Mechanik

Arbeit

mechanische Arbeit

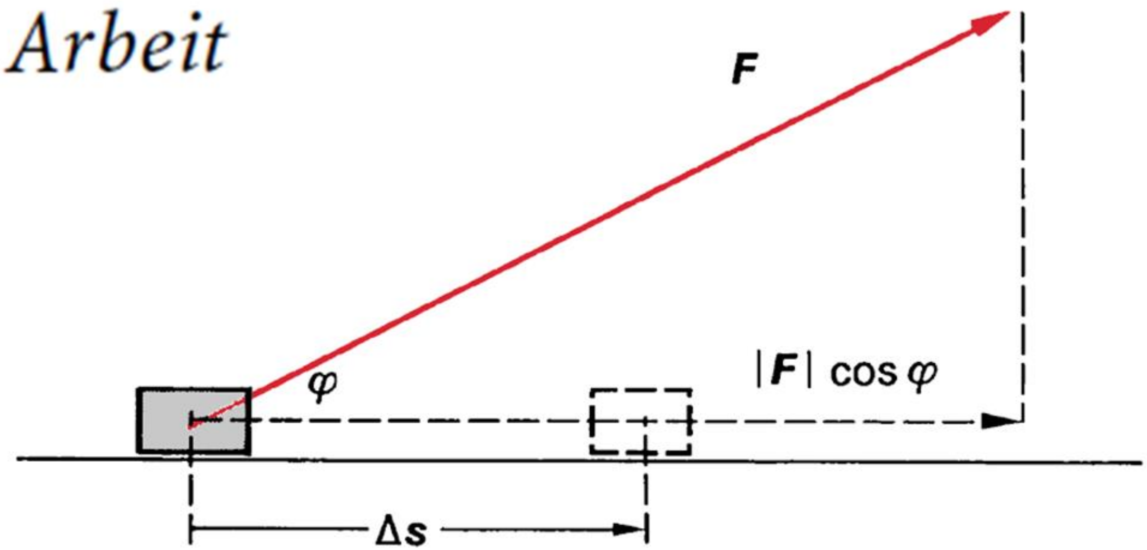


Abb. 2.31 Zur Definition der Arbeit

$$\Delta W = |\boldsymbol{F}|\,|\Delta \boldsymbol{s}| \cos(\boldsymbol{F}, \Delta \boldsymbol{s}) \qquad (2.64)$$

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \qquad (2.65)$$

Nach der Definitionsgleichung (2.64) ist die Maßeinheit der Arbeit 1 Nm = 1 J (Joule).

