

# Fähigkeiten

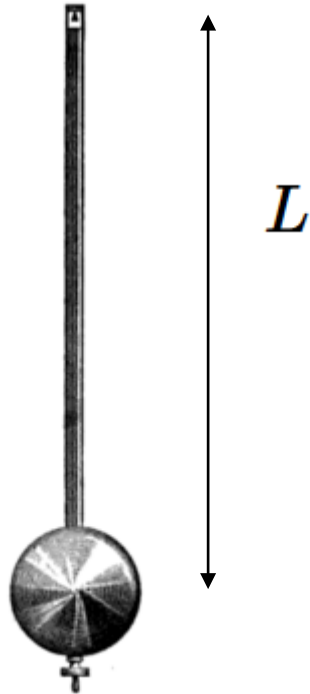
---

## Einheiten

- Sie müssen in der Lage sein, Einheiten passend umzuwandeln. Zum Beispiel müssen Sie es beherrschen [km/h] in [m/s] umzuwandeln.
- Dimensionsanalyse: Sei  $m$  [kg] die Masse,  $L$  [m] die Länge,  $t$  [s] die Zeit und  $F$  [N] die Kraft. Gefragt ist die Geschwindigkeit. Die Ausdrücke  $3L/t$  und  $\pi \frac{Ft}{m}$  könnten korrekt sein, da sie die Einheit [m/s] haben. Die Ausdrücke  $3Lt$  und  $\pi \frac{F}{m}$  müssen falsch sein, da sie nicht die Einheit [m/s] haben. Beim Ableiten eines Ausdrucks sollten Sie also immer auf die Einheiten achten. Sind die Einheiten falsch, haben Sie einen Fehler gemacht.

# Datenanalyse

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$



$L$ [m]	$T$ [s]
0.2121	0.9252
0.2987	1.096
0.3384	1.167
0.3321	1.159
0.2889	1.080
0.4063	1.278
0.3329	1.152
0.2821	1.068
0.3635	1.209
0.3987	1.267
0.2896	1.076

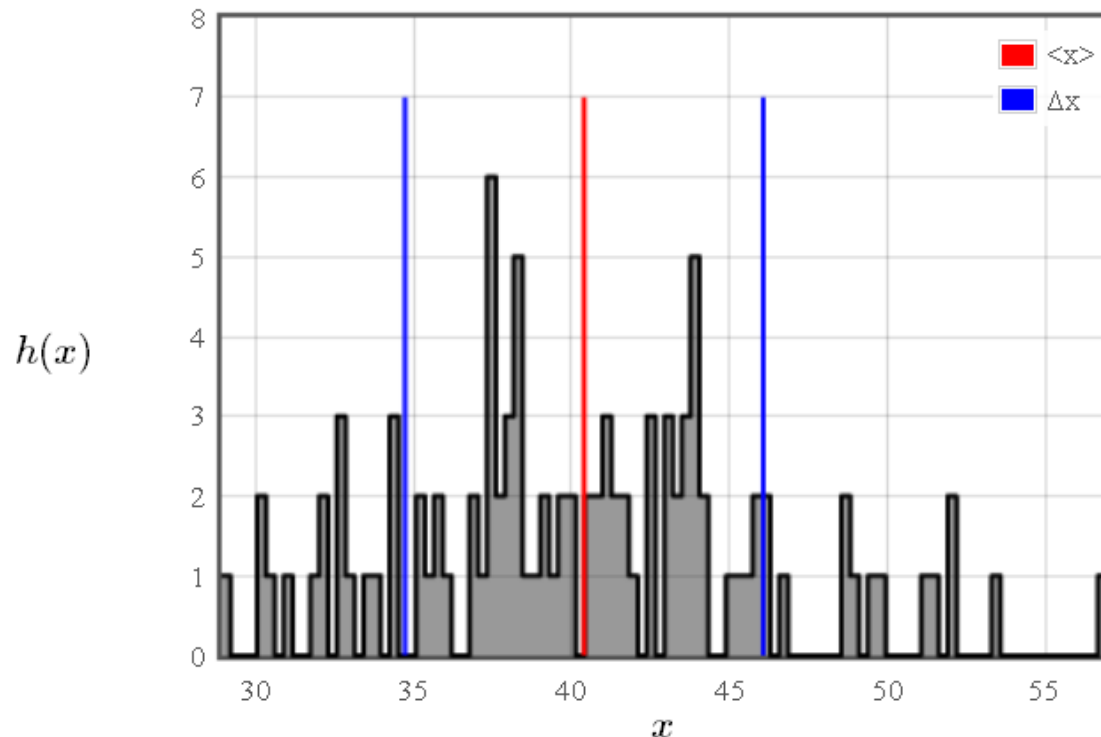
# Mittelwert und Standardabweichung

Der Mittelwert von  $N$  Datenpunkten ist

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Die Standardabweichung  $\Delta x$  ist die Quadratwurzel des Mittelwertes der Quadrate  $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum x_i^2$  minus des Quadrates des Mittelwertes  $\langle x \rangle^2 = \left( \frac{1}{N} \sum x_i \right)^2$ .

