

Mechanik

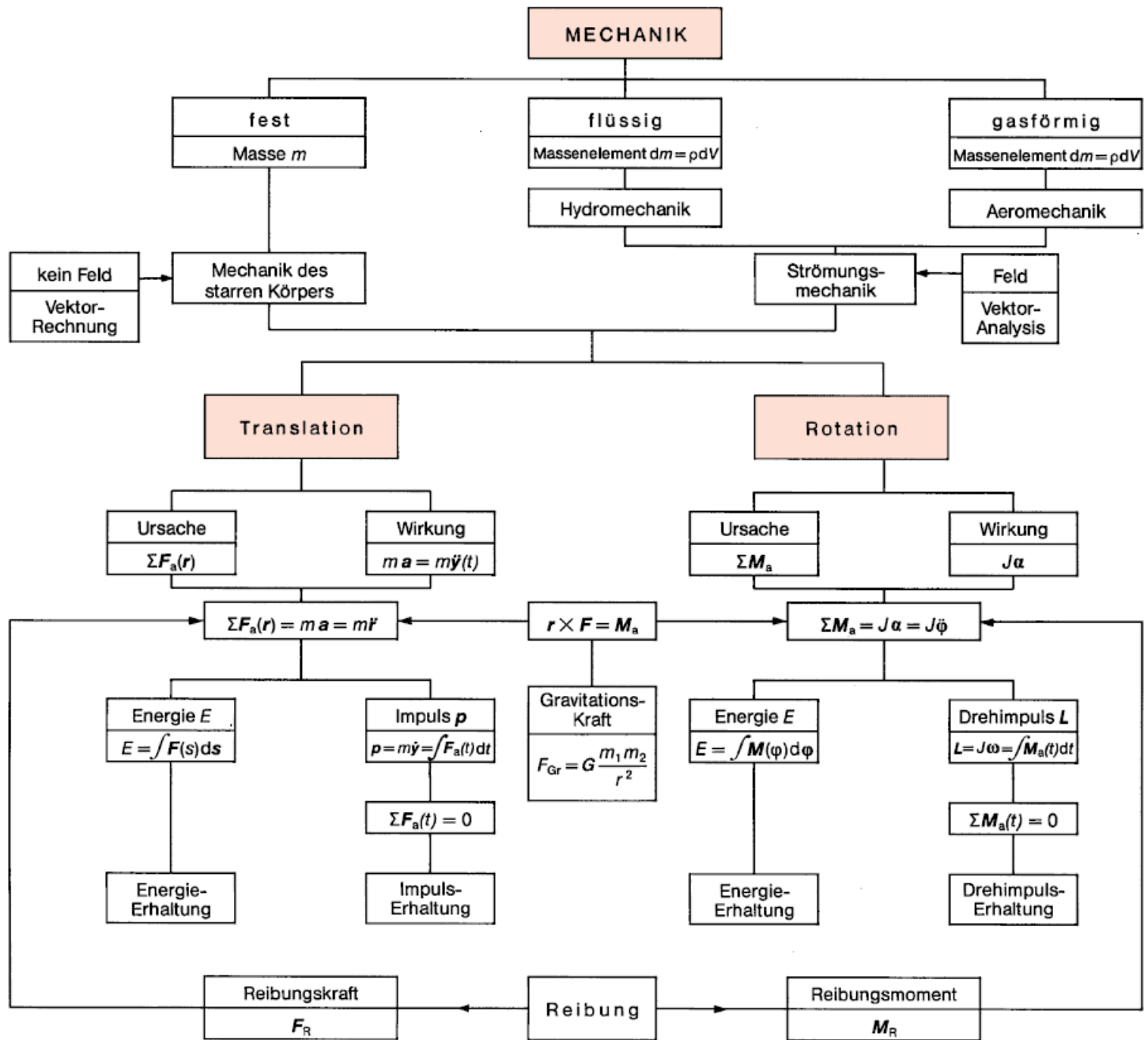


Abb. 2.1 Strukturbild der Mechanik

Kinematik

Geschwindigkeit

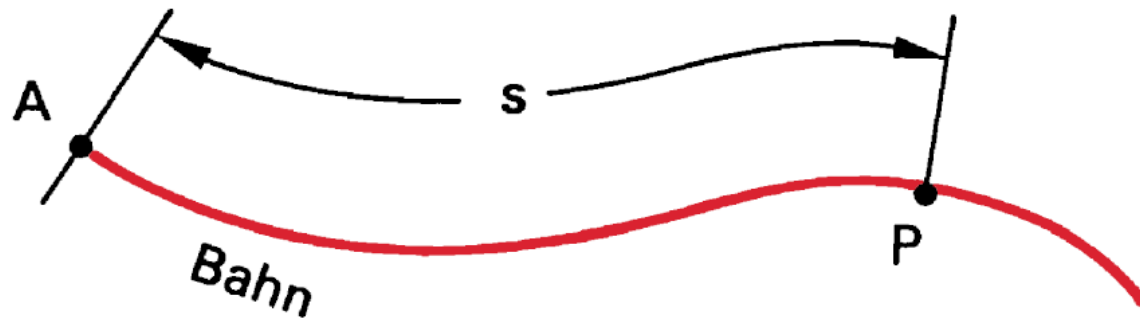


Abb. 2.2 Ortskoordinate eines Punktes P auf vorgegebener Bahn s Weg vom Anfangspunkt A

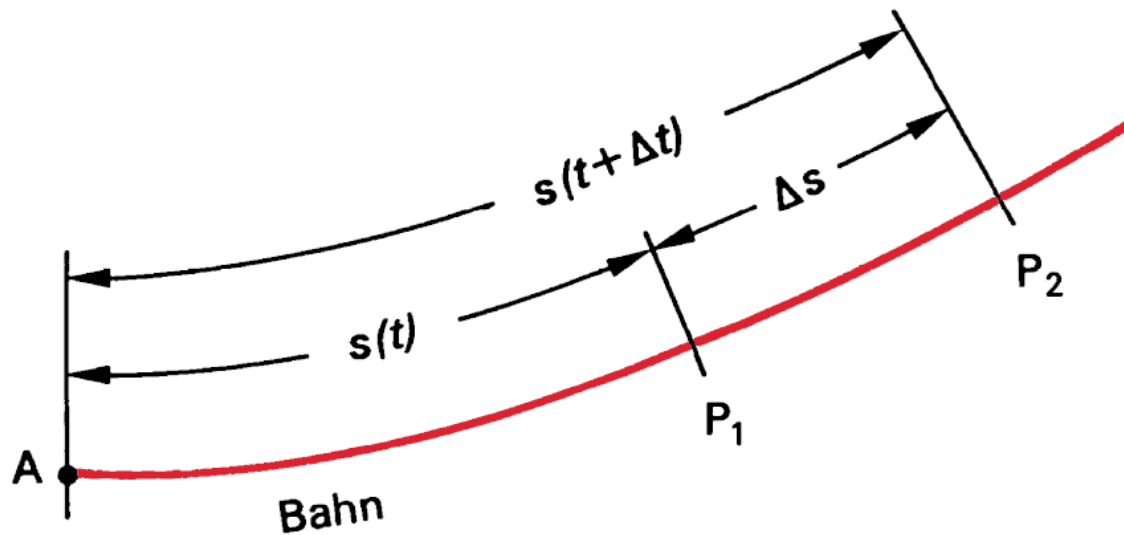


Abb. 2.3 Zur Definition der Geschwindigkeit, t Zeit
(sonstige Bezeichnungen wie in Abb. 2.1)

