Punktmechanik

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{r} \qquad \vec{v} \qquad \vec{a} \qquad \vec{F}$$

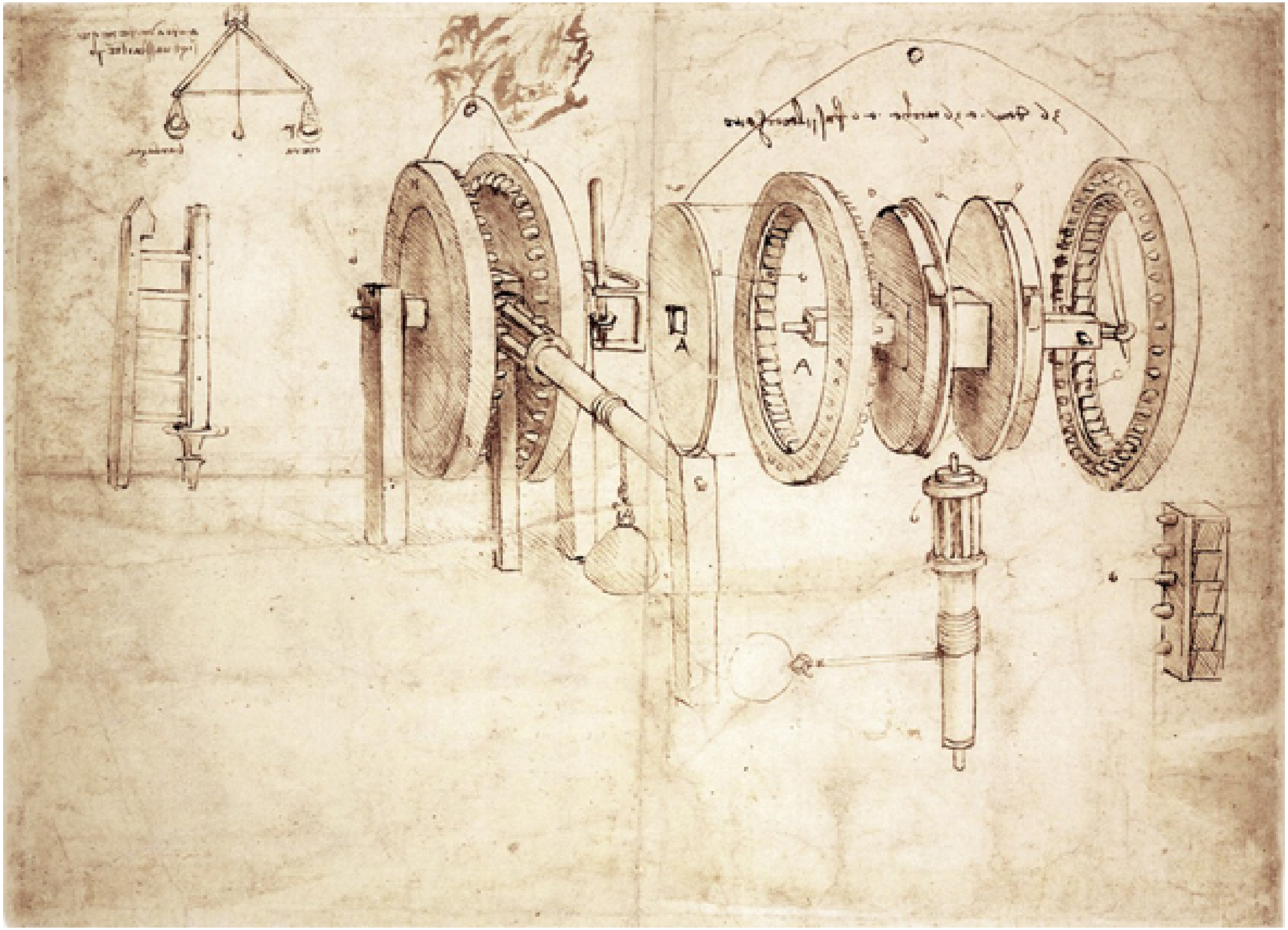
$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' + \vec{r}(t_0) \qquad \vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' + \vec{v}(t_0) \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Bonus Frage