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}.$$



# Fähigkeiten

---

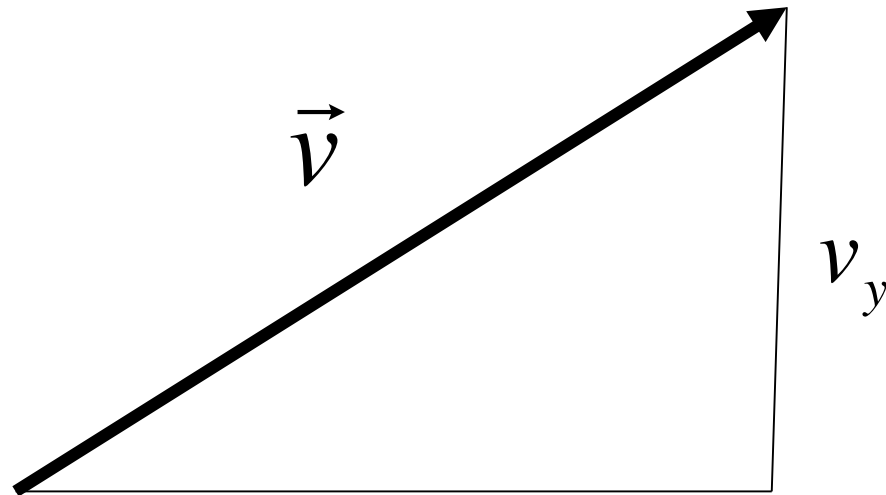
## Arbeiten mit Daten

Manchmal erhält man Daten in Form von Textspalten. Sie sollten in der Lage sein:

- Erwartungswert und Standardabweichung jeder Spalte zu berechnen;
- alle Werte einer Spalte mit einem Wert zu multiplizieren (z.B. könnte eine Spalte die Beschleunigung eines Teilchens zu verschiedenen Zeiten repräsentieren. Multipliziert mit der Masse liefert das die jeweilige Kraft);