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} . \quad (2.1)$$

mittlere Geschwindigkeit

m/s

mittlere Geschwindigkeit

Momentangeschwindigkeit

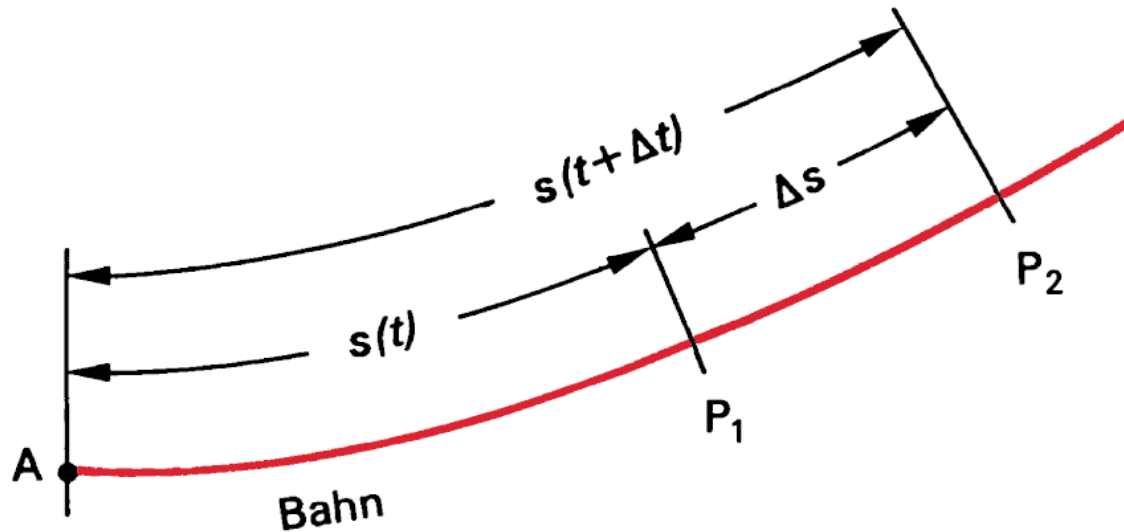
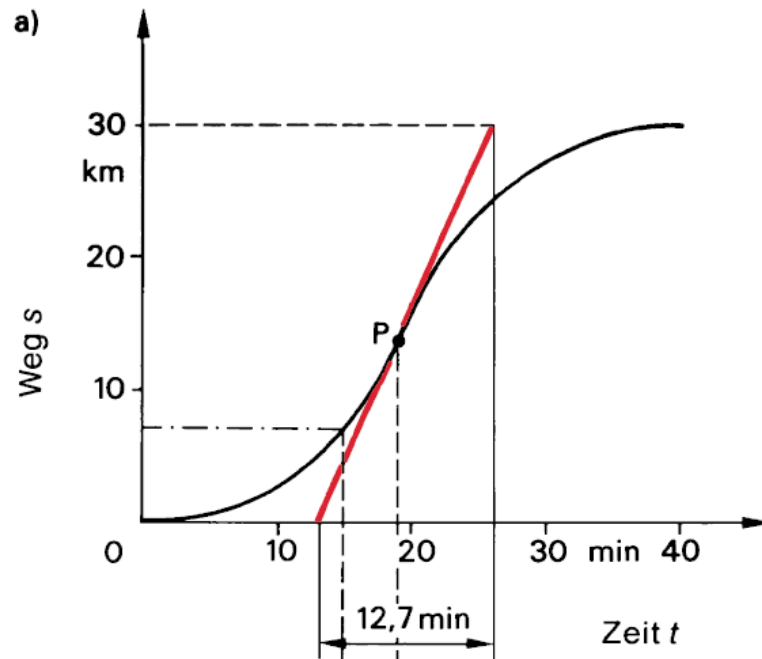


Abb. 2.3 Zur Definition der Geschwindigkeit, t Zeit
(sonstige Bezeichnungen wie in Abb. 2.1)

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (2.2)$$

Die Geschwindigkeit ist die Steigung der
Kurve in einem Weg-Zeit-Diagramm.



$$v_{\max} = \frac{30 \text{ km}}{12,7 \text{ min}} = 2,36 \text{ km/min} = 142 \text{ km/h} .$$

Die mittlere Geschwindigkeit für den Gesamtvorgang beträgt

$$v_m = \frac{30 \text{ km}}{40 \text{ min}} = 0,75 \text{ km/min} = 45 \text{ km/h} .$$

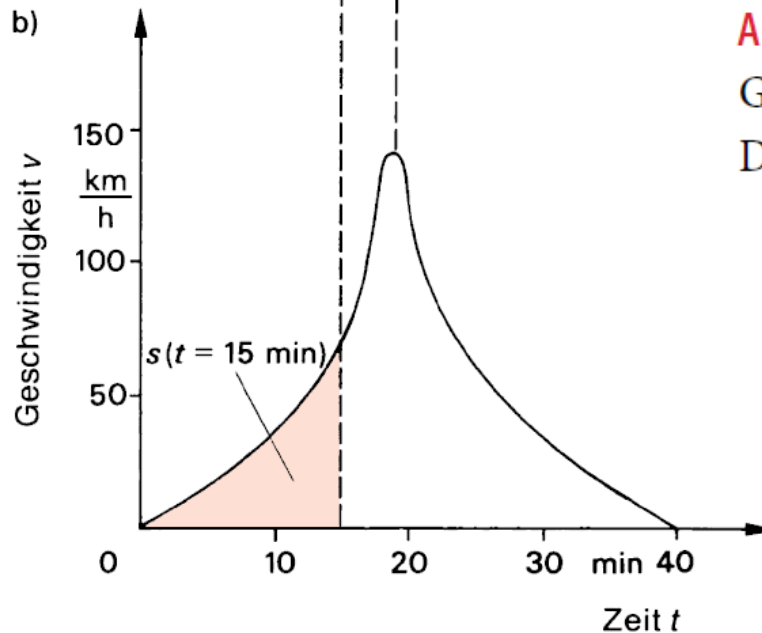


Abb. 2.4 Bewegung mit ungleichförmiger Geschwindigkeit (Beispiel 2.2-1). a) Weg-Zeit-Diagramm, b) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau . \quad (2.3)$$

Beschleunigung

$$a_m = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} . \quad (2.4)$$

mittlere Beschleunigung

m/s²

mittlere Beschleunigung

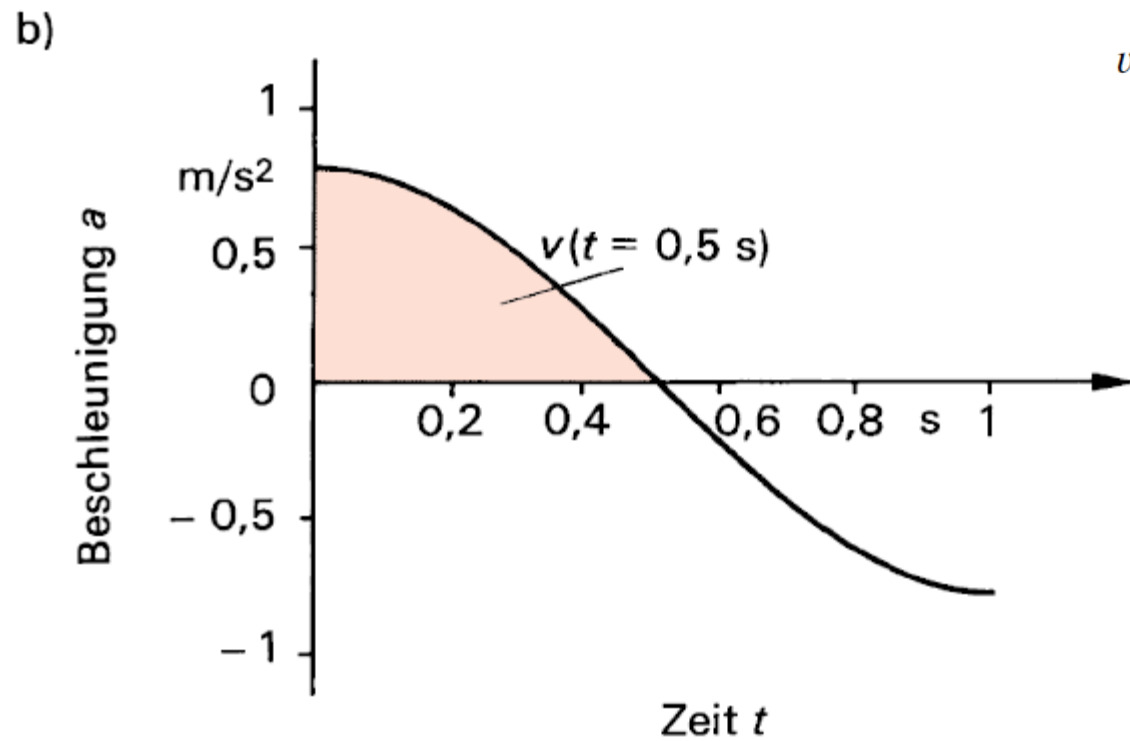
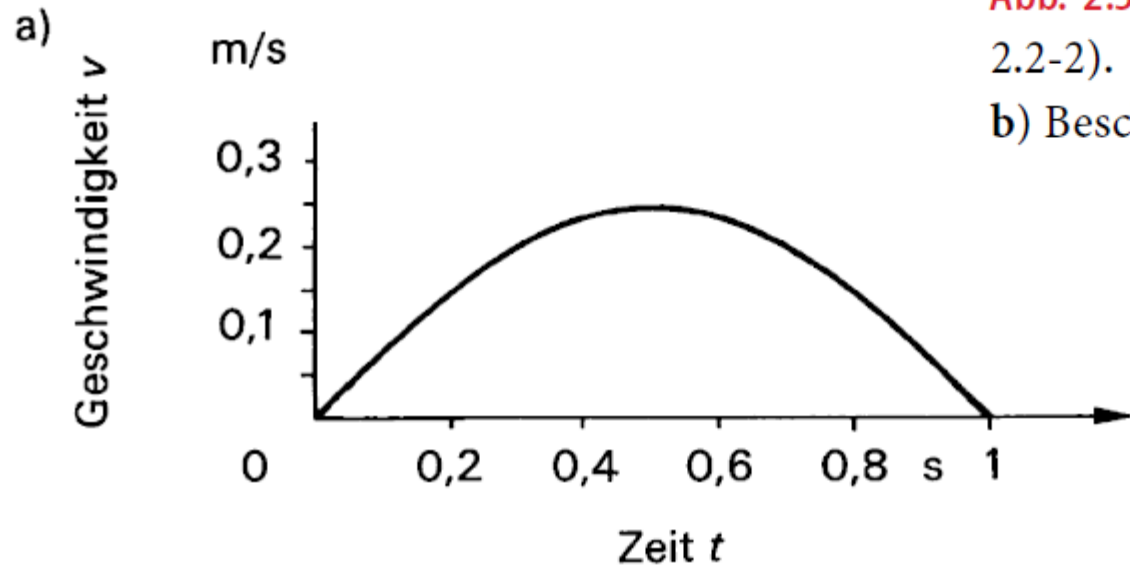
Momentanbeschleunigung

