Bonus Frage 4.12.15

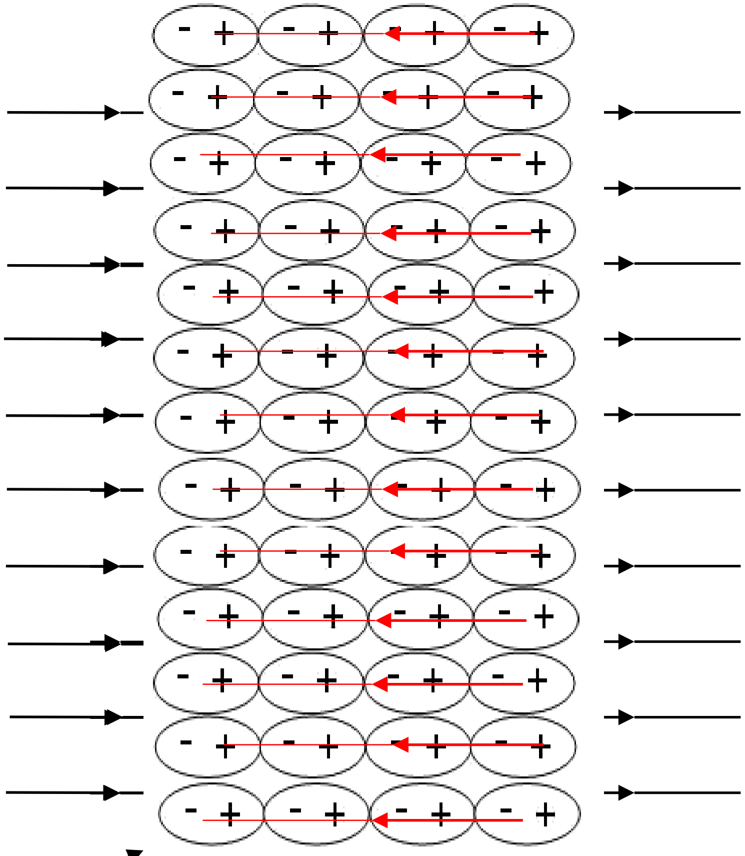
7. Elektrizität

- Elektrisches Feld zweier Punktladungen
- Gradient
- Elektrostatisches Potential → elektrisches Feld
- Das elektrische Feld
- Elektrisches Feld → Ladungsdichte
- Die Bewegung eines Elektrons
- Elektrostatisches Potential eines gleichmäßig geladenen Stabes

Dielektrikum

$$\varepsilon_r = \frac{E_{vacuum}}{E_{dielektr}}$$

relative Dielektrizitätszahl



Nichtleiter (Isolator)

Elektrostatik

$$\rho$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \boxed{\varepsilon_r} \varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} (\vec{r}-\vec{r}') d^3 r'$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\boxed{\varepsilon_r} \varepsilon_0}$$

$$\vec{E}$$

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} + \varphi_0$$

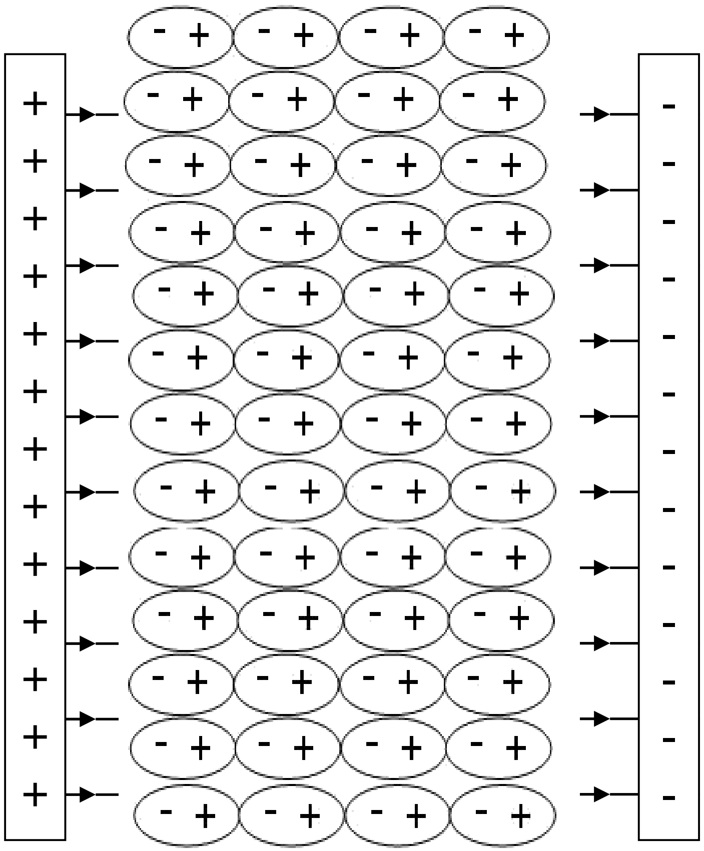
$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\varphi$$

Energiespeicher

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d}$$

$$E_{pot} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}$$



Magnetostatik

$$I$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{i})}{|\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{i}|^3}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (4.171)$$

$$\vec{B}$$

Biot-Savart'sches Gesetz

Ampèresches Gesetz

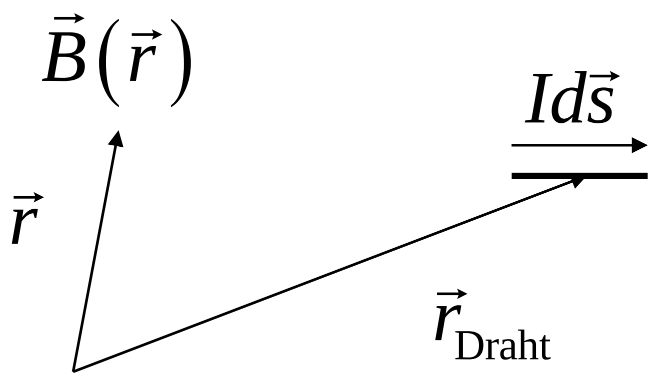
Magnetostatik (kleine Leiterstück)

Biot-Savart-Gesetz

I

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{Draht}})}{\left|\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{Draht}}\right|^3} \qquad (4.176)$$

$\vec{B}$



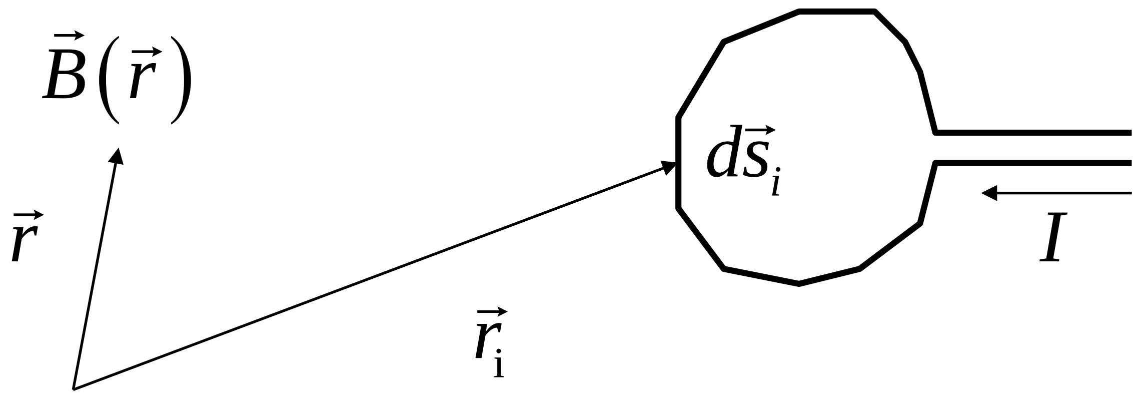
$d\vec{s}$ ist in der Richtung des Stroms