# Vektoren

Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung sind Vektoren



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$v_x$

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y + v_z \hat{e}_z$$

Hering  $\rightarrow \mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$

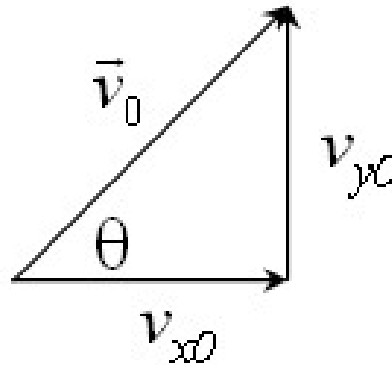
# Vektor zerlegen

---

## Eine Kugel wird in einem Winkel $\theta$ geworfen

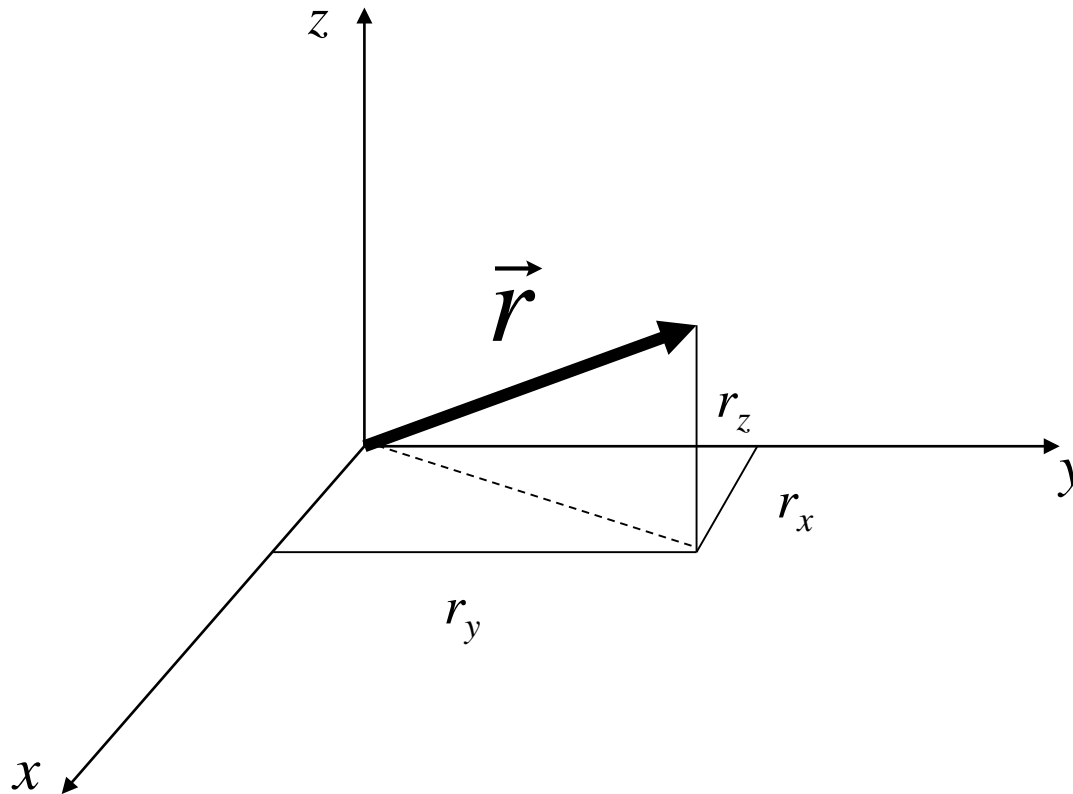
Eine Kugel der Masse  $m = 522$  g wird mit einem Winkel  $\theta = 24^\circ$  zur Horizontalen geworfen. Die Kugel besitzt an  $t = 0$  eine Anfangsgeschwindigkeit von  $|\vec{v}_0| = 1$  m/s. Wie lauten die  $x$ - und  $y$ -Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit?

$$\vec{v}_0 = \text{[ ]} \hat{x} + \text{[ ]} \hat{y} \text{ [m/s]} \quad \text{Lösen}$$