Momentanbeschleunigung

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} . \quad (2.5)$$

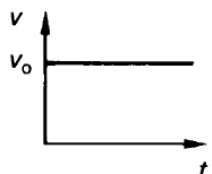
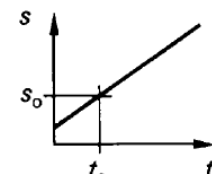
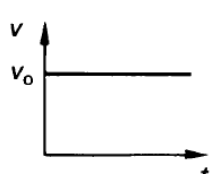
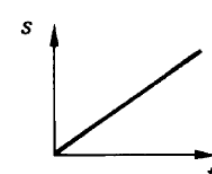
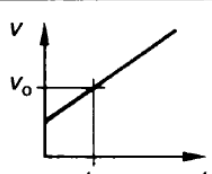
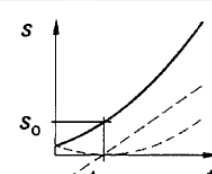
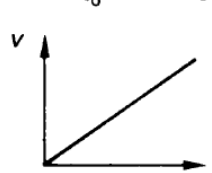
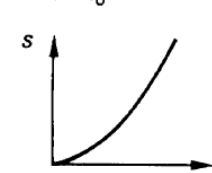
Die Beschleunigung ist die Steigung der Kurve in einem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

Abb. 2.5 Beschleunigte Bewegung (Beispiel 2.2-2). a) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, b) Beschleunigung-Zeit-Diagramm



$$v(0,5 \text{ s}) = \int_0^{0,5 \text{ s}} 0,79 \text{ m/s}^2 \cdot \cos(3,14 \text{ s}^{-1}t) dt$$
$$= 0,25 \text{ m/s} .$$

Einfache Spezialfälle

	Beschleunigung	Anfangsbedingungen	Geschwindigkeit	Ort	v, t -Diagramm	s, t -Diagramm
Definition	a	s_0, v_0	$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$	$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$		
gleichmäßige Geschwindigkeit	$a = 0$	$s = s_0$ zur Zeit $t = t_0$	$v = v_0$	$s = s_0 + v_0(t - t_0)$		
		$s = 0$ zur Zeit $t = 0$	$v = v_0$	$s = v_0 t$		
gleichmäßige Beschleunigung	$a = a_0$	$s = s_0$ $v = v_0$ zur Zeit $t = t_0$	$v = v_0 + a_0(t - t_0)$	$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2$		
		$s = 0$ $v = 0$ zur Zeit $t = 0$	$v = a_0 t$ $v = \sqrt{2 a_0 s}$	$s = \frac{1}{2} a_0 t^2$ $s = \frac{v^2}{2 a_0}$		

Beispiel: freier Fall

konstante Beschleunigung

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Dreidimensionale Kinematik

Ortsvektor und Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Wichtig: vorteilhaftes Koordinatensystem