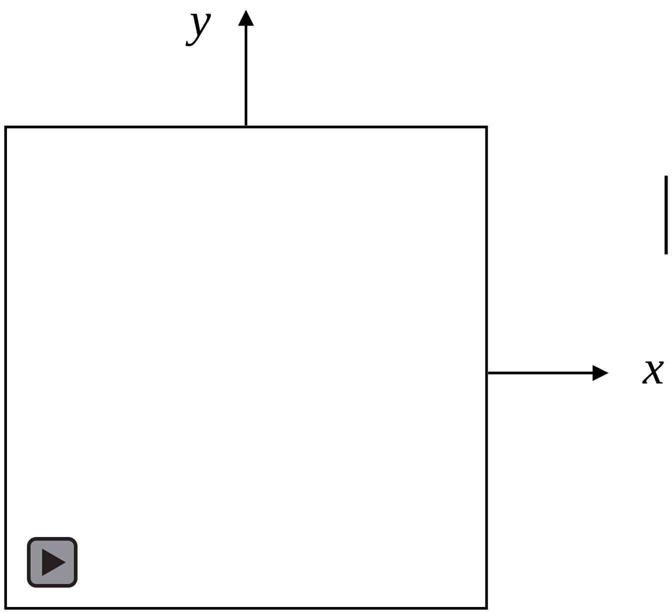
Freitag 13

5. Newtonschen Gesetz
   - Ort ↔ Geschwindigkeit ↔ Beschleunigung ↔ Kraft
     - Geschwindigkeit → Kraft
     - Geschwindigkeit → Position
     - Der Flug einer Biene
     - Harmonische Bewegung
     - Zykloid: Position → Kraft
     - Spirale
     - Eine vertikal hochgeworfene Kugel
     - Eine Kugel wird in einem Winkel θ geworfen
     - Ein Klotz gleitet auf einer schiefen Ebene
   - Numerische Differentation and Integration
     - Beschleunigung → Geschwindigkeit (numerisch)
     - Position → Kraft (numerisch)

Bewegung $\Longleftrightarrow$ Kraft



Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos\left(\omega t\right)\hat{x} + R\sin\left(\omega t\right)\hat{y}$$

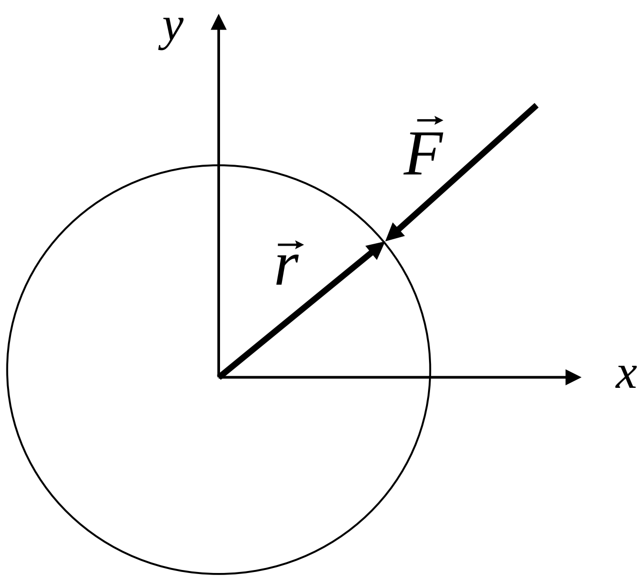
$$\left|\vec{r}\right| = \sqrt{R^2\cos^2(\omega t) + R^2\sin^2(\omega t)} = R$$

$$\omega = 2\pi f$$

Frequenz [1/s] = [Hz]

Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r}$$

$$\left|\vec{F}\right| = \left|m\omega^2 R\right| = \frac{m\left|\vec{v}\right|^2}{R}$$

