Fähigkeiten

Arbeiten mit Daten

Manchmal erhält man Daten in Form von Textspalten. Sie sollten in der Lage sein:

- Erwartungswert und Standardabweichung jeder Spalte zu berechnen;
- alle Werte einer Spalte mit einem Wert zu multiplizieren (z.B. könnte eine Spalte die Beschleunigung eines Teilchens zu verschiedenen Zeiten repräsentieren. Multipliziert mit der Masse liefert das die jeweilige Kraft);

Fähigkeiten

Kräfte

Sie sollten die Formeln für die Gravitationskraft, die Coulombkraft, das Federgesetz (Hooke's Gesetz), die Lorentzkraft und die Strömungskraft kennen. Siehe Formelsammlung.

Schwerkraft:
Die Kraft die auf einen Körper mit der Maße m_1 [kg] auf der Position $\vec{r}_1$ [m] durch einen Körper mit der Maße m_2 [kg] auf der Position $\vec{r}_2$ [m] aufgrund der Gravitation wirkt ist:

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\hat{r}_{2\to 1} \qquad [\mathrm{N}].$$

Mit der Gravitationskonstante $G = 6.6726\times 10^{-11}$ N m²/kg² und $\vec{r}_{2\to 1} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ dem Einheitsvektor, der von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ zeigt.

Elektrostatische Kraft:
Die Coulombkraft die auf ein Objekt mit der Ladung q_1 [C] am Ort $\vec{r}_1$ [m] aufgrund einer Ladung q_2 [C] an der Position $\vec{r}_2$ [m] wirkt ist:

$$\vec{F} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\hat{r}_{2\to 1} \qquad [\mathrm{N}].$$

Mit $\epsilon_0 = 8.854187817\times 10^{-12}$ F/m der elektrischen Feldkonstante (oder Vakuumpermittivität) und $\vec{r}_{2\to 1} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ dem Einheitsvektor, der von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ zeigt.

Lineare Federkraft:
Eine lineare Feder übt eine Kraft auf einen Körper aus, der um die Entfernung x [m] von der Ruheposition x_0 verschoben wurde.

$$F = -k(x - x_0) \qquad [\mathrm{N}].$$

Mit k der Federkonstante. Die Einheit von k ist N/m.

Lorentzkraft:
Die Lorentzkraft wirkt auf ein Teilchen mit der Ladung q [C], das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ [m/s] in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ [V/m] und einem magnetischen Feld $\vec{B}$ [T] fortbewegt.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \qquad [\mathrm{N}].$$

Reibungskraft:
Die Reibungskraft wirkt auf einen sich bewegenden Körper und zeigt in die entgegengesetzte Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$:

$$\vec{F}_{drag} = -a\vec{v} - b\vec{v}|\vec{v}|.$$

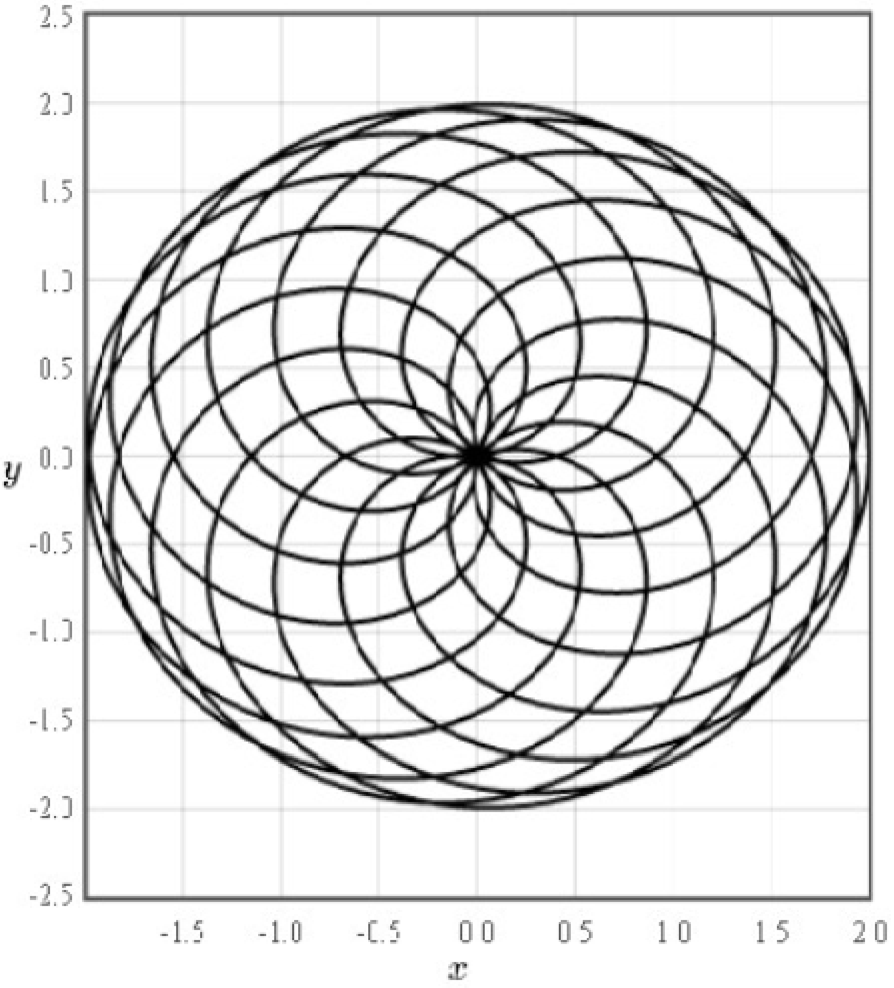
Punktmechanik

$$\vec{r} \Longleftrightarrow \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{a} \Longleftrightarrow \vec{F}$$

Geschwindikeit $\vec{v}$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\hat{x} + \frac{dr_y}{dt}\hat{y} + \frac{dr_z}{dt}\hat{z} \quad [\mathrm{m/s}]$$

Bahnkurve



$$\vec{r}(t) = (\cos(2\pi t) + \cos(7.2\pi\, \mathrm{t}))\,\hat{\mathrm{x}} + (\sin(2\pi t) + \sin(7.2\pi\, \mathrm{t}))\,\hat{y}$$

$\vec{v}(t) =$

Fähigkeiten

Integrieren und Differenzieren

Sie müssen wissen:

- wie man die Funktionen $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, und Polynome x^n, $1/x^n$ integriert und ableitet;
- die Produktregel für Ableitungen;
- die Quotientenregel für Ableitungen;
- die Kettenregel für Ableitungen.

Sie können Ihre Arbeit mit der App für numerische Integration und Differentiation überprüfen.

Mathematica, Wolfram Alpha

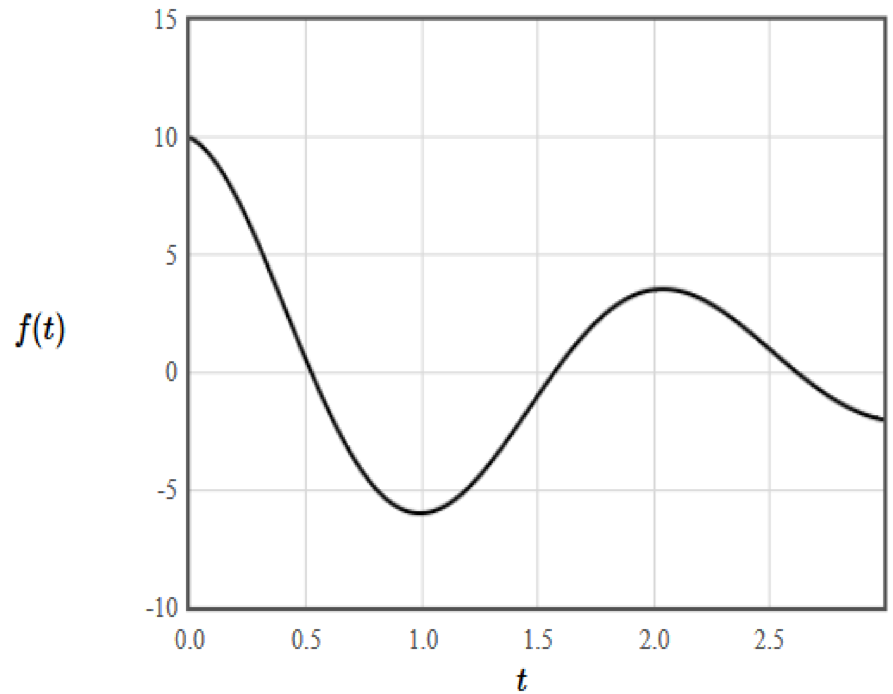
Numerische Integration and Differentiation

$f(t) =$ 3*sin(pi*t) ?