Magnetostatik

I

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{i}})}{\left|\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{i}}\right|^3}$$

$\vec{B}$



Biot-Savart'sches Gesetz

Das magnetische Feld, welches von einem durch einen Draht fließenden elektrischen Strom I hervorgerufen wird, kann bestimmt werden, indem der Strompfad in kurze Segmente geteilt wird und Beiträge aller Segmente aufsummiert werden. Der Beitrag zum magnetischen Feld an der Position $\vec{r}$ hervorgerufen durch ein kurzes Längensegment $d\vec{s}$ an $\vec{r}_{wire}$ ist:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{r}_{wire})}{|\vec{r}-\vec{r}_{wire}|^3} \; \textbf{[T]}.$$

Dabei zeigt $d\vec{s}$ zeigt in die Richtung des Stromflusses. Die Konstante $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m/A ist die magnetische Feldkonstante.

Die Lage und Form des Drahtes kann mit einer parametrischen Gleichung unter Verwendung eines Parameters s, der die Distanz entlang des Drahtes mißt, festgelegt werden. Beispielsweise wird ein gerader Draht von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ beschrieben durch:

$$\vec{r}_{wire} = (r_{1x} + s(r_{2x} - r_{1x}))\hat{x} + (r_{1y} + s(r_{2y} - r_{1y}))\hat{y} + (r_{1z} + s(r_{2z} - r_{1z}))\hat{z} \quad \text{mit } s = [0, 1].$$

Für eine Drahtschleife des Radiuses R in der x-y Ebene an $z = 0$:

$$\vec{r}_{wire} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + 0\hat{z} \quad \text{mit } s = [0, 1].$$

Für eine Drahtwendel mit 10 Windungen

$$\vec{r}_{wire} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + \frac{s}{n}\,\hat{z} \quad \text{mit } s = [0, 10],$$

wobei n die Anzahl der Windungen per Meter auf der Wendel ist. Das folgende Formular kann benutzt werden, um das magnetische Feld an der Position $\vec{r}$ zu berechnen.

Die Position, an der $\vec{B}$ berechnet wird:

$\vec{r} =$ 0 $\hat{x} +$ 0 $\hat{y} +$ 0.005 $\hat{z}$ [m].

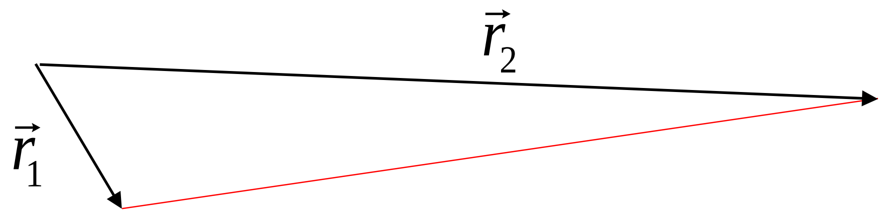
Die parametrischen Gleichungen zur Beschreibung des Drahtes:

$\vec{r}_{wire} =$ 0.1*cos(2*pi*s) $\hat{x} +$ 0.1*sin(2*pi*s) $\hat{y} +$ s/1000 $\hat{z}$ [m].

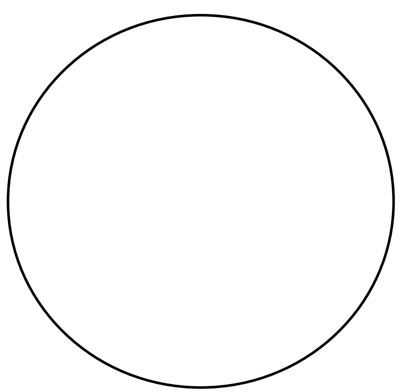
s ist definiert von $s =$ 0 bis $s =$ 10 in 3000 Segmenten.

Der Strom: $I =$ 10 [A].

Parameterdarstellung



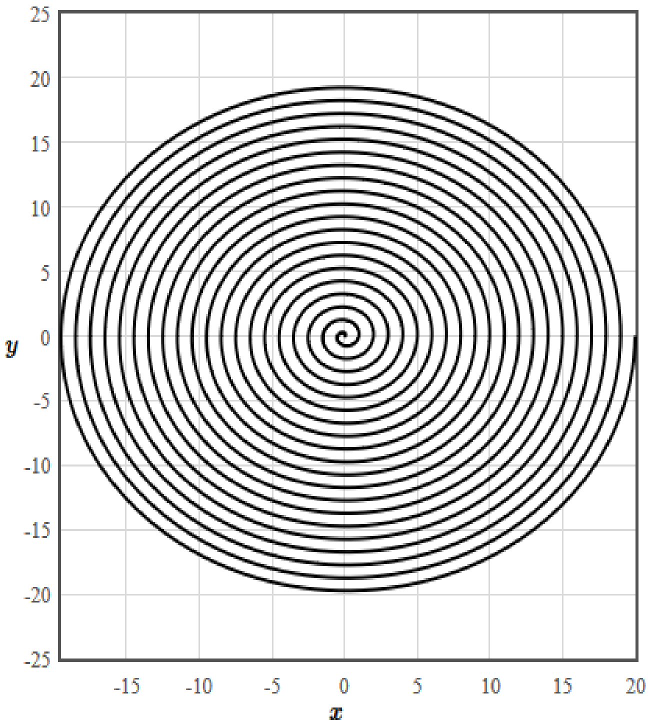
$$\vec{r} = \left(r_{1x} + (r_{2x} - r_{1x})s\right)\hat{x} + \left(r_{1y} + (r_{2y} - r_{1y})s\right)\hat{y} + \left(r_{1z} + (r_{2z} - r_{1z})s\right)\hat{z} \qquad s = [0,1]$$



$$\vec{r} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + 0\hat{z} \qquad s = [0,1]$$