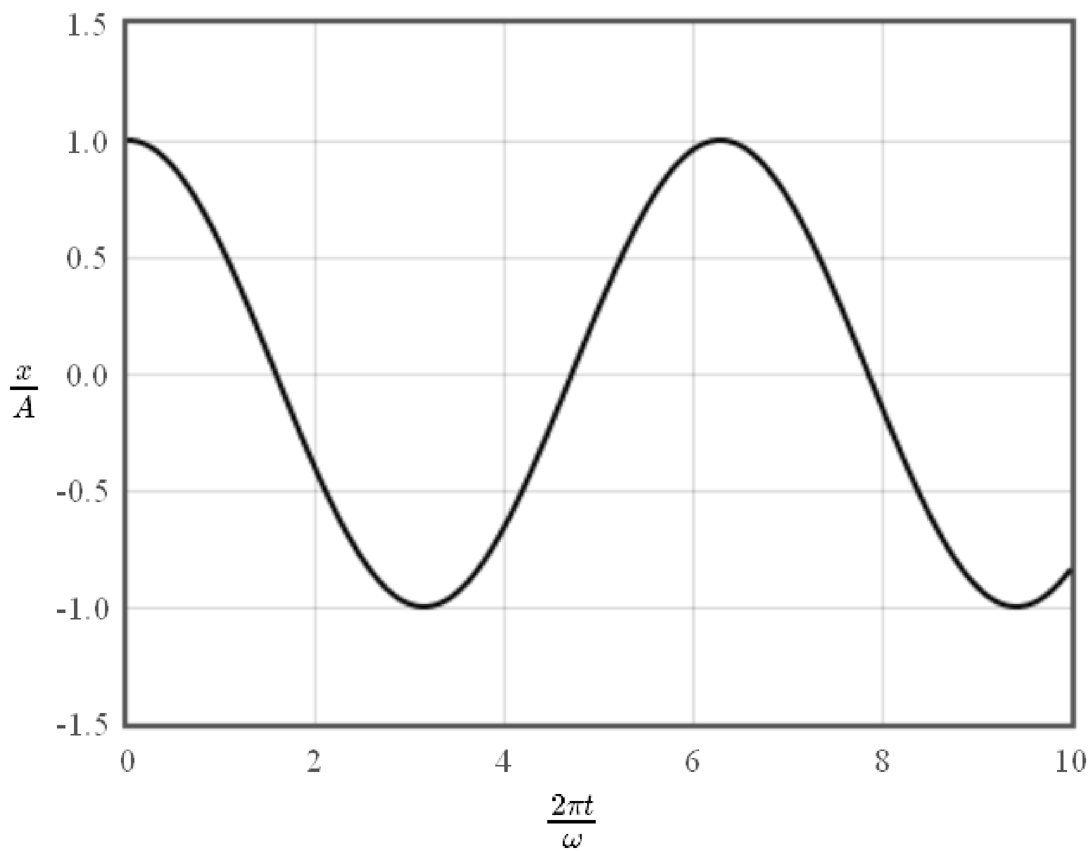
Zentrifugalkraft

Harmonische Bewegung

Die Masse eines Maschinenteiles ist m und in kg angegeben. Die Bewegung des Teiles wird beschrieben durch die Funktion:

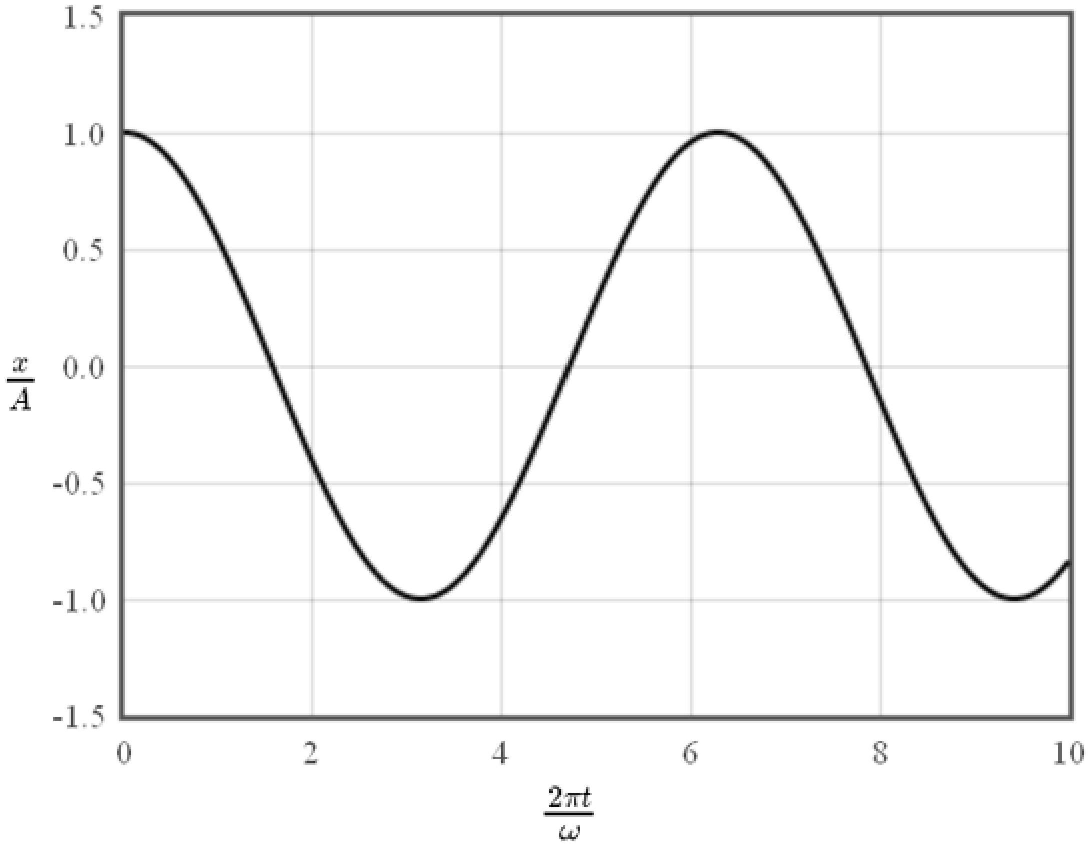
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)\ [\mathrm{m}].$$