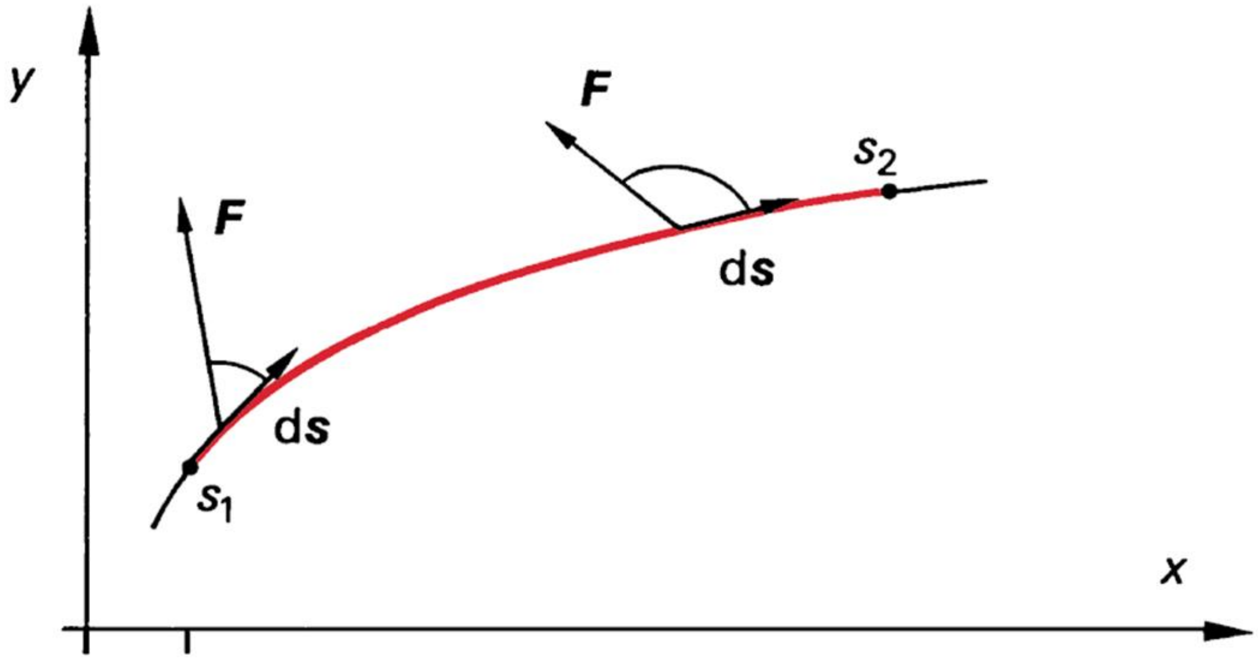


Abb. 2.32 Arbeit einer ortsabhängigen Kraft $\boldsymbol{F}(x, y)$ längs des Wegs von $\boldsymbol{s}_1(x_1, y_1)$ nach $\boldsymbol{s}_2(x_2, y_2)$

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}W = \int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \,. \qquad (2.66)$$

Beschleunigungsarbeit gegen die Trägheitskraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ der beschleunigten Masse (2.33):

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} -\left(-m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right) \cdot (\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}t) = \int_{v_1(s_1)}^{v_2(s_2)} m(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}) \ .$$

Die Integration zeigt, dass die Beschleunigungsarbeit nur von der Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten abhängt:

$$W_{12} = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) \ . \qquad (2.67)$$

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{t} = -m\boldsymbol{a}_\mathrm{S} \ . \qquad (2.33)$$

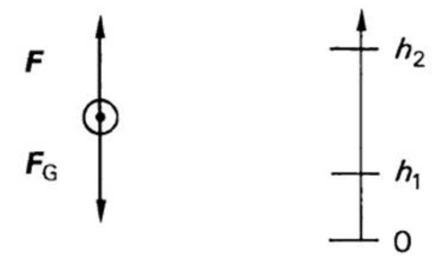
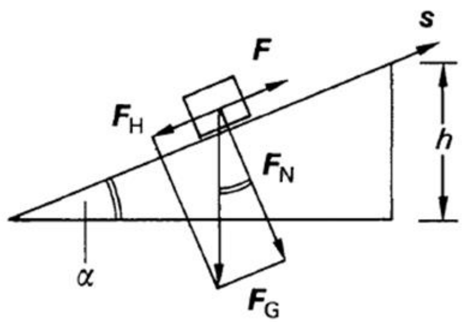
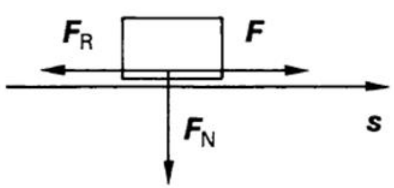
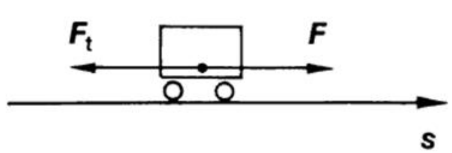
	Geometrie	erforderliche konstante Kraft	Weg	verrichtete Arbeit
Hubarbeit gegen Gewichtskraft F_G		$F = m\,g$	$s = h_2 - h_1 = h$	$W_{12} = m\,g\,h$ nur abhängig von der Höhendifferenz
Arbeit auf reibungsfreier schiefer Ebene gegen Hangabtriebskraft F_H		$F = m\,g \sin\alpha$	$s = \dfrac{h}{\sin\alpha}$	$W_{12} = m\,g\,h$ nur abhängig von der Höhendifferenz
Festkörperreibungsarbeit gegen Reibungskraft F_R		$F = \mu\,F_N$ $= \mu\,m\,g$	$s = s_2 - s_1$	$W_{12} = \mu\,m\,g\,s$ Reibungszahl μ auf Weg konstant
Beschleunigungsarbeit ohne Reibung gegen Trägheitskraft F_t		$F = m\,a$	$s = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2\,a}$	$W_{12} = \frac{1}{2}\,m\,(v_2^2 - v_1^2)$ nur abhängig von Anfangs- und Endgeschwindigkeit