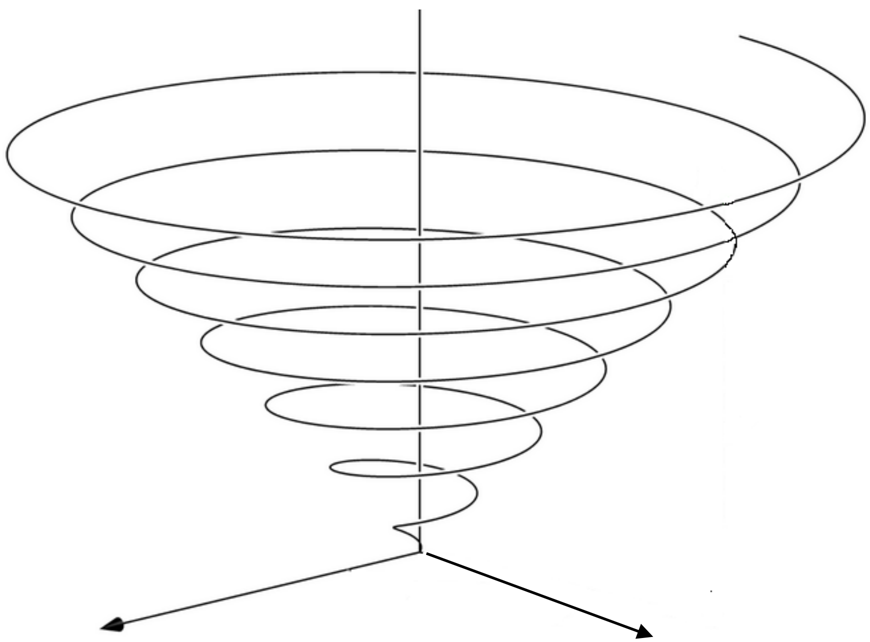
$$\vec{r} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + \frac{s}{n}\hat{z} \qquad s = [0,10]$$

Parameterdarstellung



$$\vec{r} = s\cos(2\pi s)\hat{x} + s\sin(2\pi s)\hat{y} + 0\hat{z}$$

$$s = [0, 20]$$

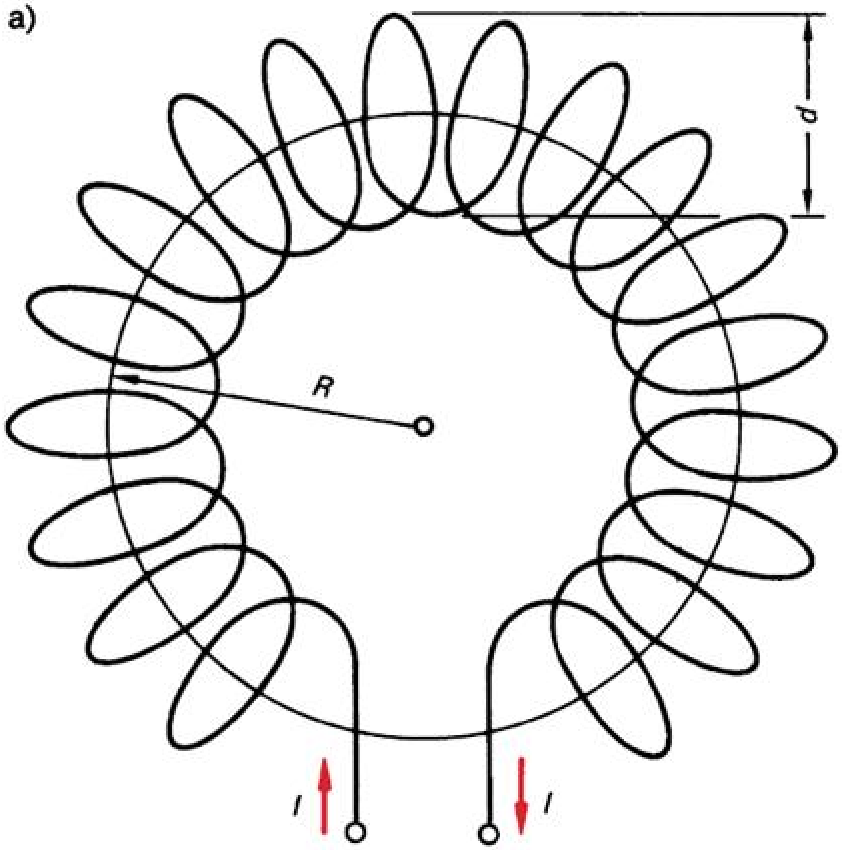


$$\vec{r} = s\cos(2\pi s)\hat{x} + s\sin(2\pi s)\hat{y} + \frac{s}{n}\hat{z}$$

$$s = [0,10]$$

Parameterdarstellung

$$\vec{r} = \cos(2\pi s)\left(R + r\cos(20\pi s)\right)\hat{x} + \sin(2\pi s)\left(R + r\cos(20\pi s)\right)\hat{y} + r\sin(20\pi s)\hat{z}$$



$$s = \left[0,1\right]$$

Ringspule

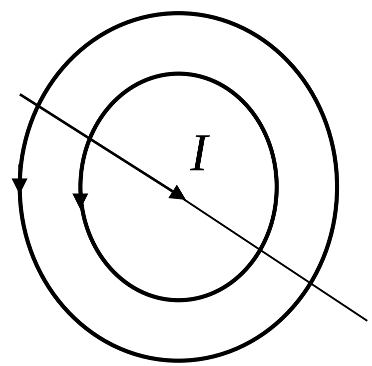
unendlich langen geraden Leiter

Ampèresches Gesetz
(integrale Form)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (4.171)$$

$$2\pi R \left| \vec{B} \right| = \mu_0 I$$

$$\left| \vec{B} \right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \qquad (4.173)$$



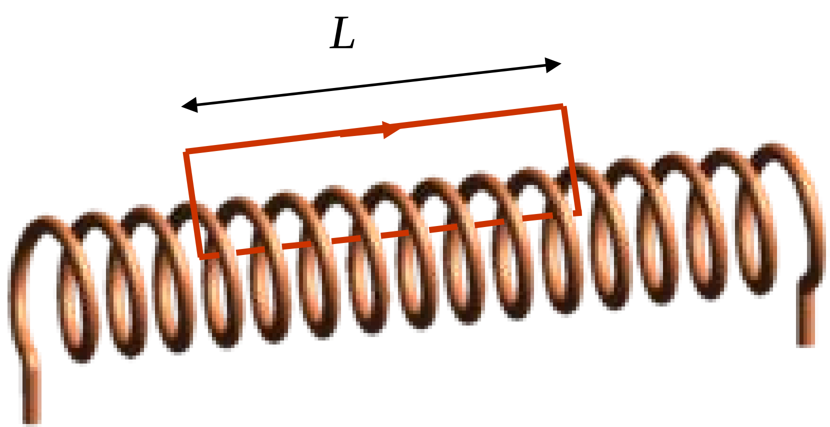
Rechte-Hand-Regel

unendlich langen Zylinderspule

Ampèresches Gesetz
(integrale Form)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (4.171)$$

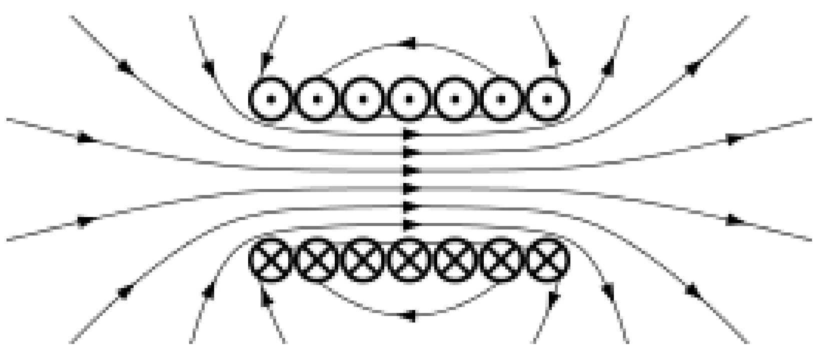
http://en.wikipedia.org/wiki/Solenoid



$$L\left|\vec{B}\right| = \mu_0 N I$$

$$\left|\vec{B}\right| = \mu_0 n I \qquad (4.174)$$

Windungen/meter



Rechte-Hand-Regel

Lorentzkraft

Ein langer gerader Draht liegt entlang der x-Achse eines Koordinatensystems. Durch diesen Draht fließt ein elektrischer Strom 76 mA in die positive x-Richtung. Ein Elektron fliegt über den Draht. Das Elektron hat die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = -219\hat{x} - 262\hat{y} \text{ [m/s]}.$$

als es an der Position

$$\vec{r} = 0\hat{x} + 0\hat{y} + 0.01\hat{z} \text{ [m]}$$

ist.