# Länge von Vektor $\vec{r}$

---

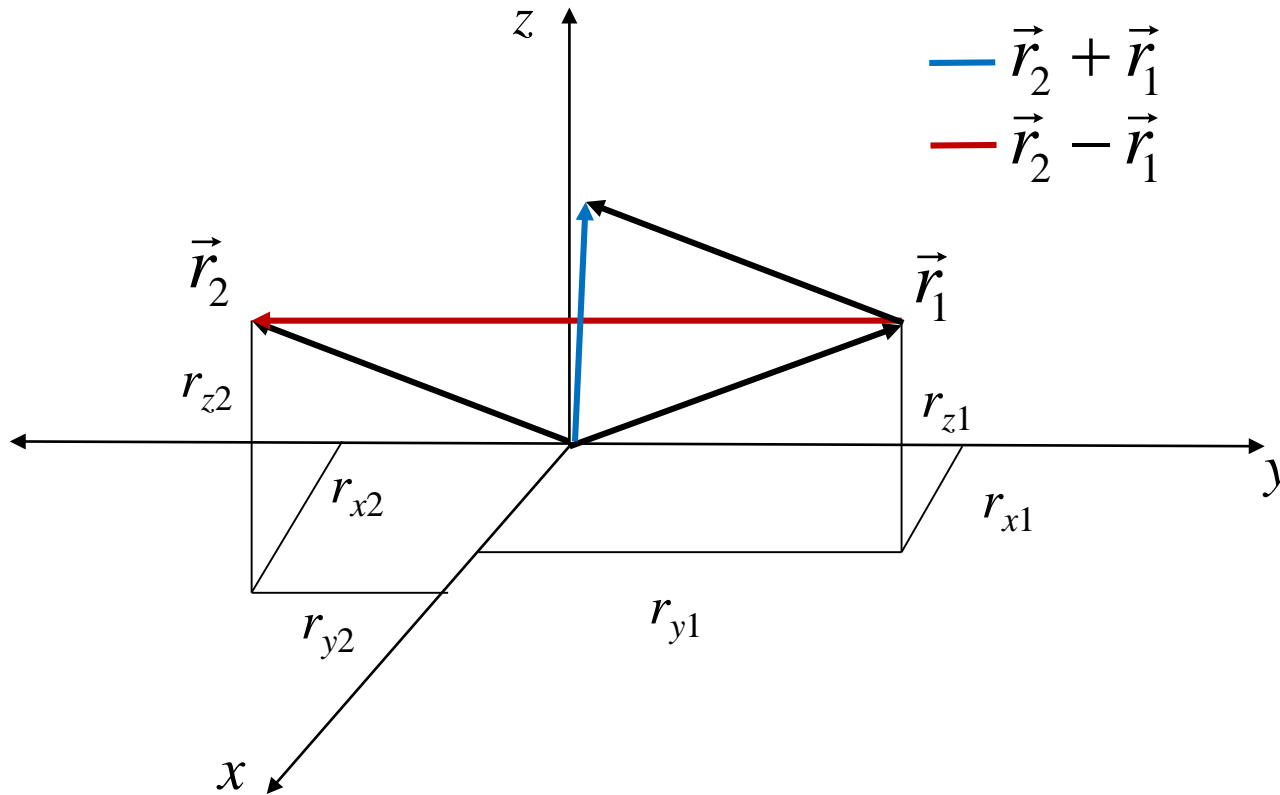


$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

Pythagoras

# Vektoraddition

---



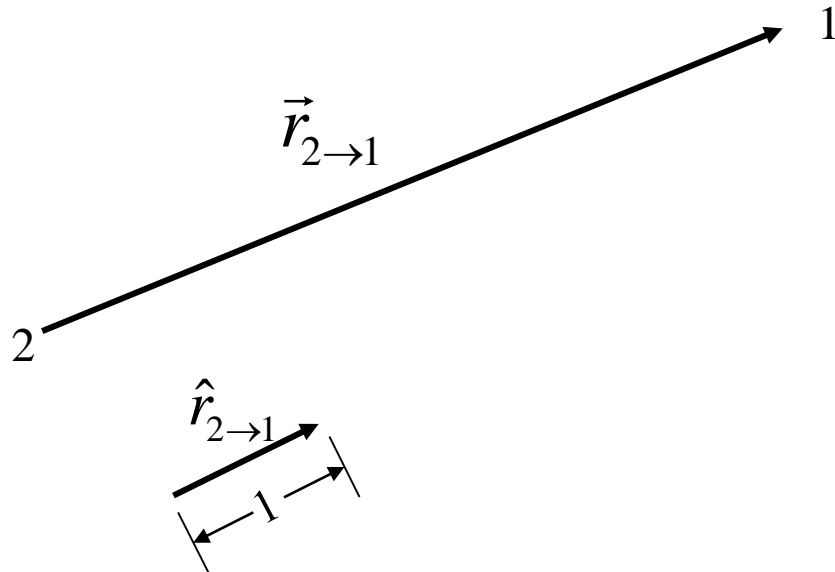
$$\vec{r}_2 + \vec{r}_1 = (r_{x2} + r_{x1})\hat{x} + (r_{y2} + r_{y1})\hat{y} + (r_{z2} + r_{z1})\hat{z}$$

$$\vec{r}_{1 \rightarrow 2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (r_{x2} - r_{x1})\hat{x} + (r_{y2} - r_{y1})\hat{y} + (r_{z2} - r_{z1})\hat{z}$$



# Einheitsvektor $\hat{r}_{2 \rightarrow 1}$

---



$$\hat{r}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\vec{r}_{2 \rightarrow 1}}{|\vec{r}_{2 \rightarrow 1}|} = \frac{(r_{1x} - r_{2x}) \hat{x} + (r_{1y} - r_{2y}) \hat{y} + (r_{1z} - r_{2z}) \hat{z}}{\sqrt{(r_{1x} - r_{2x})^2 + (r_{1y} - r_{2y})^2 + (r_{1z} - r_{2z})^2}}$$

Lehrplan

Bücher

Formel  
Sammlung

Fähigkeiten

Apps

Testfragen

Vorlesungen

## Einheitsvektoren

Wie lautet der Einheitsvektor, welcher von dieser Position

$$\vec{r}_1 = -2\hat{x} + 2\hat{y} + 5\hat{z} \quad [\text{m}],$$

zu dieser Position zeigt:

$$\vec{r}_2 = 2\hat{x} + 4\hat{y} - 2\hat{z} \quad [\text{m}]?$$

$$\hat{r}_{1 \rightarrow 2} = \boxed{\phantom{000}} \hat{x} + \boxed{\phantom{000}} \hat{y} + \boxed{\phantom{000}} \hat{z}$$

Senden

## Kraft zwischen zwei Elektronen

Die elektrostatische Kraft, die auf Elektron 1 aufgrund der Ladung von Elektron 2 wirkt, ist durch das Coulombkraft Gesetz gegeben:

$$\vec{F} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^2} \hat{r}_{2\rightarrow 1} \quad [\text{N}]$$

Dabei ist  $e = 1.6022 \times 10^{-19}$  C die Elementarladung,  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m ist die elektrische Feldkonstante und  $\hat{r}_{2\rightarrow 1}$  ist der Einheitsvektor, der von Elektron 2 auf das Elektron 1 zeigt.