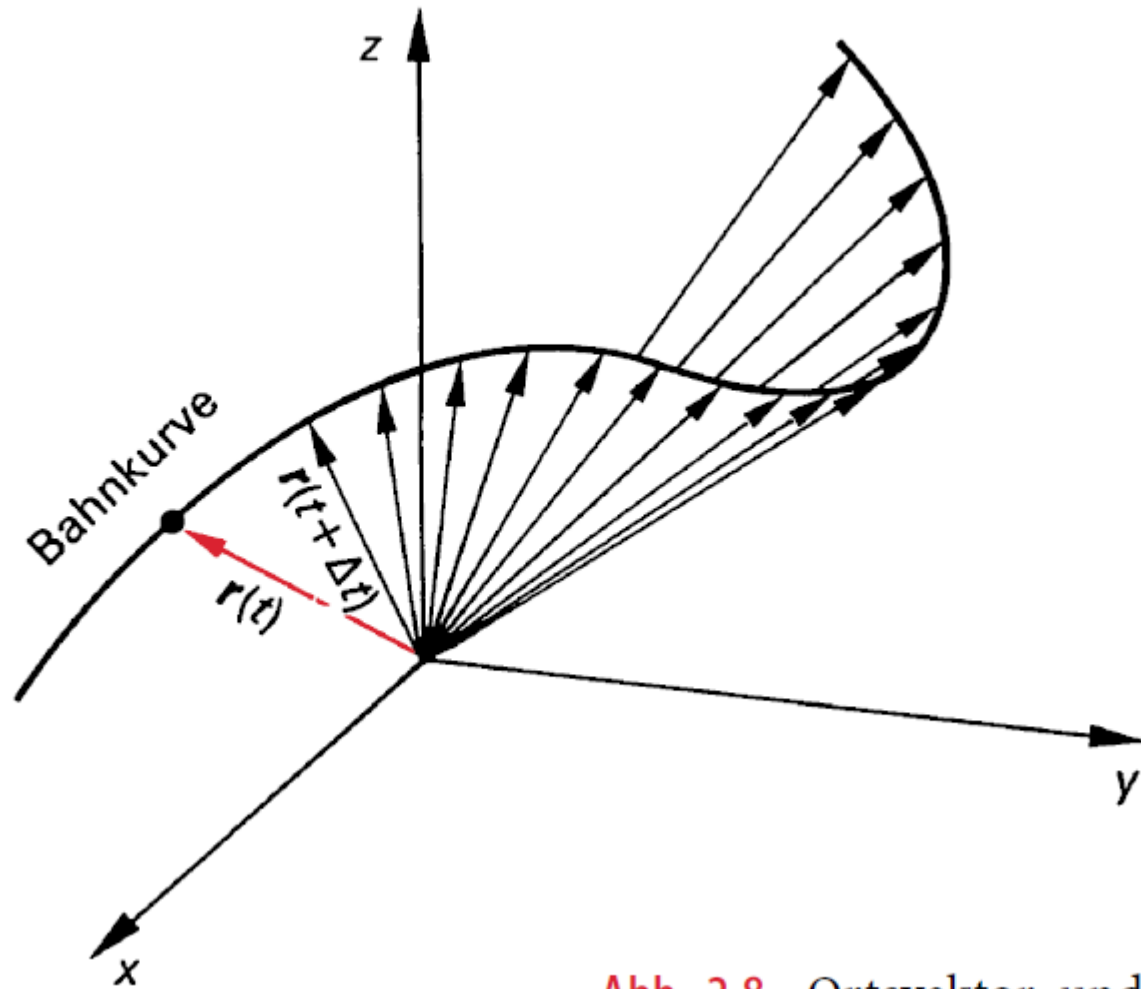


Abb. 2.8 Ortsvektor und Bahnkurve.
 x, y, z Raumkoordinaten, t Zeit

Geschwindigkeitsvektor

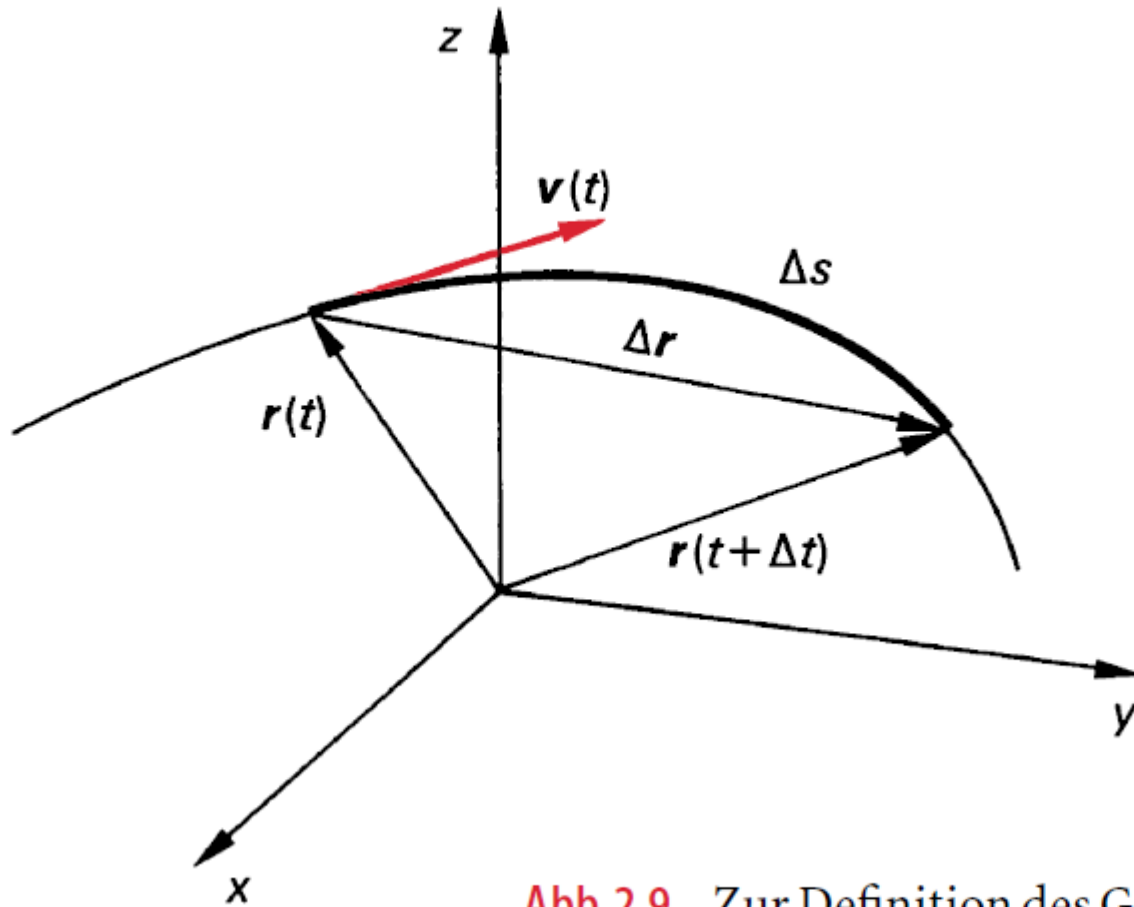


Abb.2.9 Zur Definition des Geschwindigkeitsvektors v .
 x, y, z Raumkoordinaten, t Zeit, s Weg, r Ortsvektor

mittlere Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}_m = \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} . \quad (2.11)$$

Momentangeschwindigkeit

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Der Vektor \boldsymbol{v} der Momentangeschwindigkeit liegt stets tangential zur Bahnkurve.

Tangenteneinheitsvektor

e_{tan}

- Betrag eins
- Richtung der Tangente an die Bahnkurve

$$\boldsymbol{v} = v e_{\text{tan}} \cdot$$

(2.13)