Wie groß ist die Lorentzkraft des magnetischen Feldes auf das Elektron?

$$\vec{F} = \_\_\_\_ \hat{x} + \_\_\_\_ \hat{y} + \_\_\_\_ \hat{z} \text{ [N]}$$

Lösung

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

Schraubenförmige Bewegung eines geladenen Teilchens in einem konstanten magnetischen Feld

Ein Elektron (Ladung $-e$) gerät in eine Region konstanten magnetischen Feldes mit $B = 5\ \hat{z}$ [T]. Die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons ist

$$\vec{v} = 18736\hat{x} + 12175\hat{y} + 5643\hat{z}\ \text{[m/s]}.$$

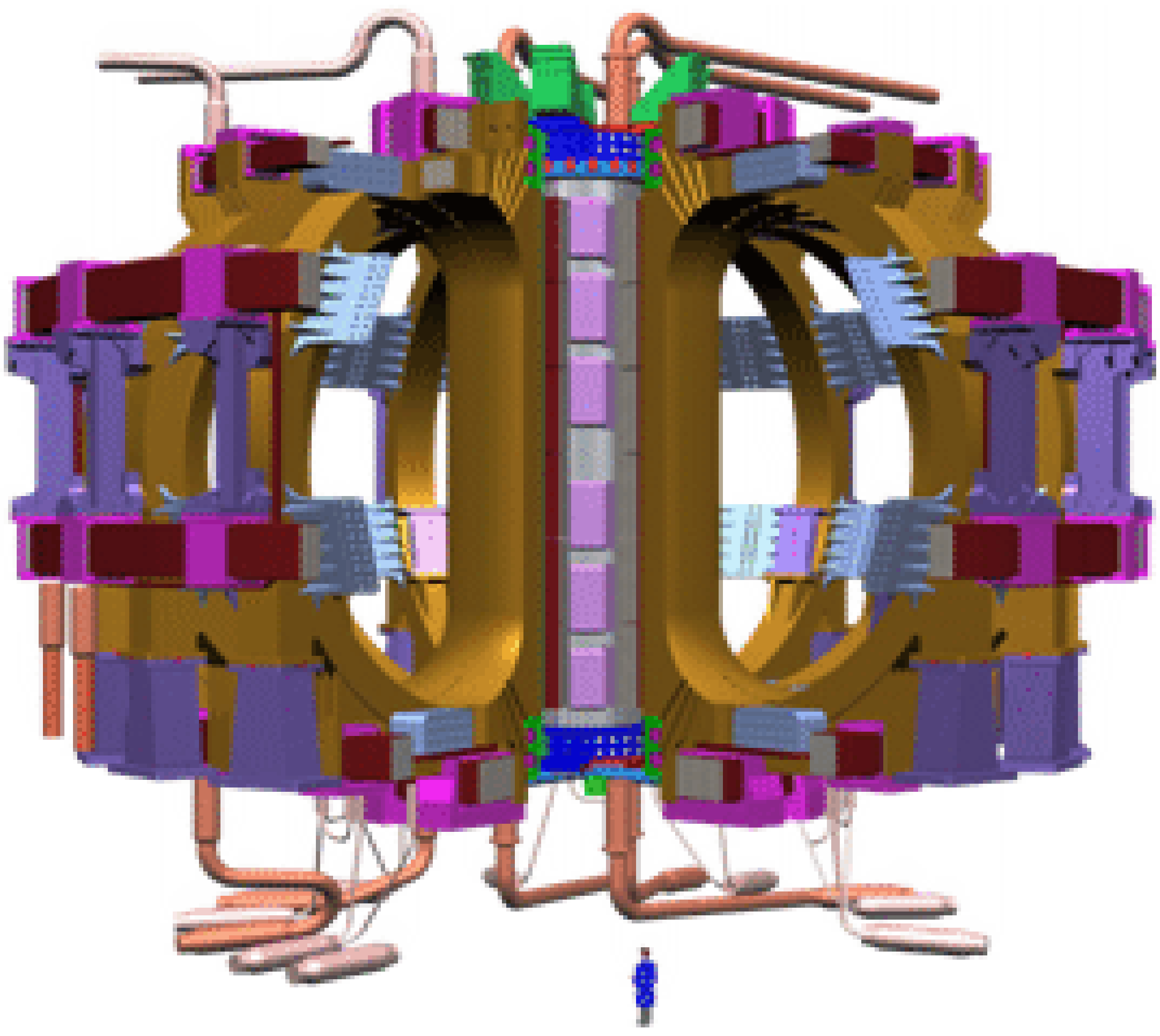
Das Elektron beschreibt ein Spirale um die z −Achse. Entlang der z −Achse gesehen, entspricht der Pfad des Elektrons einem Kreis. Wie groß ist der Radius des Kreises?

$R =$ ______ [m]