Elektron 1 ist an der Position

$$\vec{r}_1 = 3\hat{x} + 3\hat{y} - 3\hat{z} \quad [\text{nm}],$$

und Elektron 2 an der Position

$$\vec{r}_2 = 2\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z} \quad [\text{nm}].$$

Welche Kraft wirkt auf Elektron 1?

$$\vec{F} = \boxed{\phantom{000}} \hat{x} + \boxed{\phantom{000}} \hat{y} + \boxed{\phantom{000}} \hat{z} \quad [\text{N}]$$

Lösung

# Fähigkeiten

## Vektoren

Sie müssen in der Lage sein:

- zwei Vektoren zu addieren  $\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}$ ;
- die Länge eines Vektors zu bestimmen,  $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ ;
- den Einheitsvektor, der in die Richtung des ursprünglichen Vektors zeigt, zu bestimmen,  $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ ;
- den Vektor in seine  $x$ -,  $y$ -, und  $z$ -Komponenten zu zerlegen;
- das innere Produkt zweier Vektoren zu berechnen,  $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ ;
- das Kreuzprodukt zweier Vektoren zu berechnen,  $\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z}$ .

App: Alles über die Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$

# Alles über die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Auskunft ueber A und B

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Die Länge von  $\vec{A}$  ist  $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2} = 3.7416574$ .

Die Länge von  $\vec{B}$  ist  $|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-5)^2} = 5.9160798$ .

Das innere Produkt (auch Skalarprodukt genannt) von  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  ist

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (1)(-1) + (2)(3) + (3)(-5) = -10.$$

Hier ist  $\theta$  der Winkel zwischen den beiden Vektoren.

# Kräfte

---

Coulombkraft

Newtonsches Gravitationsgesetz

Lorentzkraft

Hookesches Gesetz

Reibungskraft

# Coulombkraft

---

Die elektrostatische Kraft, die auf Elektron 1 aufgrund der Ladung von Elektron 2 wirkt

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \hat{r}_{2 \rightarrow 1}$$

Ladung  $q_1, q_2$  [C] = [A s]

elektrische Feldkonstante  $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}$  [F/m]=[A<sup>2</sup>s<sup>4</sup>/kg m<sup>3</sup>]

# Newtonsches Gravitationsgesetz

---

$$\vec{F} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \hat{r}_{2 \rightarrow 1}$$

in der Nähe der Erdoberfläche

Erdbeschleunigung

$$\vec{F} = -m_1 g \hat{z}$$

$$g = \frac{Gm_{\text{erde}}}{r_{\text{erde}}^2} = \frac{6.6726 \times 10^{-11} \cdot 5.97219 \times 10^{24}}{(6.371 \times 10^6)^2} = 9.8174 \text{ m/s}^2$$