Beschleunigungsvektor

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

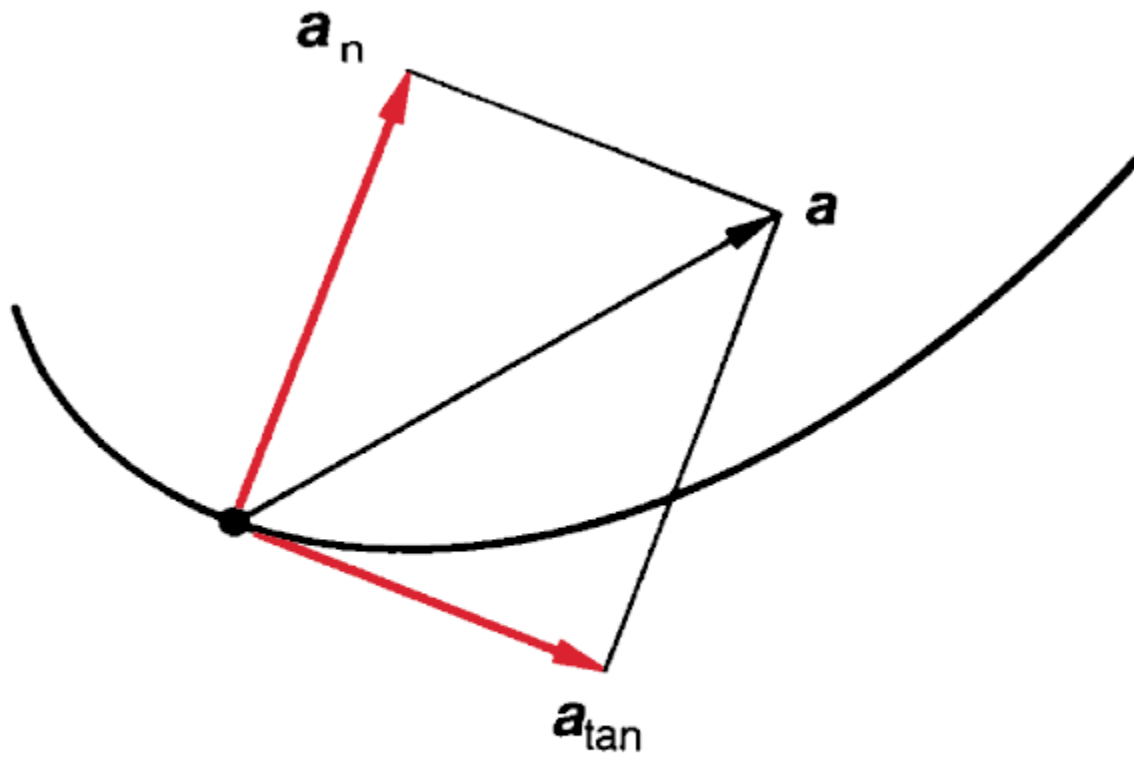


Abb. 2.10 Tangential- und Normalkomponenten des Beschleunigungsvektors

Tangentialkomponenten

a_{tan}

Normalkomponenten

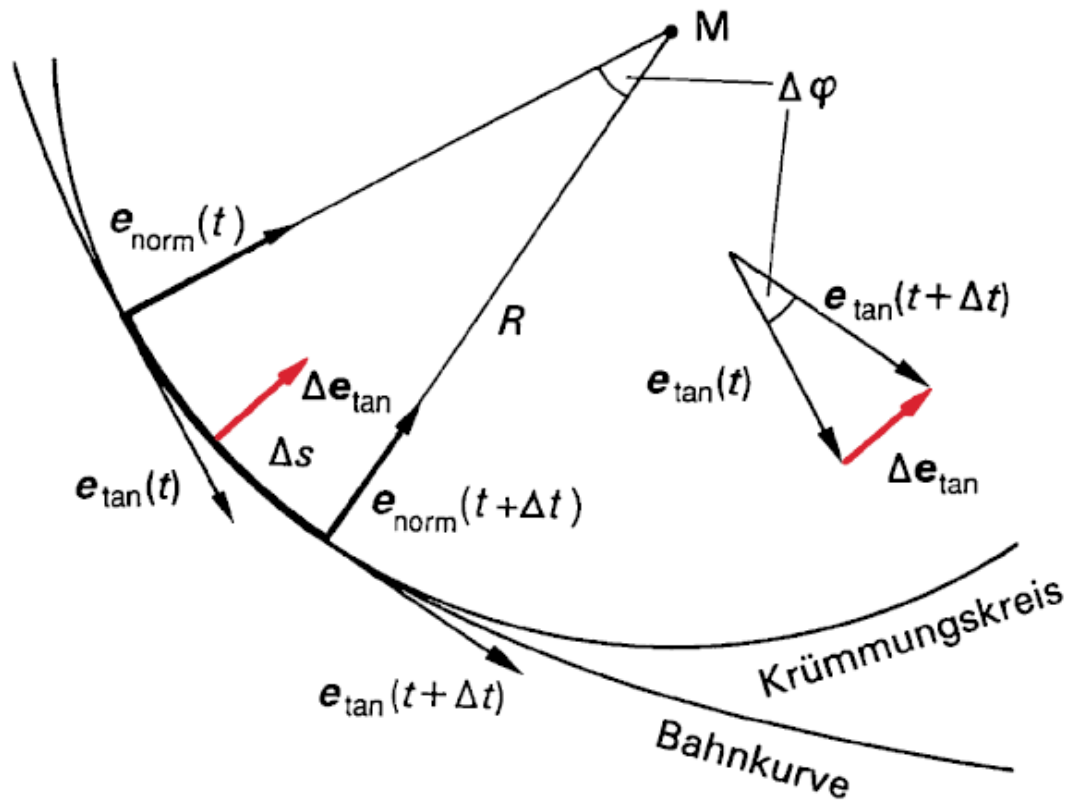
a_{norm}

$$\boldsymbol{v} = v \boldsymbol{e}_{\text{tan}} .$$

nach der Zeit differenziert

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{tan}} + \boldsymbol{a}_{\text{norm}} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_{\text{tan}} + v \frac{d\boldsymbol{e}_{\text{tan}}}{dt}$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{tan}} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_{\text{tan}} \quad (2.15)$$



Normaleinheitsvektor

e_{norm}

Abb. 2.11 Zur Bestimmung der Differentialquotienten de_{tan}/dt

$$a_{\text{norm}} = \frac{v^2}{R} e_{\text{norm}} \quad (2.16)$$

Kreisbewegungen

Bei einer Kreisbewegung ist die Normalkomponente der Beschleunigung stets zum Kreismittelpunkt gerichtet; man nennt sie deshalb auch *Zentripetalbeschleunigung*.