Abb. 2.33 Arbeit gegen ortsunabhängige Kräfte

Beispiel

2.6-1 Wie groß ist der Arbeitsaufwand beim Dehnen oder Stauchen einer idealen Feder?

Lösung

Nach (2.32) gilt als lineares Kraftgesetz für die Federauslenkung $\boldsymbol{F}_{\text{rück}} = -k\boldsymbol{x}$. Beim Stauchen oder Dehnen hält die Kraft $\boldsymbol{F}$ der rücktreibenden Systemkraft zu jedem Zeitpunkt das Gleichgewicht: $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}_{\text{rück}}$. Die aufzuwendende Arbeit W_{12} beim Dehnen von x_1 auf x_2 ist

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{x_1}^{x_2} (-)(-k\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}x \,.$$

$\boldsymbol{x}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ sind parallel gerichtet, daher ergibt sich

$$W_{12} = \frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right) \,. \qquad (2.68)$$

Die aufzuwendende *Verformungsarbeit* nimmt quadratisch mit der Auslenkung zu.

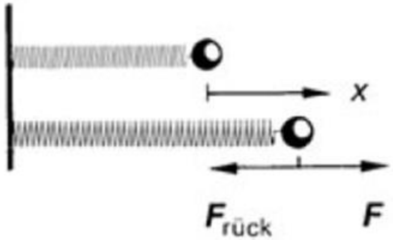
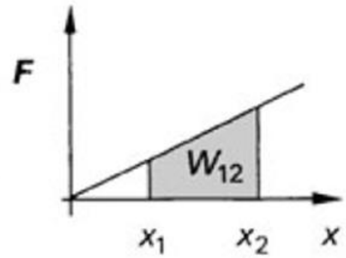
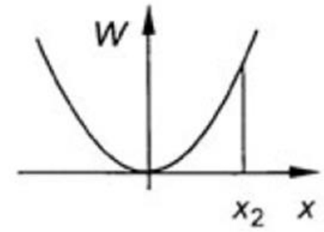
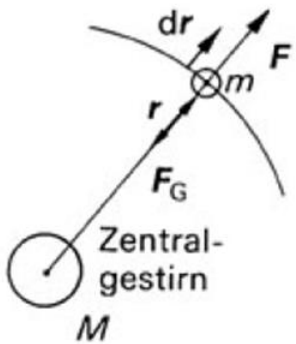
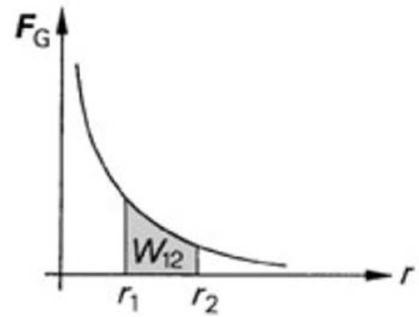
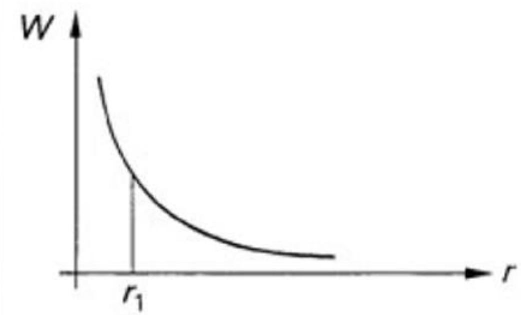
	System	Kraftgesetz	Arbeit
Verformungs-arbeit	Feder-Masse-System 	$F_{rück} = -k\,x$ 	$W_{12} = \frac{1}{2}\,k\,(x_2^2 - x_1^2)$ normiert: $W = 0$ für $x_1 = 0$ 
Hubarbeit gegen die Gravitations-kraft	Zentralgestirn und Satellit 	$F_G = -G\,\frac{m\,M}{r^2}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 	$W_{12} = G\,M\,m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ normiert: $W = 0$ für $r_2 \to \infty$ 