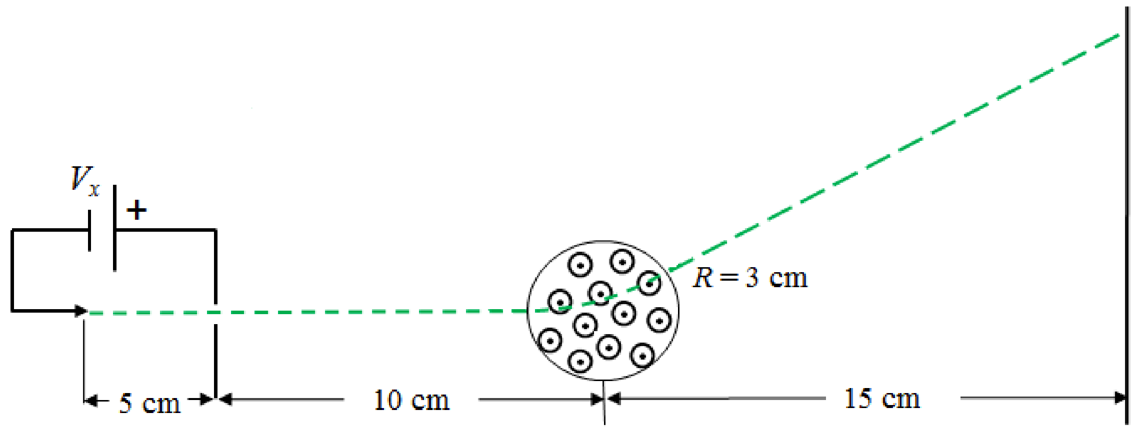
Lösung

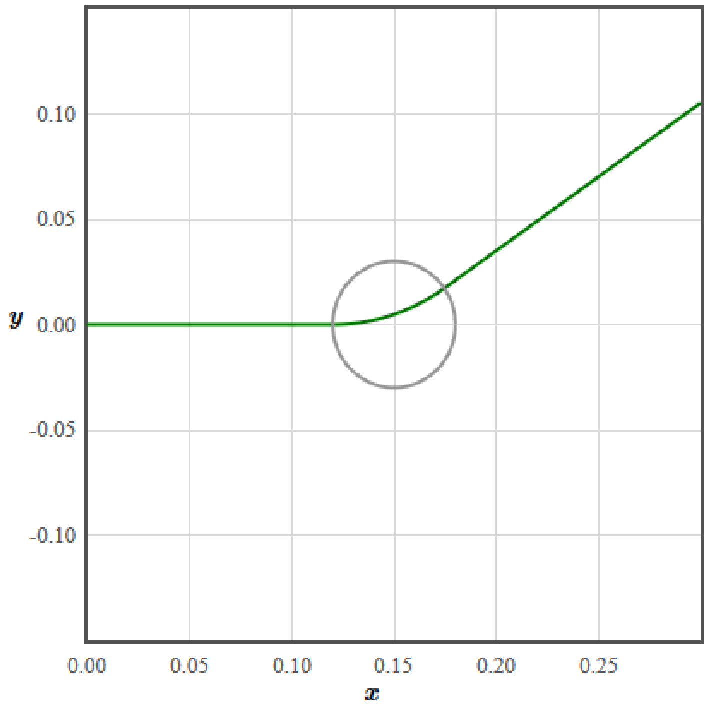
$$ev_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{R}$$

ITER



Ablenkung durch Magnetfeld





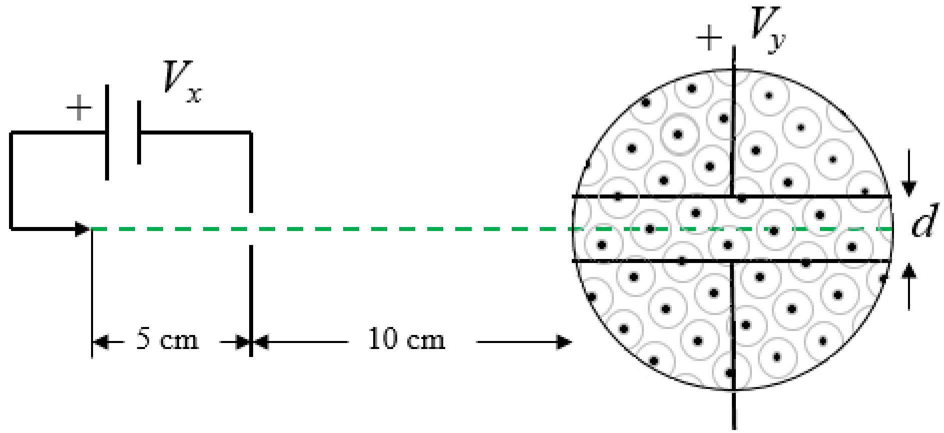
$V_x = 5000$ [V] - +

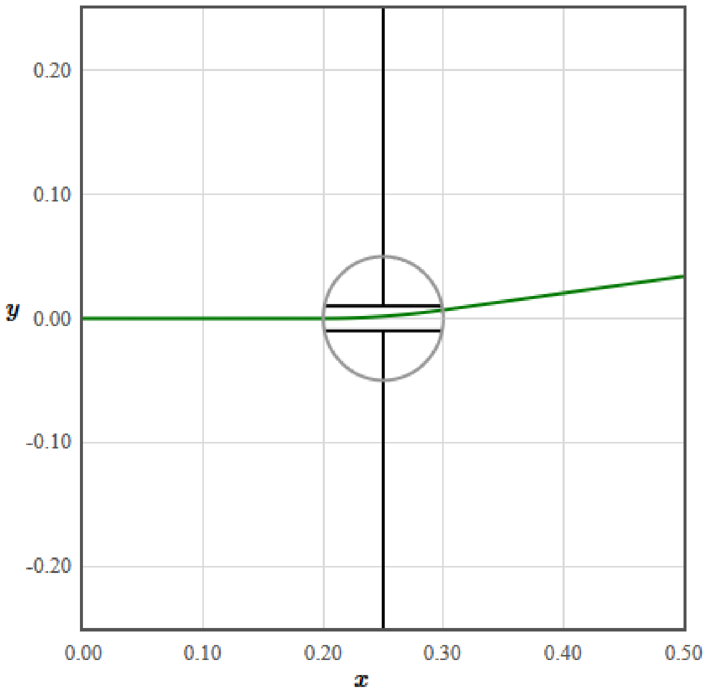
$I = 1$ [A] - +

$n = 2000$ [turns/m] - +

$B = 0.00251$ T

J. J. Thomson Experiment





$V_x = 5000$ [V] - +

$Vy = 60$ [V] - +

$I = 0.1$ [A] - +

$n = 2000$ [turns/m] - +

$B = 0.00025133$ T

$y = 0.041513$ m

$$\frac{V_y^2}{2V_x\mu_0^2 n^2 I^2 d^2} = 1.4248\text{e+}10 \text{ C/kg}$$

Try to minimize the y-value after the electrons have passed through the region with the fields. The accepted value of $\frac{e}{m}$ is 1.7588×10^{11} C/kg. The numerical integration is not perfect.

Lorentz Kraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$\vec{E} = 0:$ $$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{v}_i \times \vec{B}$$