$$|\mathbf{a}_{zp}| = \frac{v^2}{r} . \quad (2.18)$$

Tangentialbeschleunigung $|\mathbf{a}_{tan}| = dv/dt$

$$\varphi = \frac{s}{r} . \quad (2.19)$$

$$1 \text{ m/m} = 1 \text{ rad}$$

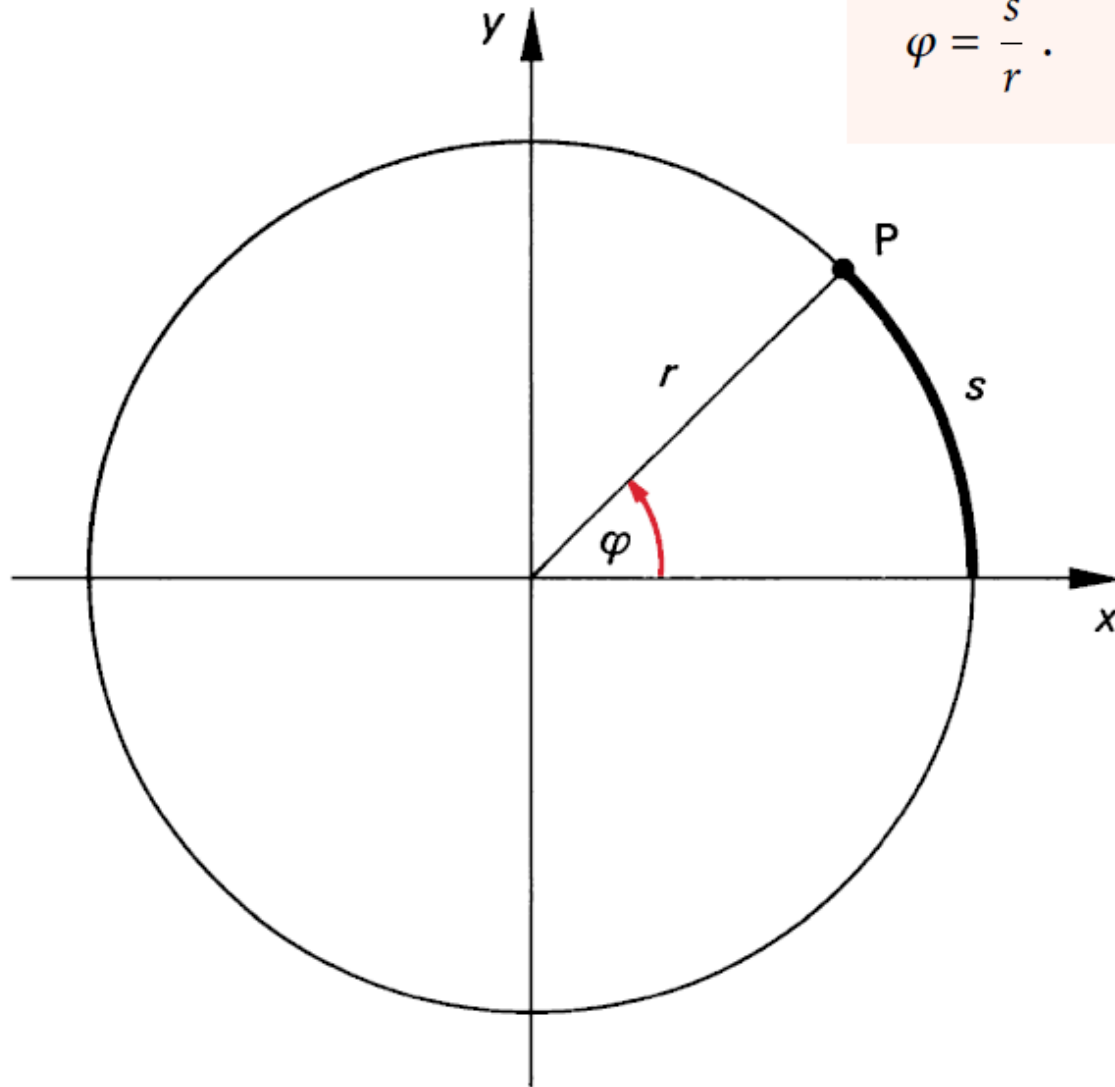


Abb. 2.13 Definition des Drehwinkels φ der Kreisbewegung. r Radius, s Bogenlänge

Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.20)$$

1 rad/s oder 1 s⁻¹

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} \quad (2.21)$$

Drehzahl bzw. Drehfrequenz n

Periodendauer T

Zentripetalbeschleunigung a_{zp}

$$a_{zp} = -\omega^2 r . \quad (2.22)$$

Winkelbeschleunigung α

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} . \quad (2.23)$$

1 rad/s² oder 1 s⁻²

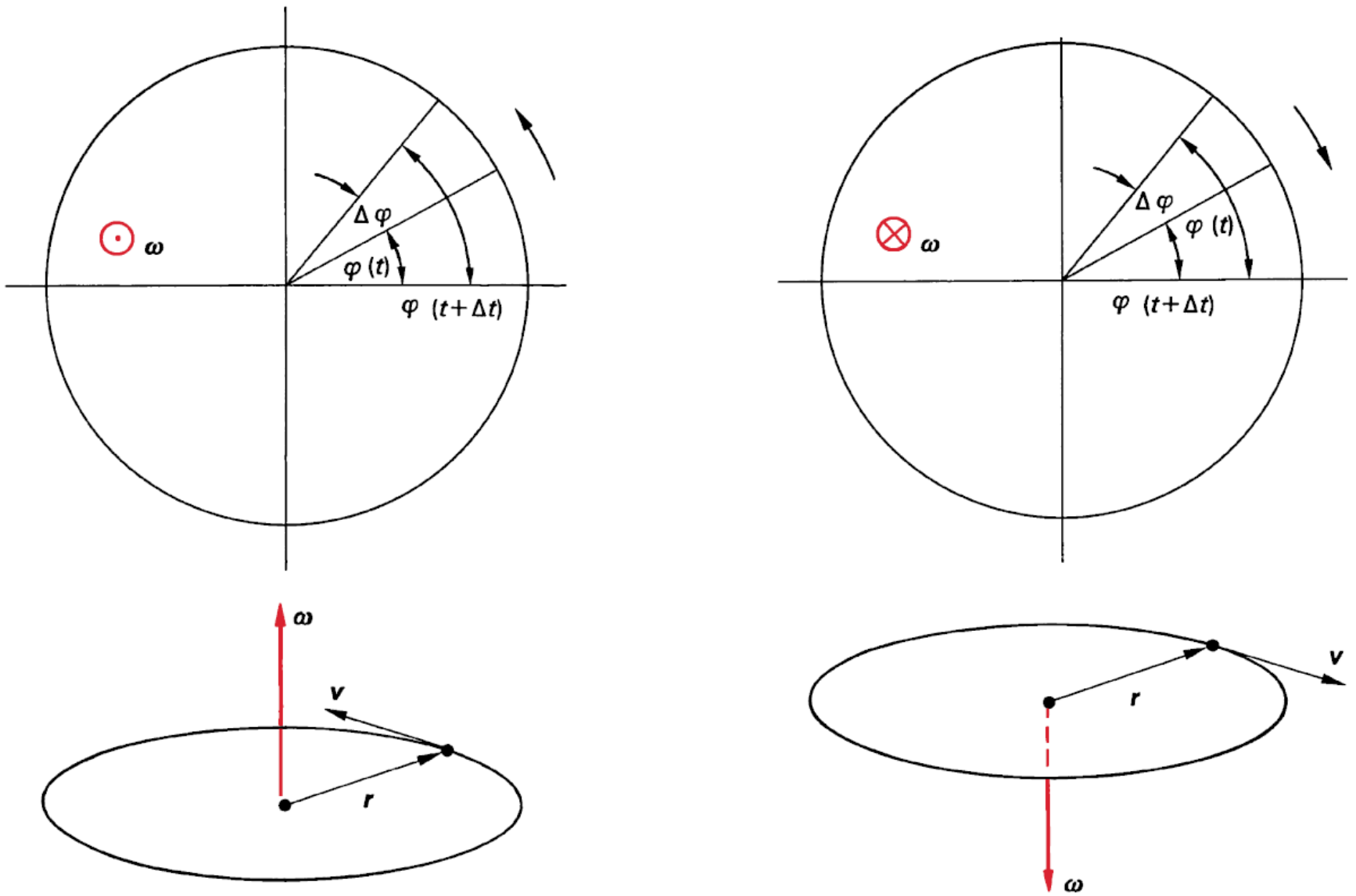


Abb. 2.14 Zur Definition der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit ω bei verschiedenen Drehrichtungen.

Pfeilspitze



Pfeilende



klassische Dynamik

Die Newton'schen Axiome

Das *erste Axiom* definiert ein *Bezugssystem*, in dem die drei Axiome gelten.

Das *zweite Newton'sche Axiom* heißt *Aktionsprinzip*, weil es den Zusammenhang zwischen der Bewegungsänderung eines Körpers und der Einwirkung von Kräften herstellt.

Das *dritte Axiom*, das Axiom über die *Wechselwirkungen*, sagt aus, dass es eine einzelne, isolierte Kraft nicht gibt.

Tabelle 2.2 Die Newton'schen Axiome

Newton'sche Axiome	Formulierung	Beziehung
1. Axiom Trägheitsgesetz	Jeder Körper behält seine Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung so lange bei, wie er nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.	
2. Axiom Aktionsgesetz Grundgesetz der Mechanik	Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße, des Impulses $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, ist gleich der resultierenden Kraft \mathbf{F} . Um einen Körper konstanter Masse zu beschleunigen, ist eine Kraft \mathbf{F} erforderlich, die gleich dem Produkt aus Masse m und Beschleunigung \mathbf{a} ist.	allgemein: $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$ speziell: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
3. Axiom Wechselwirkungsgesetz actio = reactio	Wirkt ein Körper 1 auf einen Körper 2 mit der Kraft \mathbf{F}_{12} , so wirkt der Körper 2 auf den Körper 1 mit der Kraft \mathbf{F}_{21} ; beide Kräfte haben den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtungen.	$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

Masse



Masse -> Trägkeit, Schwere

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} . \quad (2.26)$$

grosse Massen -> Gravitationskräfte



Kraft



Körper mit konstanter Masse

Momentanbeschleunigung ***a***

→ Kraft ***F = m a***

Einheit der Kraft ->

$$1 \text{ kg m s}^{-2} = 1 \text{ N (Newton)}$$



Ist die Beschleunigung eines Körpers $\mathbf{a} = 0$, so ist auch die resultierende Kraft auf den Körper nach dem Newton'schen Aktionsprinzip null. Dies ist die Bedingung des *statischen Kräftegleichgewichts*:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = 0 . \quad (2.27)$$



$F = F_1 + F_2$	Kräfteparallelogramm	Kräfte	Richtungswinkel
Kräfteaddition; gegeben F_1, F_2, α, β		$F_x = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta$ $F_y = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta$ $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos(\beta - \alpha)}$	$\gamma = \arctan \frac{F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta}{F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta}$
Kräftezerlegung; gegeben F, γ, α, β oder F, γ, F_1, F_2		$F_1 = F \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}$ $F_2 = F \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$	$\alpha = \gamma - \arccos \frac{F^2 + F_1^2 - F_2^2}{2 F F_1}$ $\beta = \gamma + \arccos \frac{F^2 + F_2^2 - F_1^2}{2 F F_2}$

Abb. 2.16 Kräfteaddition und Kraftzerlegung



Körper fallen auf der Erde mit einer konstanten Fallbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (Abschn. 2.2.1.3). Die Ursache dieser gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist die Schwerkraft oder Gewichtskraft auf die Masse m der Körper. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom beträgt die Schwerkraft

$$F_G = mg \quad (2.28)$$

Hangabtriebskraft F_H , mit dem Betrag

$$F_H = mg \sin \varepsilon$$

$$F_N = mg \cos \varepsilon$$

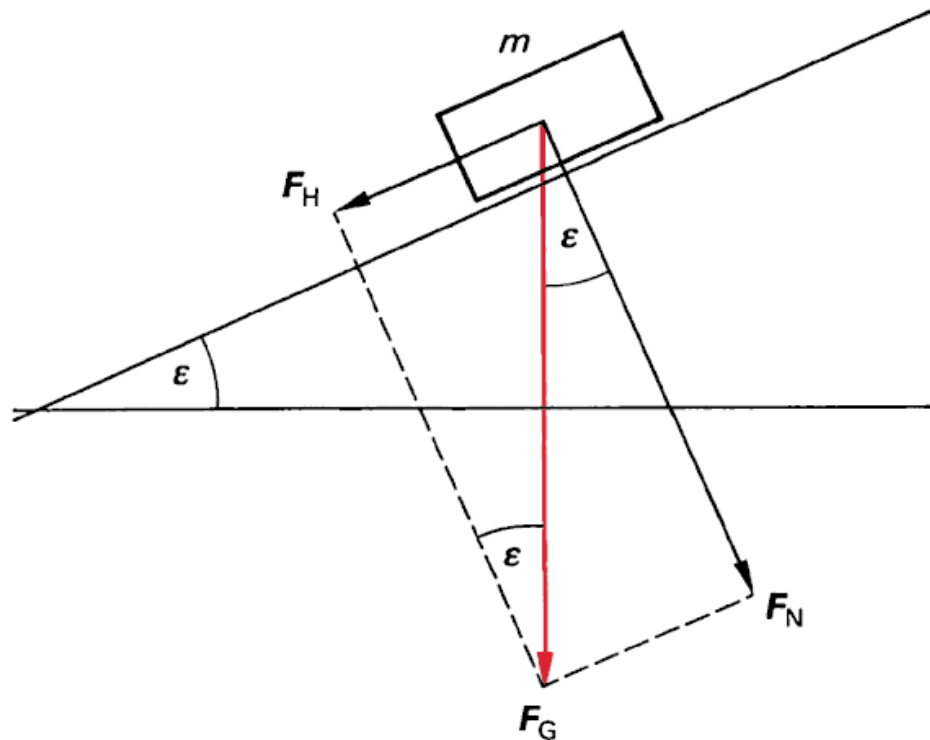


Abb. 2.17 Kräfte auf schiefer Ebene. ε Neigungswinkel



Sensorelement	Aufbau der Messapparatur	Messprinzip
Feder		Verlängerung der Feder ist proportional zur Kraft (Hookesches Gesetz).
Dehnungsmessstreifen		Deformationen des Verformungskörpers werden auf die aufgeklebten Dehnungsmessstreifen (DMS) übertragen. Der elektrische Widerstand R der DMS ändert sich proportional zur Dehnung ε . Die Widerstandsänderung wird in einer Wheatstone'schen Brückenschaltung gemessen: $\frac{\Delta R}{R} \sim \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon.$
piezoelektrischer Kristall		Kristalle ohne Symmetriezentrum (z. B. Quarz) zeigen den piezoelektrischen Effekt. Bei Belastung treten an den Kristalloberflächen elektrische Ladungen auf, die mit einem Ladungsverstärker nachgewiesen werden. Die Ladungsmenge ist proportional zur Kraft $\Delta Q \sim F$.
Glasfaser		Bei Belastung verbiegt sich die Glasfaser. Dadurch werden Lichtwellen vom Faserkern in den -mantel ausgekoppelt (Leckwellen), und das Empfängersignal geht zurück.