Abb. 2.34 Arbeit gegen ortsabhängige Kräfte

Gravitationskonstante	G	$6{,}67384 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$

Leistung

Das Maß dafür, in welcher Zeitspanne eine Arbeit verrichtet wird, ist die *Leistung*

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \,. \qquad (2.69)$$

Die Maßeinheit der Leistung ist $1\,\mathrm{N\,m\,s^{-1}} = 1\,\mathrm{J\,s^{-1}} = 1\,\mathrm{W}$ (Watt).

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \,. \tag{2.65}$$

Die *Momentanleistung* P ergibt sich mit (2.65) zu

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v} \,. \tag{2.70}$$

Aus der über die Gesamtzeit t_g verrichteten Gesamtarbeit W_g errechnet sich die *mittlere Leistung*

$$P_m = \frac{W_g}{t_g} \,. \tag{2.71}$$

Die abgegebene effektive Leistung P_{eff} eines Antriebs oder mechanischen Wandlers ist wegen der Reibungsverluste P_{V} kleiner als die zugeführte Nennleistung P_{N}. Das Kennzeichen für die Effektivität der Leistungswandler ist der *Wirkungsgrad*

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{eff}}}{P_{\mathrm{N}}} = 1 - \frac{P_{\mathrm{V}}}{P_{\mathrm{N}}} \,. \tag{2.72}$$

Der Wirkungsgrad ist dimensionslos, der Wertebereich liegt zwischen $0 \leqq \eta \leqq 1$.

- Effektivität beschreibt den Grad der Zielerreichung (Wirksamkeit, Qualität der Zielerreichung)

- Effizienz ist ein Maß für die Wirtschaftlichkeit (Kosten-Nutzen-Aufwand Relation, Energie-Effizienz)

Stimmen die Zeitintervalle der Leistungszufuhr und Leistungsabgabe nicht überein, beispielsweise bei dem langsamen Anheben eines Rammbärs mit anschließendem raschem Aufprall, dann wird der Wirkungsgrad über das Verhältnis von Nutzarbeit W_{ab} zur zugeführten Arbeit W_{zu} definiert:

$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \frac{\int_0^{t_1} P_{eff}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{t_2} P_N\,\mathrm{d}t}\,. \tag{2.73}$$

Werden mehrere Antriebe und Wandler hintereinandergeschaltet, dann ist der Gesamtwirkungsgrad der Anlage das Produkt aus den Einzelwirkungsgraden:

$$\eta_{\text{ges}} = \frac{W_{\text{ab},n}}{W_{\text{zu},1}} = \frac{W_{\text{ab},1}}{W_{\text{zu},1}} \cdot \frac{W_{\text{ab},2}}{W_{\text{ab},1}} \cdot \ldots \cdot \frac{W_{\text{ab},n}}{W_{\text{ab},n-1}} \qquad \text{oder}$$

$$\eta_{\text{ges}} = \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n \, . \tag{2.74}$$

Beispiel

2.6-2 Ein Förderkorb, dessen Masse einschließlich maximaler Nutzlast $m_1 = 1\,000$ kg beträgt und dessen Gegengewicht die Masse $m_2 = 450$ kg hat, fährt mit der Beschleunigung $a_1 = 1\ \mathrm{m/s^2}$ aufwärts, bis er die konstante Fördergeschwindigkeit $v_2 = 5$ m/s erreicht. Die gesamte Reibungskraft ist $F_R = 500$ N. Abbildung 2.35 verdeutlicht den Vorgang. Welche Spitzenleistung und welche Dauerleistung benötigt der Antrieb, wenn der Wirkungsgrad $\eta = 0{,}9$ beträgt?