$$m_2 = m_{\text{erde}}$$

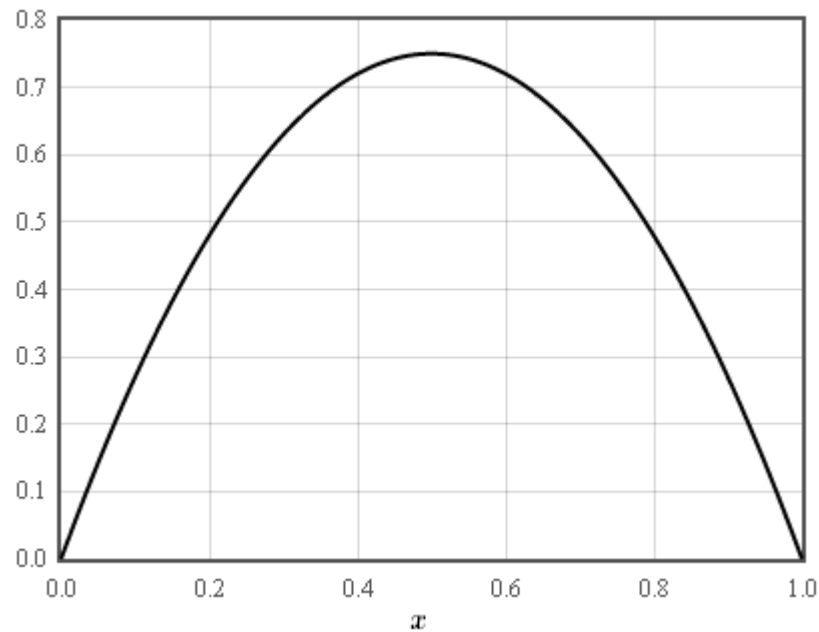


# Lorentzkraft

---

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

konstantes elektrisches Feld  $\vec{F} = q\vec{E}$

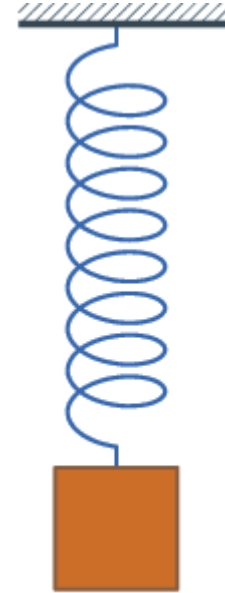


# Hookesches Gesetz

---

$$\vec{F} = -kx$$

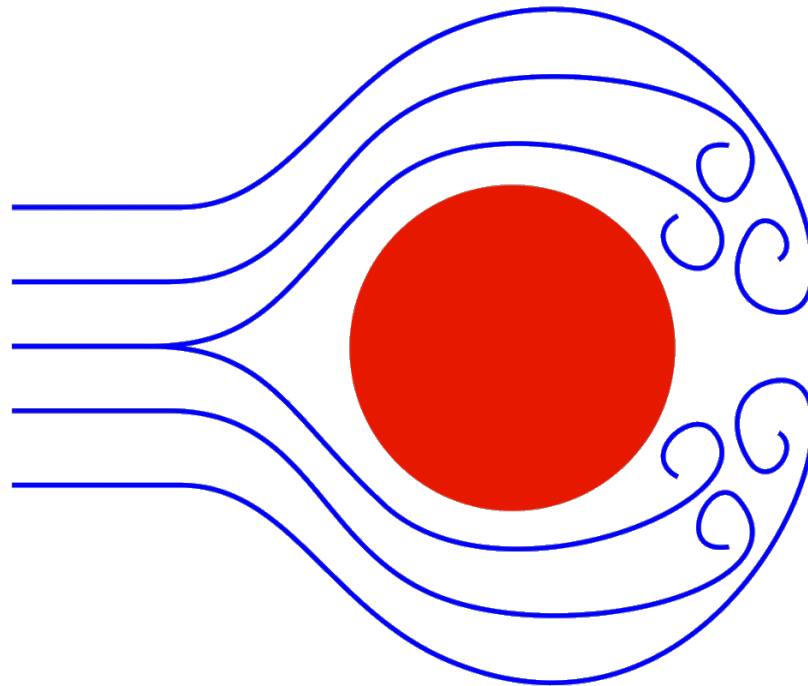
Federkonstante [N/m]