Abb. 2.19 Methoden der Kraftmessung

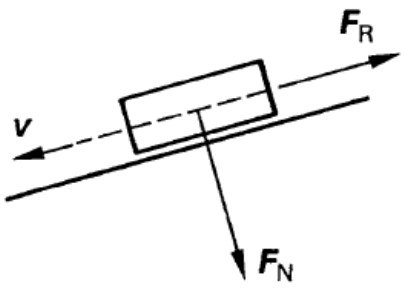
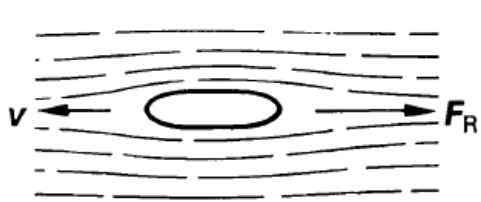
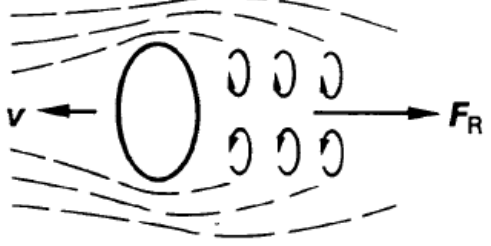
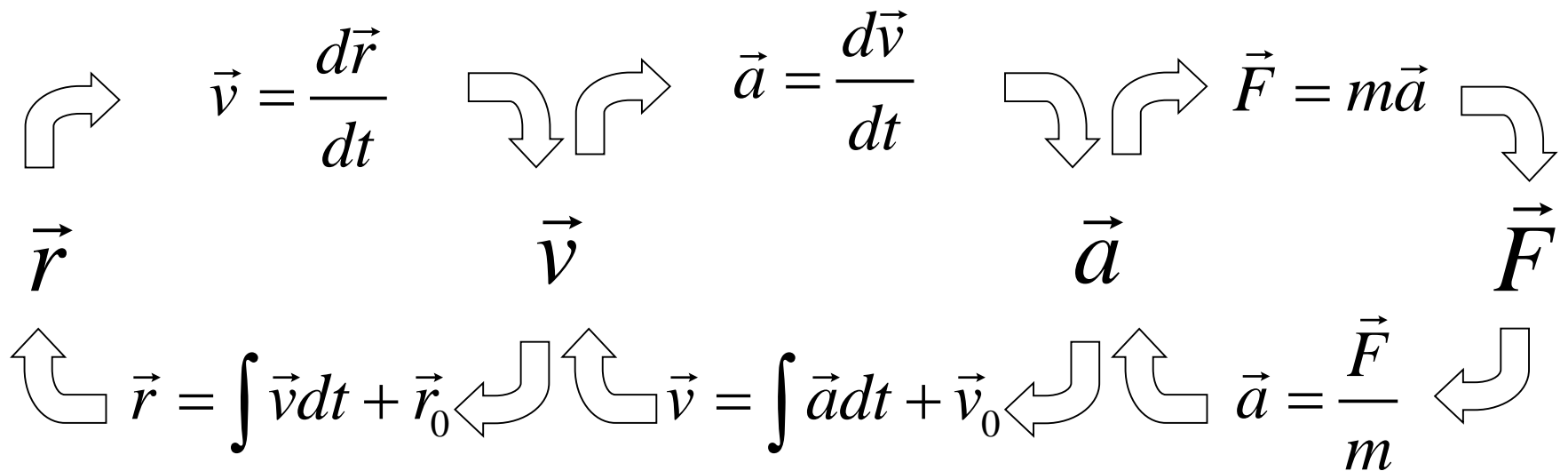
	äußere Reibung Festkörperreibung	innere Reibung Flüssigkeitsreibung	turbulente Reibung Luftreibung
Reibungskraft			
Ansatz	$F_R = \mu F_N$	$F_R = d v$	$F_R = b v^2$
Proportionalitätsfaktor	μ : Reibungszahl μ ist unabhängig von der Kontaktfläche zwischen Körper und Unterlage; hängt ab von der Kontaktgeometrie und den Materialien von Körper und Unterlage.	d : Zähigkeitskoeffizient d hängt von der Form des Körpers und der Viskosität η der Flüssigkeit ab. Es wird laminare Strömung vorausgesetzt.	b : Luftreibungskoeffizient b hängt von der Anströmfläche und der Oberflächenbeschaffenheit des Körpers sowie von der Dichte und Art des strömenden Mediums ab.
Spezialfälle	μ_R : Rollreibung μ_G : Gleitreibung μ_H : Haftreibung	$d = 6 \pi \eta r$ laminare Umströmung einer Kugel vom Radius r in einem Medium mit der Zähigkeit η	$b = \frac{1}{2} c_W \rho A$ Körper mit Anströmfläche A und dem Widerstandsbeiwert c_W im Medium der Dichte ρ

Abb. 2.20 Reibungskräfte

Punktmechanik



Arbeit



mechanische Arbeit

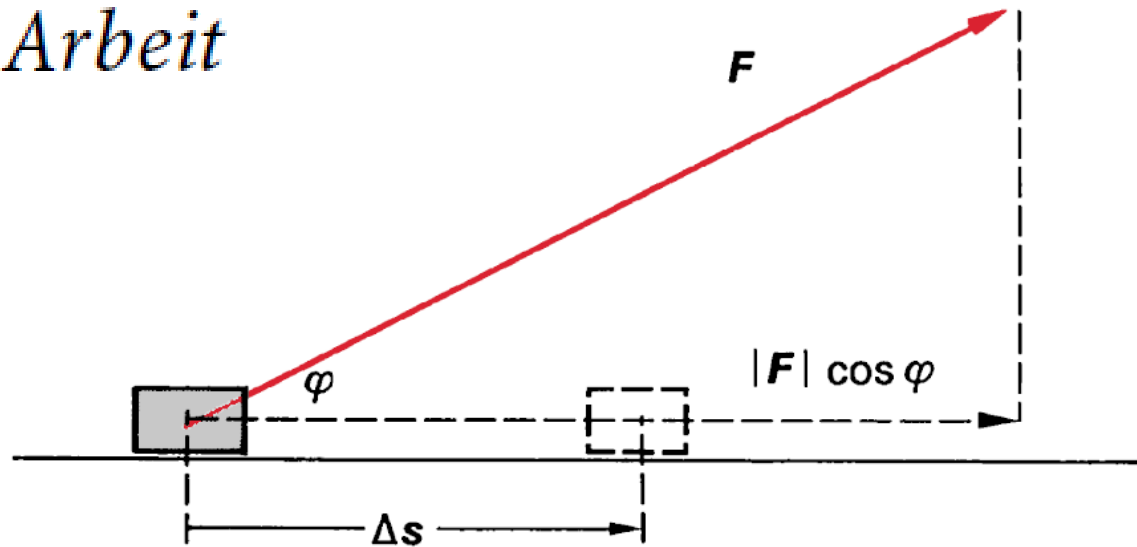


Abb. 2.31 Zur Definition der Arbeit

$$\Delta W = |F| |\Delta s| \cos(F, \Delta s) \quad (2.64)$$

$$dW = F \cdot ds . \quad (2.65)$$

Nach der Definitionsgleichung (2.64) ist die Maßeinheit der Arbeit $1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$ (Joule).