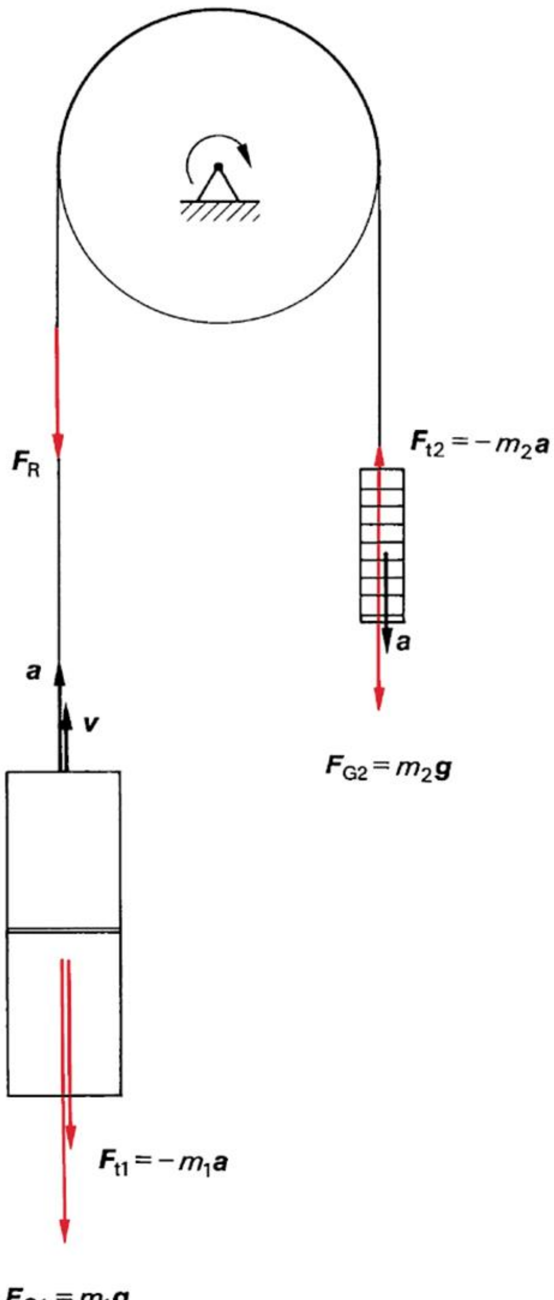


Abb. 2.35 Zu Beispiel 2.6-2

Lösung

Die Kraft F_1 an dem Umfang der Trommel während des Anfahrens ergibt sich aus

$$F_1 + m_2(g - a) = m_1(g + a) + F_R$$

zu

$$F_1 = m_1(g + a) - m_2(g - a) + F_R = 7\,450\ \mathrm{N}\,.$$

Im Bewegungsabschnitt mit konstanter Fördergeschwindigkeit ist

$$F_2 = (m_1 - m_2)g + F_R = 6\,000\ \mathrm{N}\,.$$

Die maximale Nennleistung während des Anfahrens beträgt

$$P_{N,\max} = \frac{F_1 v_2}{\eta} = 41{,}4\ \mathrm{kW}\,.$$

Die Dauer-Nennleistung bei der anschließenden gleichförmigen Bewegung des Förderkorbes ist

$$P_N = \frac{F_2 v_2}{\eta} = 33{,}3\ \mathrm{kW}\,.$$

Energie

Durch Zufuhr oder Abgabe von Arbeit wird die Energie eines Körpers oder die Gesamtenergie eines Systems materieller Punkte erhöht oder erniedrigt.