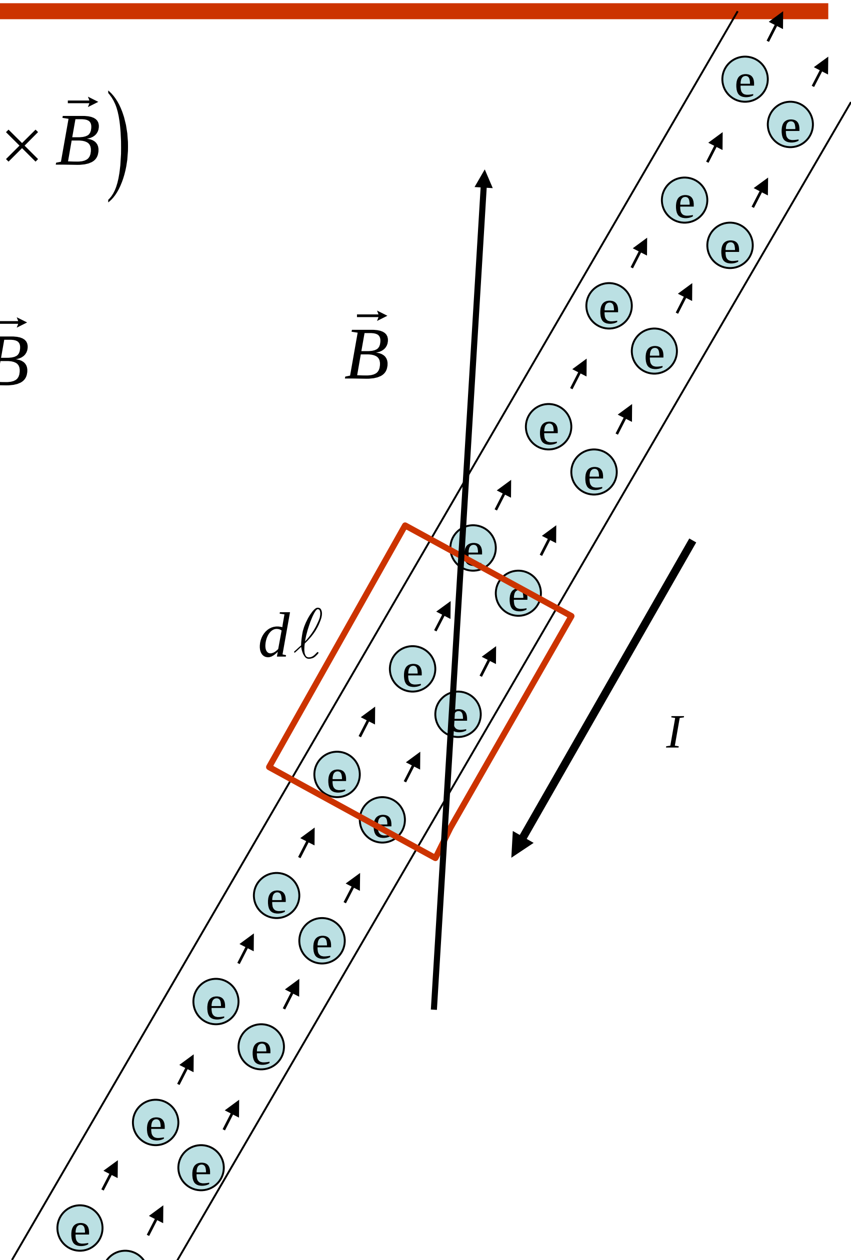
$$\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$$

$$I = \frac{Nqv}{d\ell}$$

$$d\vec{F} = I(d\vec{\ell} \times \vec{B}) \qquad (4.193)$$

$$\boxed{\vec{F} = I\ \vec{r} \times \vec{B}}$$

gerade Draht und konstant Magnetfeld



Die Kraft auf einen Draht im magnetischen Feld

Das Segment eines Drahtes ersteckt sich von Koordinatenursprung ($\vec{r} = 0$) bis

$$\vec{r} = 5\hat{x} - 3\hat{y} + 3\hat{z} \quad [\text{cm}].$$

Ein Strom fließt vom Urspung ausgehend durch den Draht und hat die Stärke $I = 4$ mA. Dieses Drahtsegment befindet sich in einem konstanten magnetischen Feld:

$$\vec{B} = -5\hat{x} + 2\hat{y} - 5\hat{z} \quad [\text{T}].$$

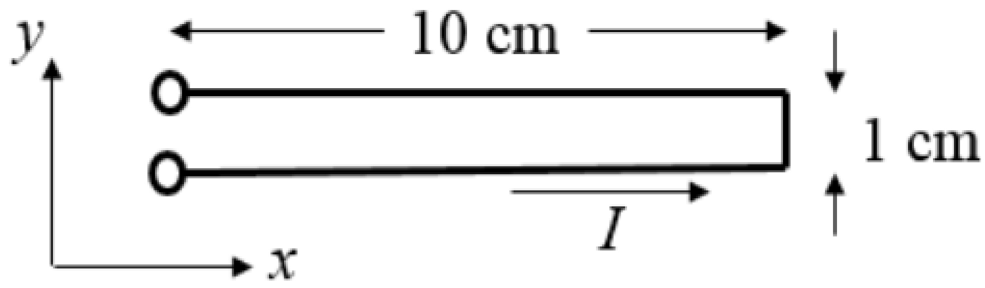
Wie groß ist die Kraft auf das Segment?

$\vec{F} =$ ____ $\hat{x} +$ ____ $\hat{y} +$ ____ $\hat{z}$ [N] Lösung

$$\vec{F} = I(\vec{r} \times \vec{B})$$

U-förmiges Drahtsegment

Ein Strom von $I = 4$ [A] fließt durch eine U-förmiges Drahtsegment. Die Stromrichung ist in der Abbildung dargestellt.



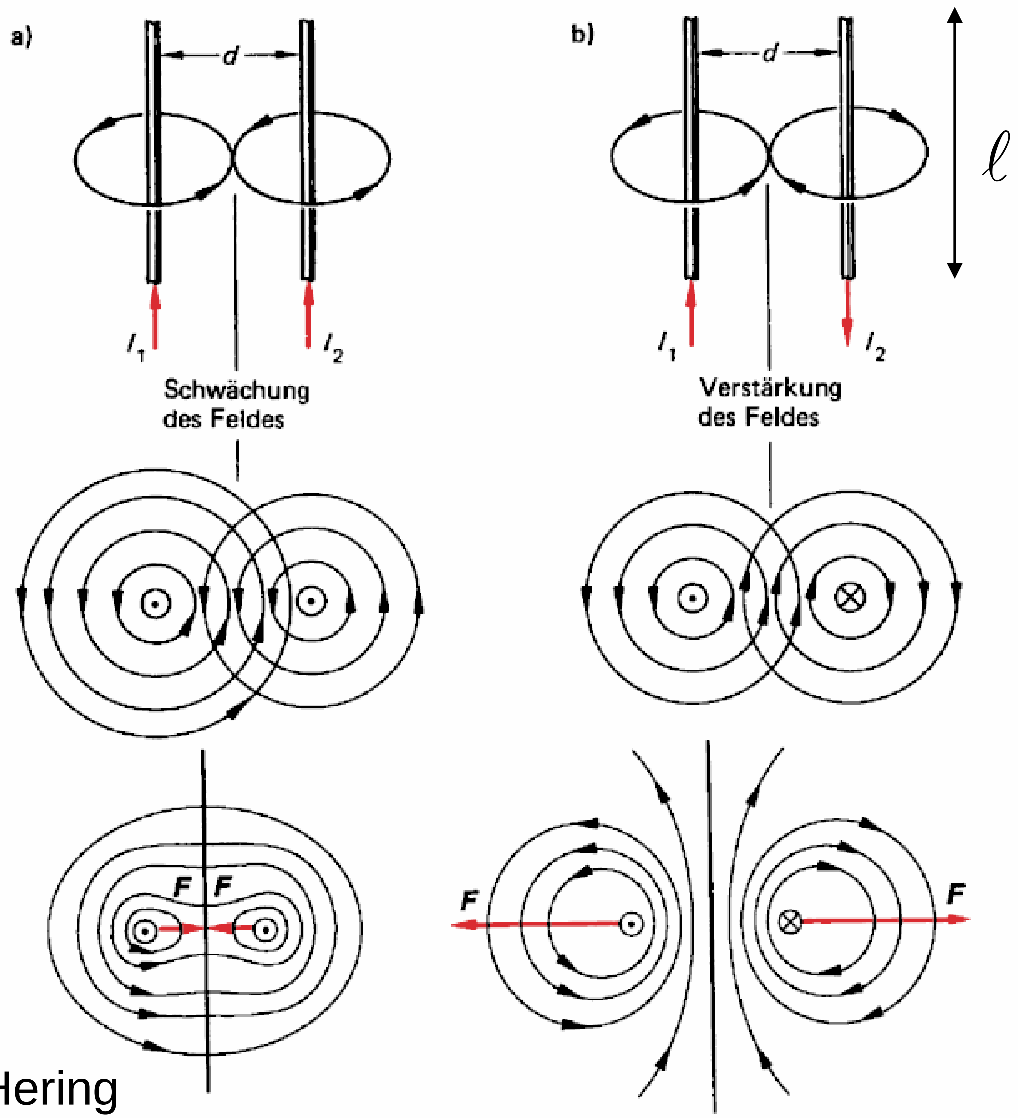
Dieses Drahtsegment befindet sich in einem konstanten magnetischen Feld:

$$\vec{B} = 7\hat{x} \quad [\mathrm{T}]$$

Wie groß ist die Kraft auf das Segment?