# Reibungskraft (Strömungswiderstand)

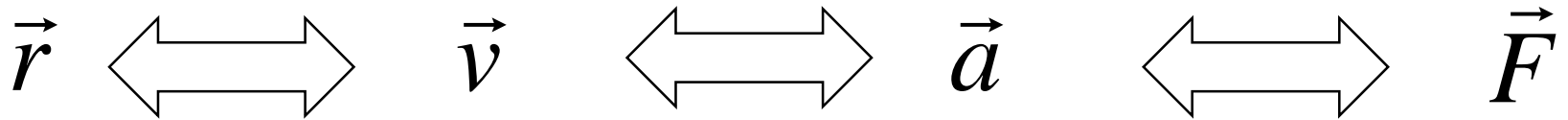
---

$$\vec{F} = -a\vec{v} - b\vec{v} |\vec{v}| - c\vec{v} |\vec{v}|^2 + \dots$$



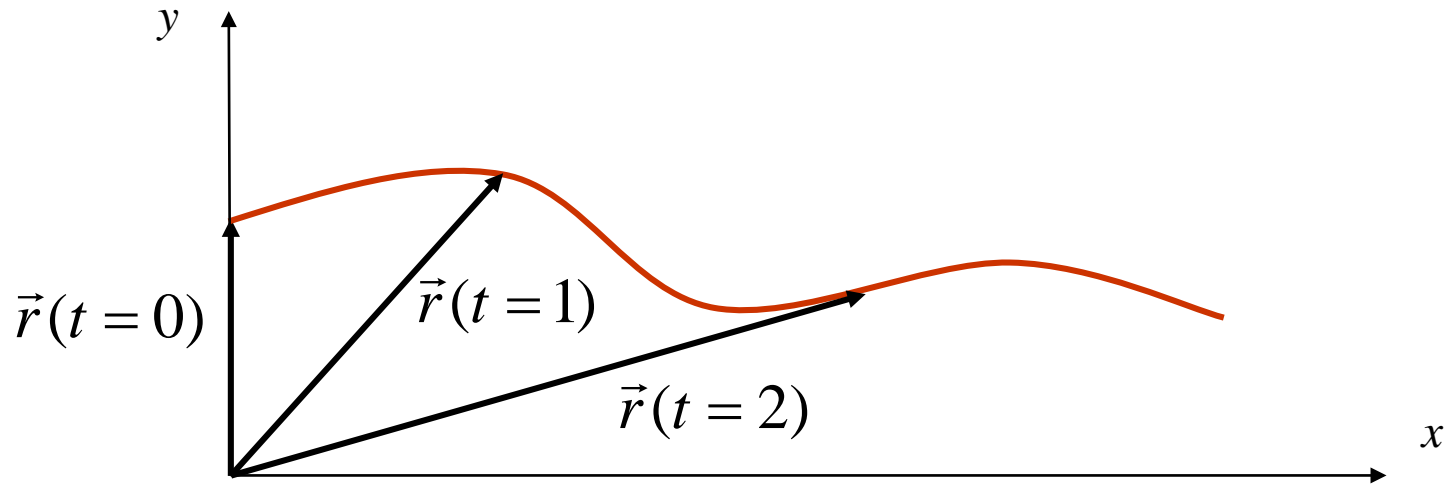
# Punktmechanik

---



# Ortsvektor $\vec{r}$

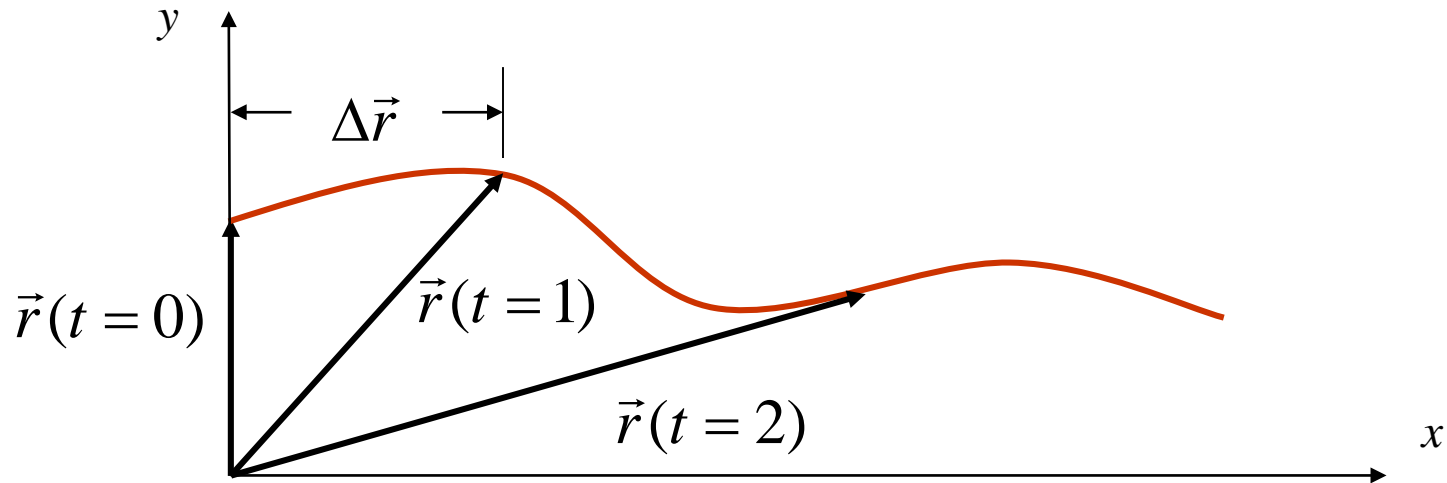
---



$$\vec{r}(t) = r_x(t)\hat{x} + r_y(t)\hat{y} + r_z(t)\hat{z} \quad [\text{m}]$$

# Geschwindigkeit $\vec{v}$

---

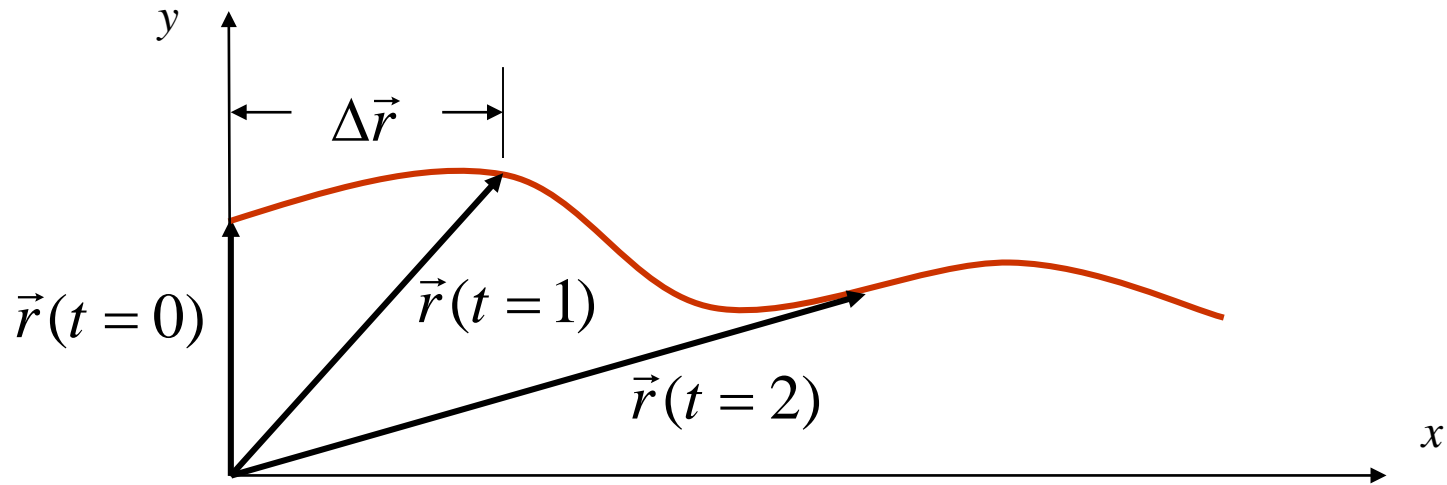


$$\vec{v} \approx \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad [\text{m/s}]$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad [\text{m/s}]$$

# Geschwindigkeit $\vec{v}$

---



$$\vec{r}(t) = r_x(t)\hat{x} + r_y(t)\hat{y} + r_z(t)\hat{z} \quad [\text{m}]$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\hat{x} + \frac{dr_y}{dt}\hat{y} + \frac{dr_z}{dt}\hat{z} \quad [\text{m/s}]$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v_x(t)\hat{x} + v_y(t)\hat{y} + v_z(t)\hat{z} \quad [\text{m/s}]$$

