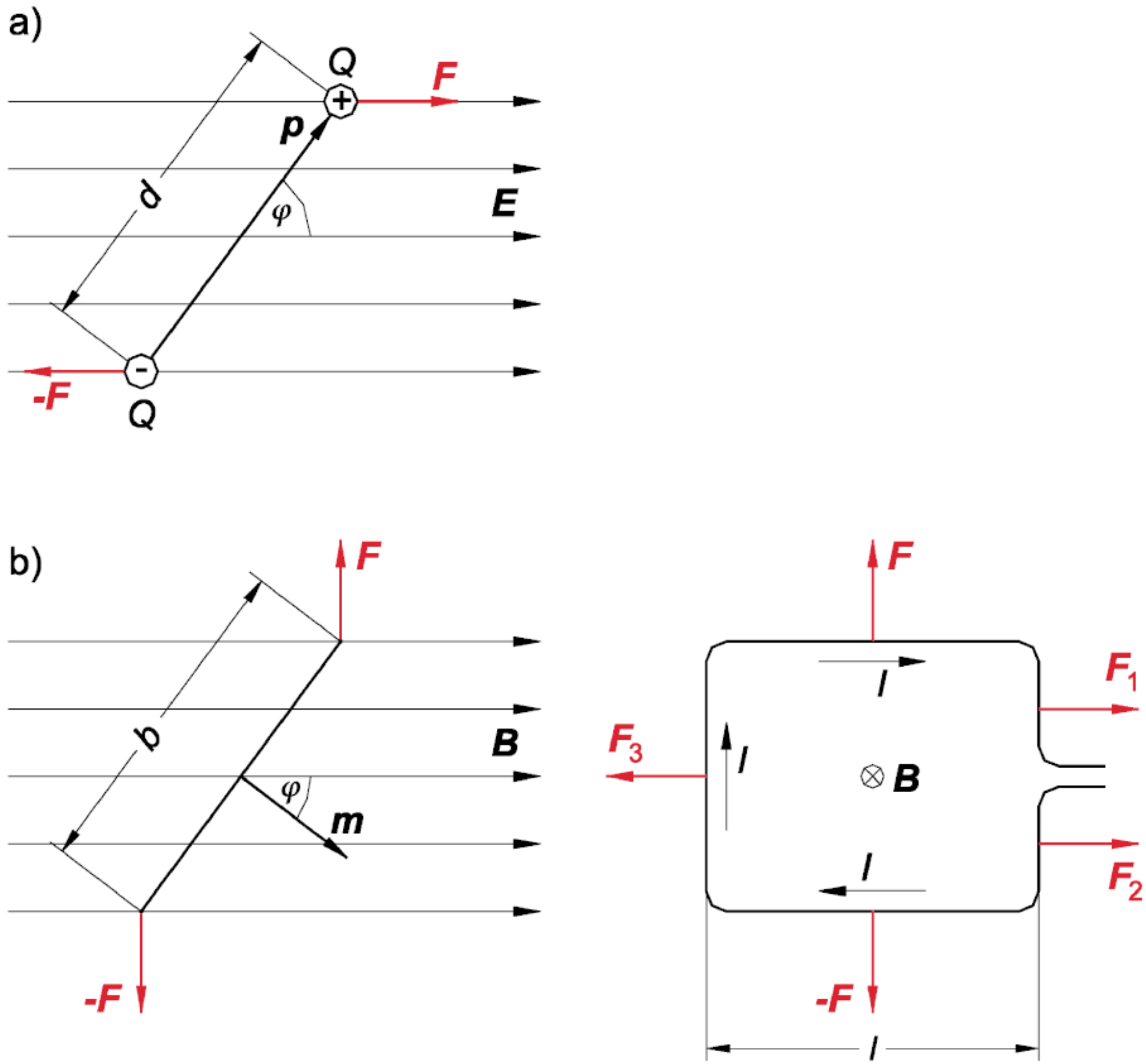


Abb. 4.101 Dipole im homogenen Feld: **a** elektrischer Dipol im ***E***-Feld, **b** magnetischer Dipol im ***B***-Feld, *links* Seitenansicht, *rechts* Draufsicht

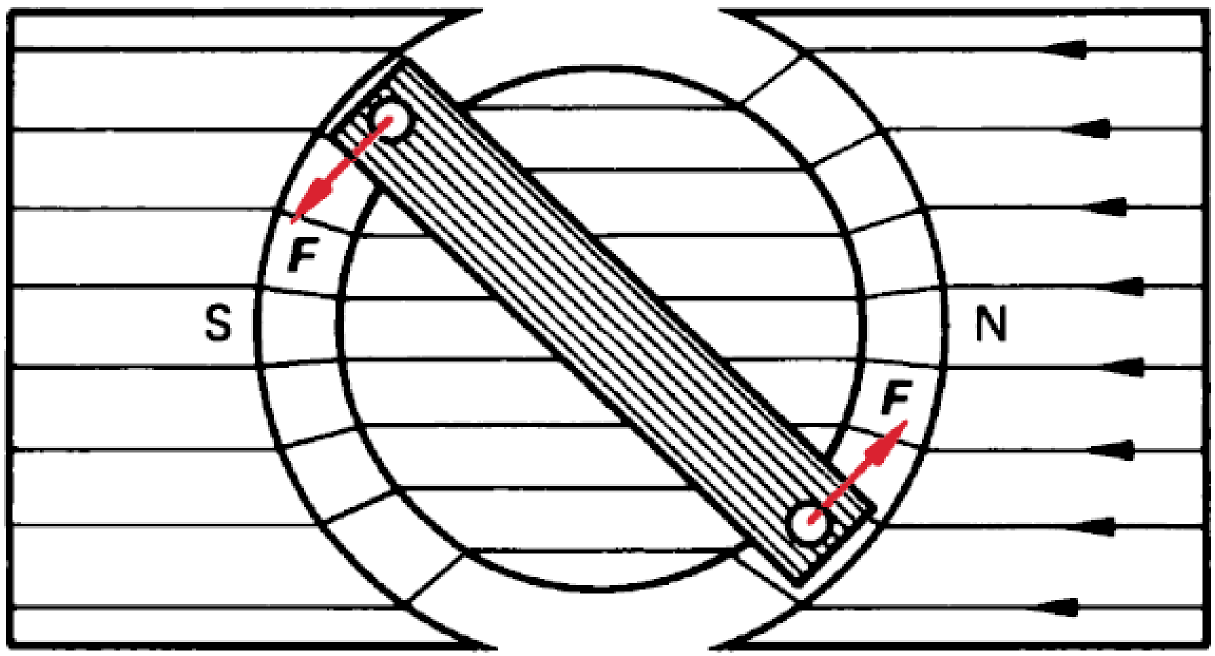


Abb. 4.100 Prinzip des Drehspulinstrumentes