$\vec{F} =$ ____ $\hat{x} +$ ____ $\hat{y} +$ ____ $\hat{z}$ [N] Lösung

Kraft zwichen zwei Leitern



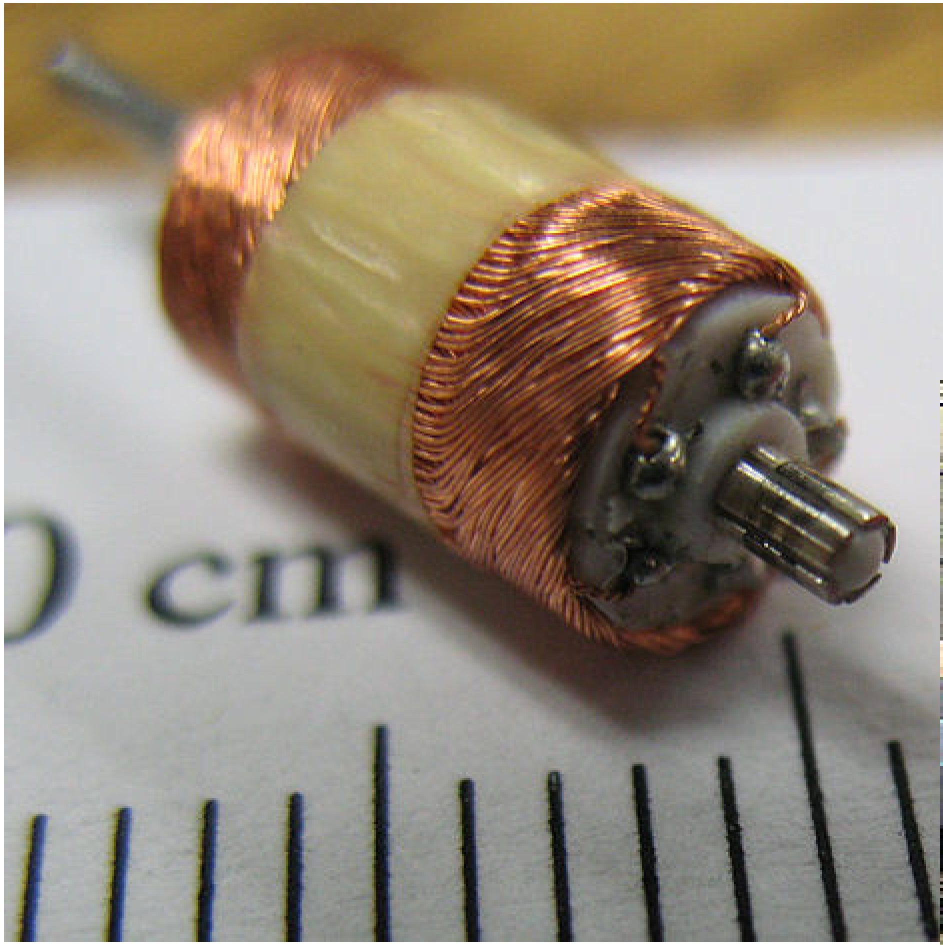
Hering

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

$$\vec{F} = I \; \vec{r} \times \vec{B}$$

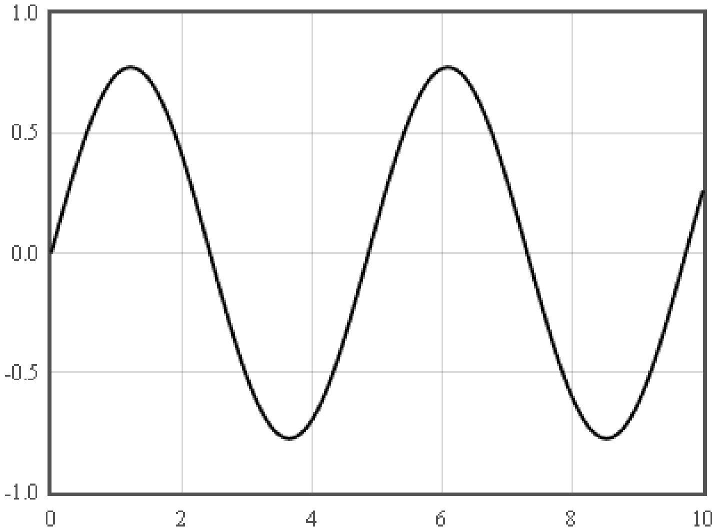
$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi d}$$

Elektromotor



Harmonische Schwingung

$$f = \frac{1}{T}$$



t

sinusförmig = harmonisch

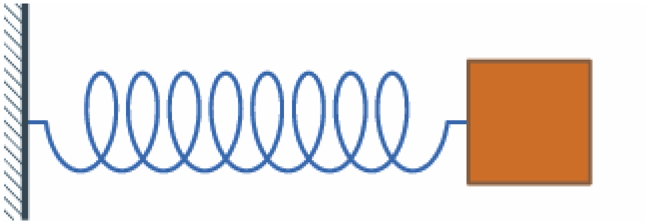
$$\sin\left(\omega t + \theta\right)$$

Radiant

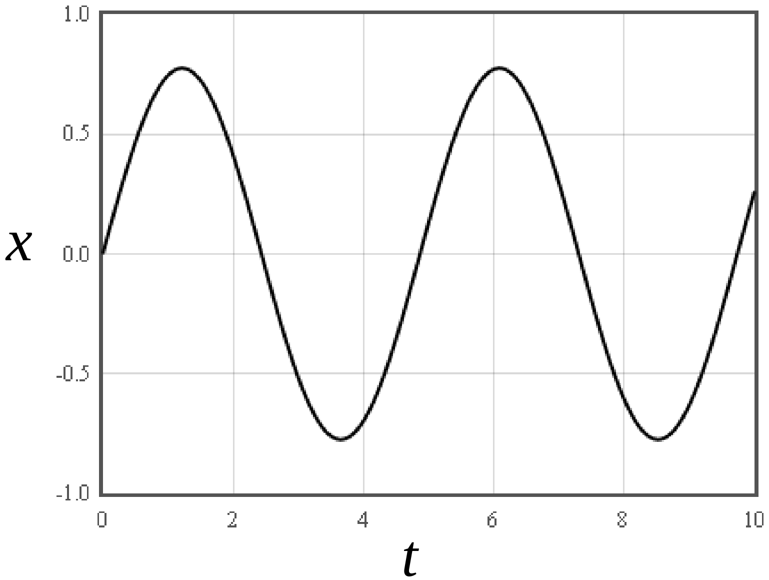
Kreisfrequenz $$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$ rad/s