# Ableitung (schreibweise)

---

Leibniz:  $\frac{df}{dx}$     $\frac{dg}{dt}$     $\frac{dy}{dx}$     $\frac{dx}{dt}$     $\frac{dy}{dt}$     $\frac{dz}{dt}$

Lagrange:  $f'$     $g'$

Euler:  $D_x f$     $D_t y$

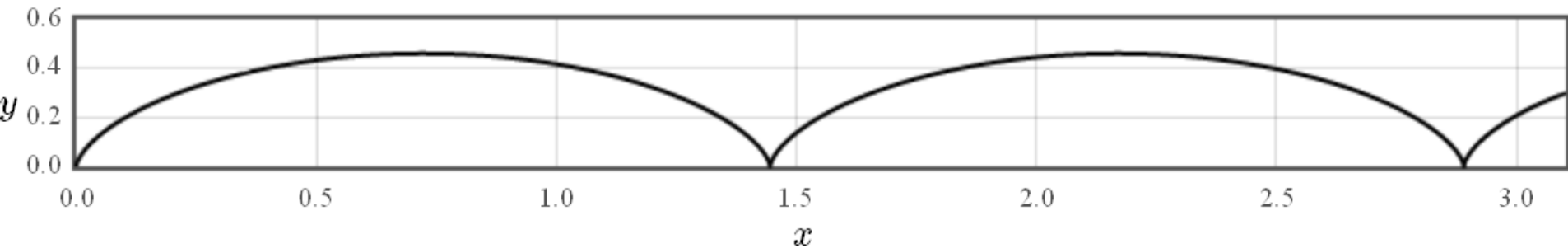
Newton:  $\dot{x}$     $\dot{y}$

Beispiel:  $f(x) = x^2$     $\frac{df}{dx} = 2x$



# Zykloid (Radlaufkurve)

Ein kleiner Stein der Masse  $m = 41$  g steckt in einem Autoreifen. Der Radius des Reifens ist  $R = 0.23$  m. Der Stein folgt einem **Zykloid** während der Reifen rollt. Der Reifen rollt mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v = 3$  m/s.



Der Positionsvektor der Steines ist:

$$\vec{r}(t) = R \left( \frac{vt}{R} - \sin\left(\frac{vt}{R}\right) \right) \hat{x} + R \left( 1 - \cos\left(\frac{vt}{R}\right) \right) \hat{y} \text{ [m]}.$$

immer Radiant