Fill table from $t_1 =$ 0 to $t_2 =$ 1.

t	$f(t)$
0	10
0.01	9.945647572
0.02	9.882682786
0.03	9.811249286
0.04	9.731497077
0.05	9.64358233
0.06	9.547667174
0.07	9.443919485
0.08	9.332512681
0.09	9.2136255
0.1	9.087441788

calculate from table



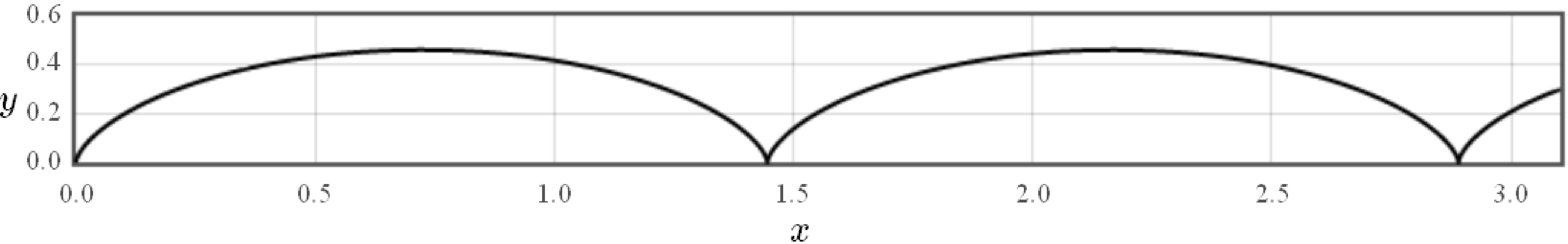
Beschleunigung $\vec{a}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\hat{y} + \frac{dv_z}{dt}\hat{z} \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2 r_x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2 r_y}{dt^2}\hat{y} + \frac{d^2 r_z}{dt^2}\hat{z} \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

Zykloid (Radlaufkurve)

Ein kleiner Stein der Masse $m = 41$ g steckt in einem Autoreifen. Der Radius des Reifens ist $R = 0.23$ m. Der Stein folgt einem Zykloid während der Reifen rollt. Der Reifen rollt mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = 3$ m/s.



Der Positionsvektor der Steines ist:

$$\vec{r}(t) = R\left(\frac{vt}{R} - \sin(\frac{vt}{R})\right)\hat{x} + R\left(1 - \cos(\frac{vt}{R})\right)\hat{y}\ \ [\mathrm{m}].$$

immer Radiant

Kraft $\vec{F}$

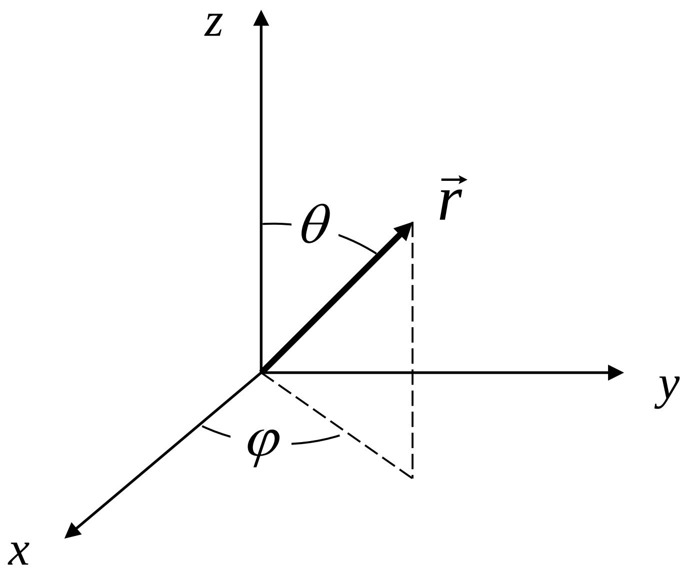
$$\vec{F} = m\vec{a} \quad [\mathrm{N}]$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad [\mathrm{N}]$$

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad [\mathrm{N}]$$

Corioliskraft

$$\vec{r}(t) = R\sin(\Omega t)\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\Omega t)\sin(\omega t)\,\hat{y} + R\cos(\Omega t)\,\hat{z}$$



$\vec{F}$?