Freie Schwingung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$



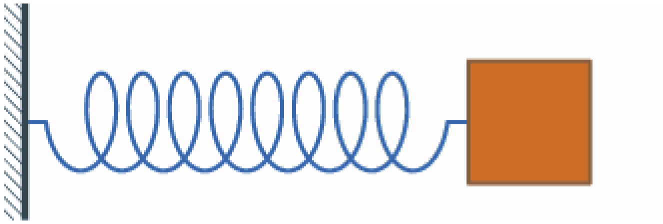
Lösung: $x(t) = C_1 \sin\left(\omega_0 t\right) + C_2 \cos\left(\omega_0 t\right)$



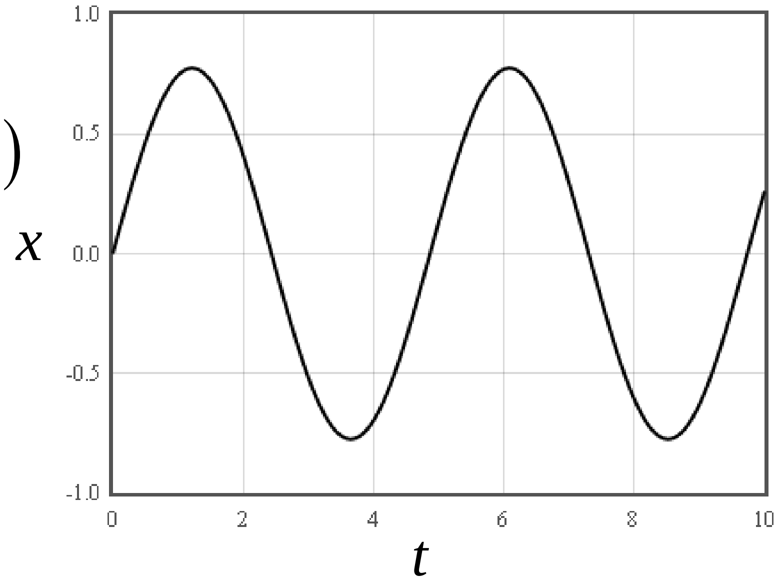
$$\omega_0 = ?$$

Freie Schwingung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$



$$x(t) = C_1 \sin\left(\omega_0 t\right) + C_2 \cos\left(\omega_0 t\right)$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 C_1 A \sin\left(\omega_0 t\right) - \omega_0^2 C_2 A \cos\left(\omega_0 t\right)$$

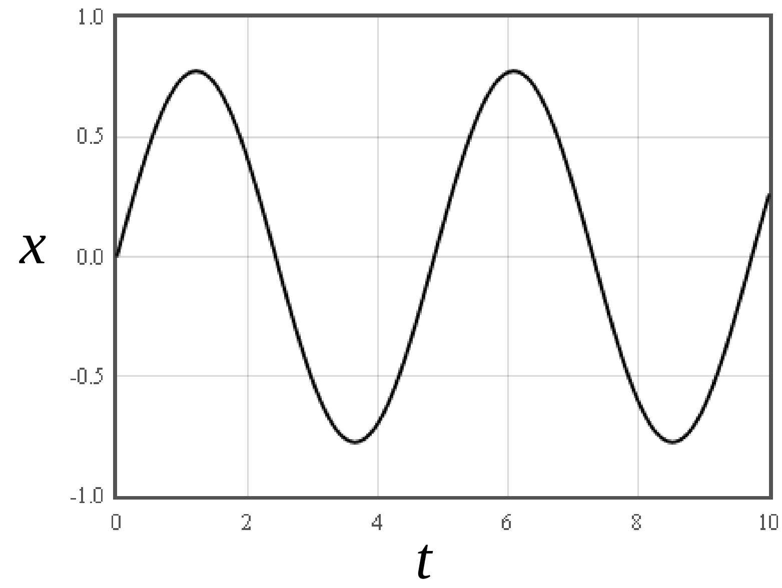
$$m\omega_0^2 = k$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Anfangsbedingungen

$$x(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 C_1 \cos(\omega_0 t) - \omega_0 C_2 \sin(\omega_0 t)$$



$$x(t=0) = 0 = C_2$$

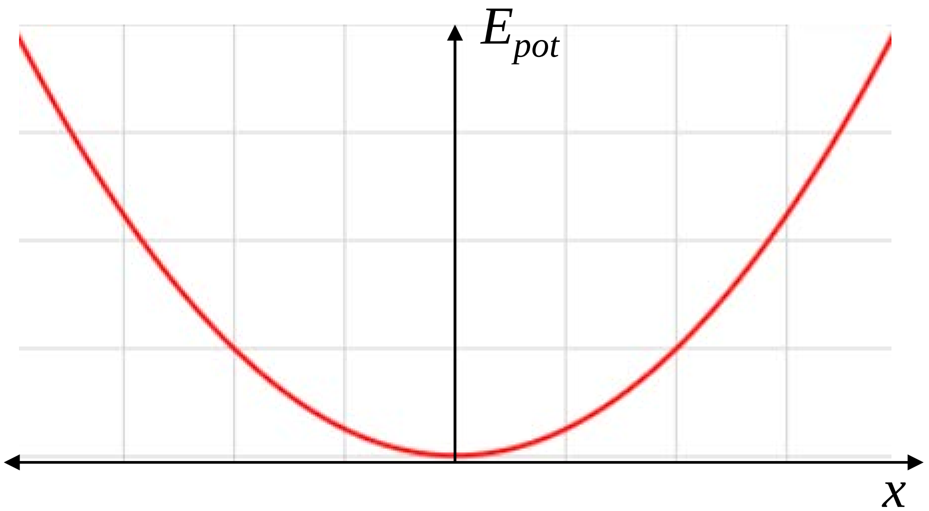
$$C_2 = 0$$

$$\frac{dx}{dt}(t=0) = 1 = \omega_0 C_1$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0}$$

andere Schwingungssysteme

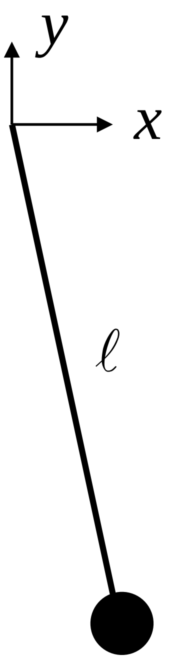
E_{pot} hat ein Minimum bei dem Gleichgewichtspunkt



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Pendel

$$x^2 + y^2 = \ell^2$$



$$E_{pot} = -mgy = -mg\sqrt{\ell^2 - x^2}$$

$$F_x = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{mg(-2x)}{\sqrt{\ell^2 - x^2}}$$

für $\quad x \ll y \approx \ell$

$$F_x \approx -\frac{mgx}{\ell}$$

Pendel

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\frac{mg}{\ell}x$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$