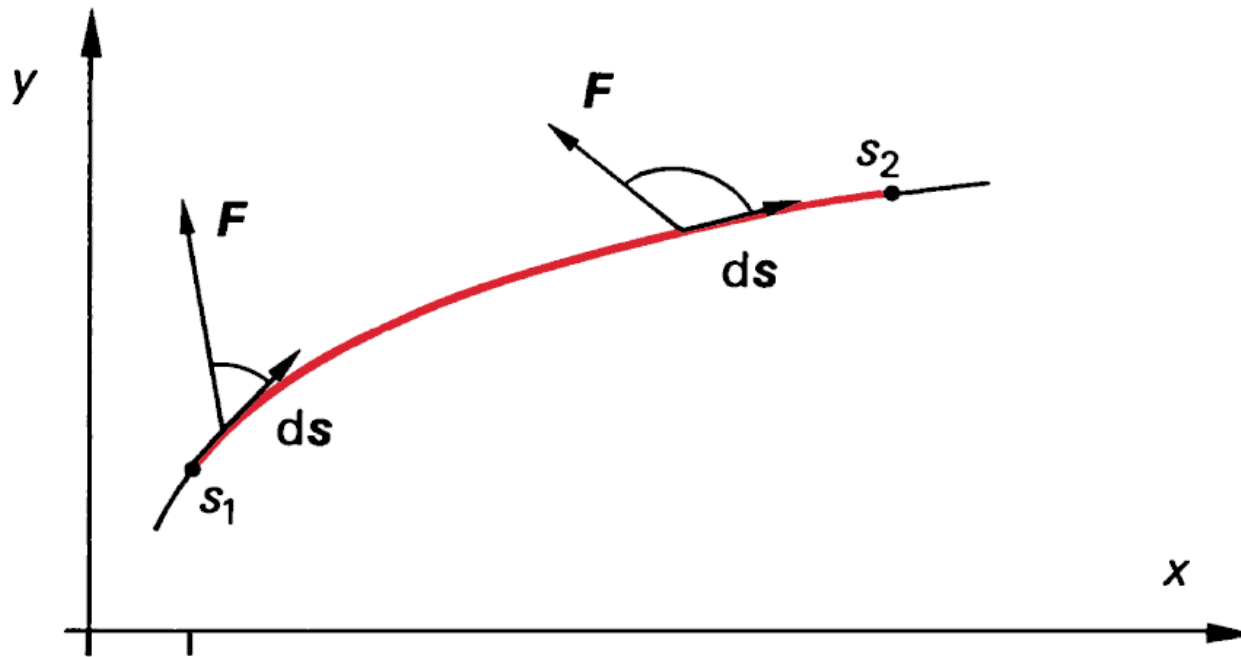


Abb. 2.32 Arbeit einer ortsabhängigen Kraft $F(x, y)$ längs des Wegs von $s_1(x_1, y_1)$ nach $s_2(x_2, y_2)$

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds . \quad (2.66)$$



Beschleunigungsarbeit gegen die Trägheitskraft F_t der beschleunigten Masse (2.33):

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds \\ &= \int_{s_1}^{s_2} - \left(-m \frac{dv}{dt} \right) \cdot (v dt) = \int_{v_1(s_1)}^{v_2(s_2)} m(v \cdot dv) . \end{aligned}$$

Die Integration zeigt, dass die Beschleunigungsarbeit nur von der Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten abhängt:

$$W_{12} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) . \quad (2.67)$$

$$F_t = -ma_S . \quad (2.33)$$



	Geometrie	erforderliche konstante Kraft	Weg	verrichtete Arbeit
Hubarbeit gegen Gewichtskraft F_G		$F = m g$	$s = h_2 - h_1 = h$	$W_{12} = m g h$ nur abhängig von der Höhendifferenz
Arbeit auf reibungsfreier schiefer Ebene gegen Hangabtriebskraft F_H		$F = m g \sin \alpha$	$s = \frac{h}{\sin \alpha}$	$W_{12} = m g h$ nur abhängig von der Höhendifferenz
Festkörperreibungsarbeit gegen Reibungskraft F_R		$F = \mu F_N$ $= \mu m g$	$s = s_2 - s_1$	$W_{12} = \mu m g s$ Reibungszahl μ auf Weg konstant
Beschleunigungsarbeit ohne Reibung gegen Trägheitskraft F_t		$F = m a$	$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 a}$	$W_{12} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$ nur abhängig von Anfangs- und Endgeschwindigkeit

Abb. 2.33 Arbeit gegen ortsunabhängige Kräfte



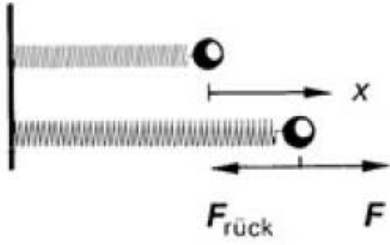
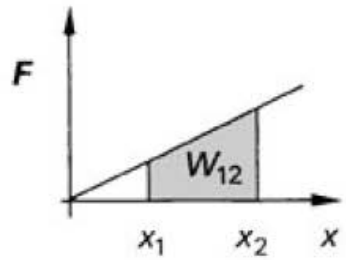
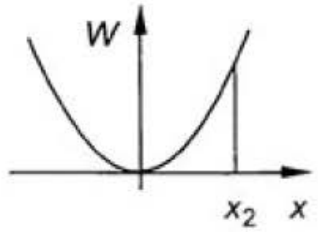
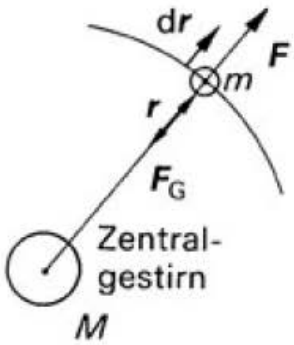
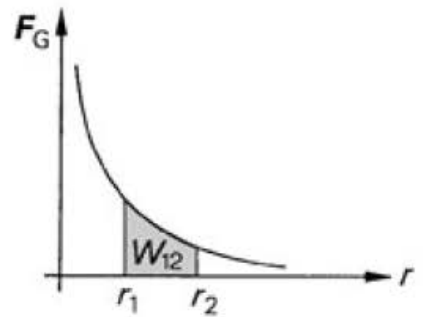
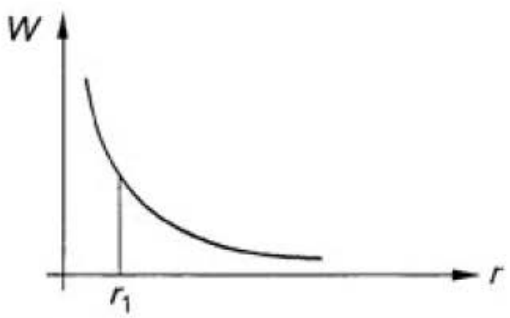
	System	Kraftgesetz	Arbeit
Verformungsarbeit	Feder-Masse-System 	$F_{\text{rueck}} = -k x$ 	$W_{12} = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$ normiert: $W = 0$ für $x_1 = 0$ 
Hubarbeit gegen die Gravitationskraft	Zentralgestirn und Satellit 	$F_G = -G \frac{m M}{r^2}$ 	$W_{12} = G M m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ normiert: $W = 0$ für $r_2 \rightarrow \infty$ 

Abb. 2.34 Arbeit gegen ortsabhängige Kräfte

Gravitationskonstante

G

$$6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$$

Beispiel

2.6-1 Wie groß ist der Arbeitsaufwand beim Dehnen oder Stauchen einer idealen Feder?



Lösung

Nach (2.32) gilt als lineares Kraftgesetz für die Feder auslenkung $F_{\text{rück}} = -kx$. Beim Stauchen oder Dehnen hält die Kraft F der rücktreibenden Systemkraft zu jedem Zeitpunkt das Gleichgewicht: $F = -F_{\text{rück}}$. Die aufzuwendende Arbeit W_{12} beim Dehnen von x_1 auf x_2 ist

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} (-)(-kx) \cdot dx .$$

x und dx sind parallel gerichtet, daher ergibt sich

$$W_{12} = \frac{1}{2}k (x_2^2 - x_1^2) . \quad (2.68)$$

Die aufzuwendende *Verformungsarbeit* nimmt quadratisch mit der Auslenkung zu.