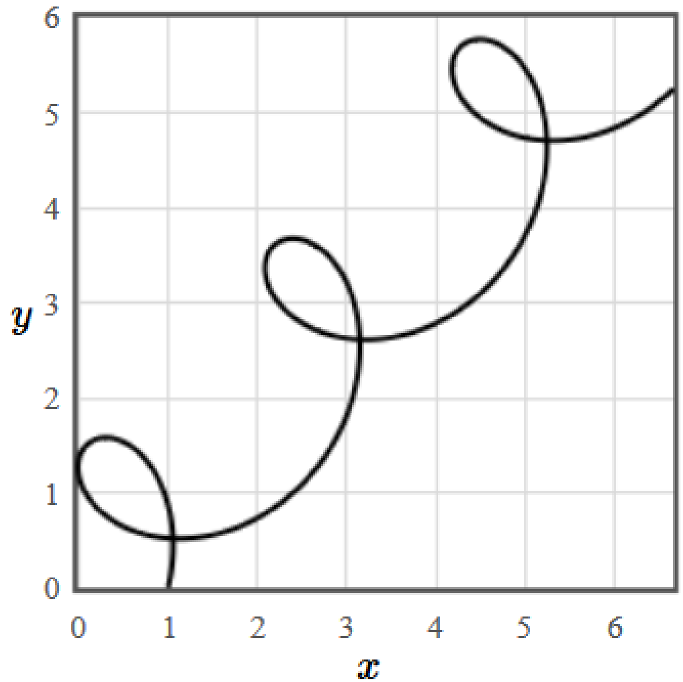
Müssen wir die Coriolis-Kraft für die Prüfung wissen?

Problem 2

Die Bahnkurve eines Teilchens der Masse $m = 33$ g ist,

$$\vec{r}(t) = \left(t + \cos(3t)\right)\hat{x} + \left(t + \sin(3t)\right)\hat{y} \quad [\mathrm{m}].$$

Dabei ist t die Zeit in Sekunden.



Welche Kraft wirkt auf das Teilchen zur Zeit $t = 1$ s?

$$\vec{F} = \boxed{}\,\hat{x} + \boxed{}\,\hat{y} + \boxed{}\,\hat{z}\ [\mathrm{N}]$$

Position → Kraft (numerisch)

Ein auf einer geraden Straße fahrendes Auto hat ein GPS-Gerät installiert, welches die Position des Autos speichert. Die Masse des Autos ist 1175 kg. Welche Kraft wirkt auf das Auto zur Zeit t =20 s?

Differenzieren Sie mittels der APP Numerische Integration.

t [s]	x [m]
0.00	7.0000000
0.500	14.191468
1.00	21.556045
1.50	29.073493
2.00	36.721801
2.50	44.477305
3.00	52.314830
3.50	60.207848
4.00	68.128647
4.50	76.048522
5.00	83.937969

solution

Punktmechanik

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{r} \qquad \vec{v} \qquad \vec{a} \qquad \vec{F}$$

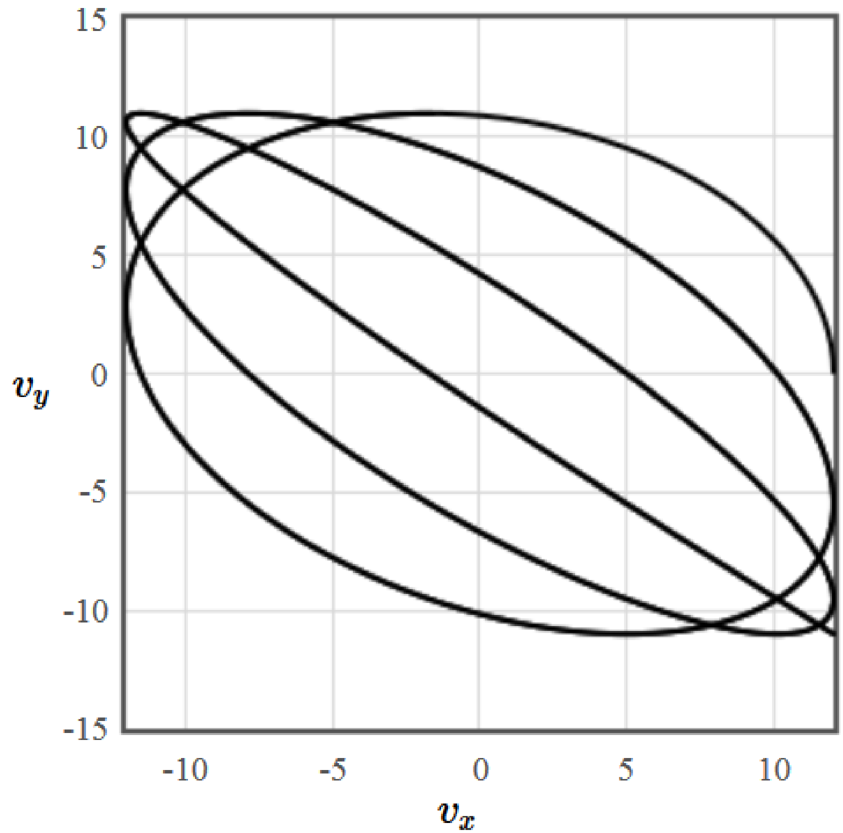
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' + \vec{r}(t_0) \qquad \vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' + \vec{v}(t_0)$$

Problem 1

Eine Biene befindet sich bei $\vec{r} = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Geschwindigkeit der Biene ist,

$$\vec{v}(t) = 12\cos(12t)\hat{x} + 11\sin(11t)\hat{y} \quad [\mathrm{m/s}]$$



Hierbei ist t die Zeit in Sekunden. Wo ist die Biene zum Zeitpunkt $t = 3$ s?