Die Energie wird in der gleichen Maßeinheit 1 J angegeben wie die Arbeit, durch die sie verändert wird. Es gilt also der *Energiesatz der Mechanik:*

$$\Delta E = E_{\text{nachher}} - E_{\text{vorher}} = \Delta W \; . \qquad (2.75)$$

Die Energieanteile eines Körpers werden durch die Arbeit, die sie erzeugt haben, beschrieben und ergeben wie diese additiv die Gesamtenergie. Die mechanische Energie eines Körpers ist

$$E = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} \; . \tag{2.76}$$

kinetische

Energie

Sie setzt sich zusammen aus der durch die Beschleunigungsarbeit W_B erzeugten kinetischen Energie

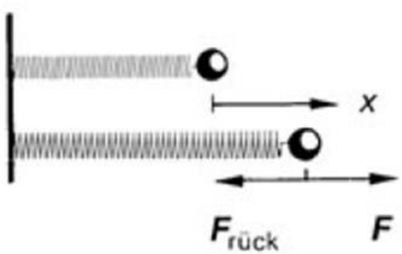
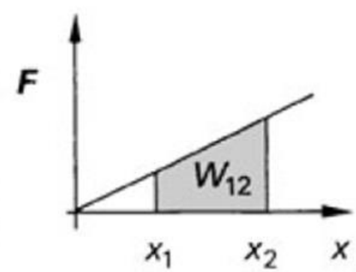
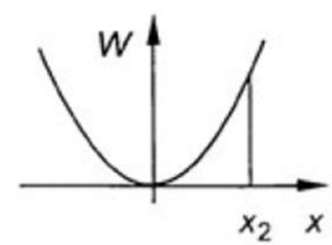
$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2.77)$$

potentielle

Energie

von der Verformungsarbeit W_V herrührende elastische Energie

$$E_{\text{elast}} = \frac{1}{2}ks^2 \qquad (2.78)$$

	System	Kraftgesetz	Arbeit
Verformungs-arbeit	Feder-Masse-System 	$F_{\text{rück}} = -k\,x$ 	$W_{12} = \frac{1}{2}\,k\,(x_2^2 - x_1^2)$ normiert: $W = 0$ für $x_1 = 0$ 

durch die Hubarbeit W_H erzeugte Lageenergie

$$E_{Lage} = mgh \; . \tag{2.79}$$

Die Energieanteile hängen betragsmäßig davon ab, wo das Bezugsniveau $h = 0$ und der Ausgangszustand $s = 0$ liegen und auf welches Koordinatensystem die Geschwindigkeit v bezogen ist.

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \; . \tag{2.76}$$

Energieerhaltung

„Energieumwandlung"

Die als Energie gespeicherte Arbeit muss nicht in der Arbeitsform abgegeben werden, in der sie aufgenommen wurde. Diese Abgabe ist auch in anderen Arbeitsformen möglich. Beim Bogenschießen wird beispielsweise die elastische Energie in Beschleunigungsarbeit des Pfeils und eventuell beim Schuss bergauf in Hubarbeit umgewandelt.

Erhaltung der Energie:

In einem abgeschlossenen System bleibt der Energieinhalt konstant. Energie kann weder vernichtet werden noch aus nichts entstehen; sie kann sich in verschiedene Formen umwandeln oder zwischen verschiedenen Teilen des Systems ausgetauscht werden.

Es gibt kein *Perpetuum mobile erster Art*; d. h., es ist unmöglich, eine Maschine zu bauen, die dauernd Arbeit verrichtet, ohne dass ihr von außen ein entsprechender Energiebetrag zugeführt wird (Abschn. 3.3.2).

3.3.2 Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Der Energieerhaltungssatz ist nicht beweisbar; er fasst die jahrhundertelangen Erfahrungen mit Energieumwandlungsexperimenten zusammen. In seiner allgemeinen Form beinhaltet er außer den mechanischen Energieformen der kinetischen und der potentiellen Energie auch thermische Energien, chemische Energien, elektrische und magnetische Feldenergien.

Bleiben in Systemen die nichtmechanischen Energien der Körper konstant, ist also in idealisierten mechanischen Systemen die Reibungsarbeit vernachlässigbar, dann gilt für die kinetische Energie und die potentielle Energie des Systems materieller Punkte der *Energieerhaltungssatz der Mechanik*

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konstant} \,. \tag{2.80}$$