$\vec{r} =$ ☐ $\hat{x} +$ ☐ $\hat{y}$ [m]

konstante Kraft $\vec{F}_0$

$$\vec{F}_0$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_0}{m}$$

$$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt + \vec{v}_0$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{F}_0}{m} t + \vec{v}_0$$

konstante Kraft $\vec{F}_0$

$$\vec{F}_0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_0}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{F}_0}{m} t + \vec{v}_0$$

$$\vec{r} = \int \vec{v} dt + \vec{r}_0$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{F}_0}{2m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

konstante Kraft $\vec{F}_0 = -mg\hat{z}$ $\vec{v}_0 = v_{z0}\hat{z}$ $\vec{r}_0 = 0$

$$\vec{F} = -mg\hat{z} \Rightarrow \vec{a} = -g\hat{z}$$

$$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt + \vec{v}_0$$

$$\vec{v} = \left(-gt + \vec{v}_{z0}\right)\hat{z}$$

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,dt + \vec{r}_0$$

$$\vec{r} = \left(\frac{1}{2}gt^2 + \vec{v}_{z0}t\right)\hat{z}$$

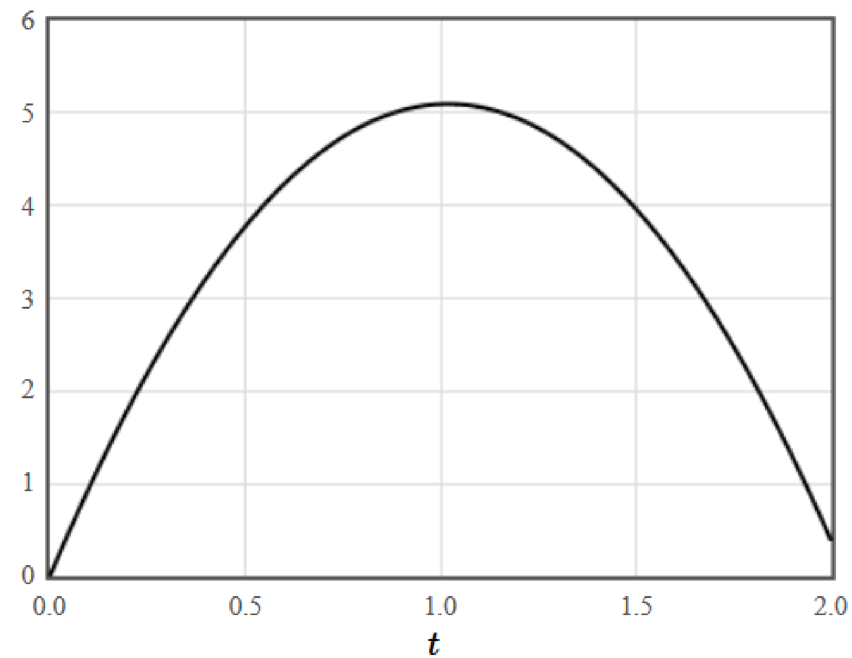
Numerische Integration and Differentiation

$f(t) =$ -9.81 ?

Fill table from $t_1 =$ 0 to $t_2 =$ 2.

t	$f(t)$
0.12	-9.81
0.12666666666666668	-9.81
0.13333333333333333	-9.81
0.14	-9.81
0.14666666666666667	-9.81
0.15333333333333332	-9.81
0.16	-9.81
0.16666666666666666	-9.81
0.17333333333333334	-9.81
0.18	-9.81
0.18666666666666668	-9.81

$\int\left(\int f dt\right) dt'$



Fähigkeiten

Mechanik punktartiger Teilchen

Bei gegebener Position $\vec{r}$ [m], Geschwindigkeit $\vec{v}$ [m/s], Beschleunigung $\vec{a}$ [m/s²], oder Kraft $\vec{F}$ [N] als Funktion der Zeit eines Teilchens, müssen Sie in der Lage dazu sein, jede der vier Grössen durch Integrieren oder Ableiten der anderen Grössen zu erhalten.

App: Numerische Integration und Differentiation von Funktionen in Abhängigkeit von t.