Hier ist A die Amplitude der Bewegung, ω ist die Winkelfrequenz angegeben in rad/s, und ϕ ist die Phase. Dies wird einfache harmonische Bewegung genannt.



immer Radiant

Harmonische Bewegung



Radiant

$$x = A\cos(\omega t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t)$$

$$F_x = ma = -m\omega^2 A\cos(\omega t) = -m\omega^2 x$$

$$F_x \propto \omega^2$$

Differentialgleichungen

$$F_x\left(x, v_x, t\right) = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x\left(x, v_x, t\right)}{m}$$

Anfangsbedingungen: $x\left(t=0\right) = x_0$ $\qquad v_x\left(t=0\right) = v_{x0}$

Numerische Lösen von Differentialgleichungen

Anfangsbedingungen: $x\left(t=0\right)=x_0$ $\quad v_x\left(t=0\right)=v_{x0}$

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{F_x\left(x,v_x,t\right)}{m} \qquad \frac{dx}{dt}=v_x$$

$$v_x\left(\Delta t\right)\approx v_{x0}+\frac{dv_x}{dt}\Delta t=v_{x0}+\frac{F_x}{m}\Delta t$$

$$x\left(\Delta t\right)\approx x_0+\frac{dx}{dt}\Delta t=x_0+v_x\Delta t$$

Ball werfen ohne Reibung

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} = \text{-9.81}$$

Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 0 $\quad \Delta t =$ 0.01

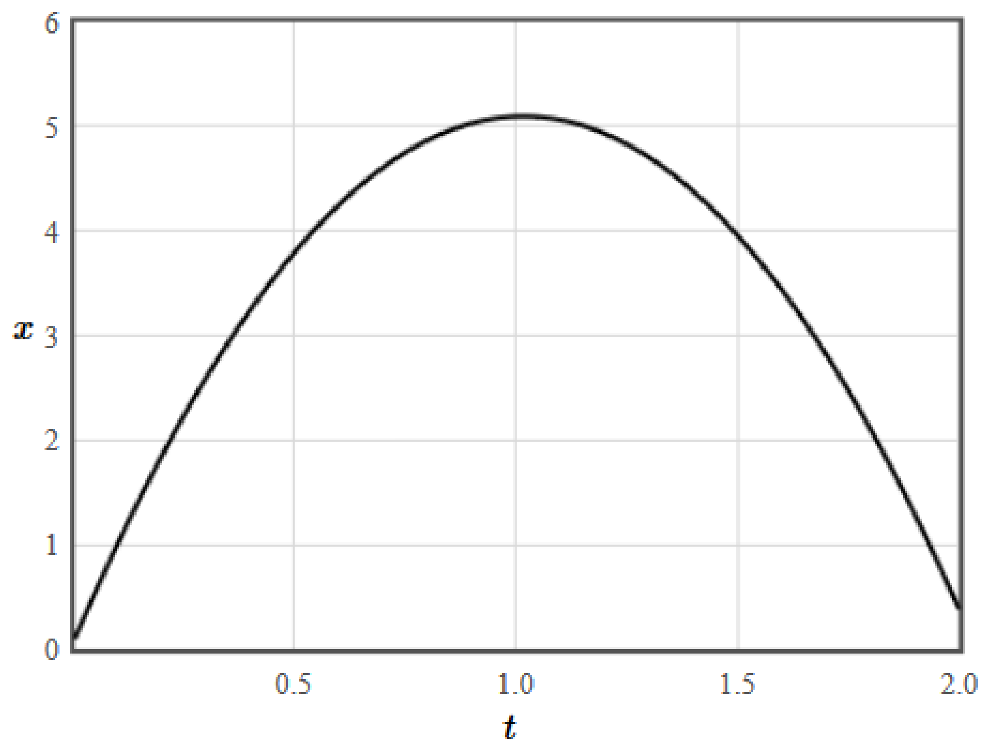
$v_x(t_0) =$ 10 $\quad N_{steps}$ 200

$t_0 =$ 0 $\quad$ Graphische Darstellung: x vs. t

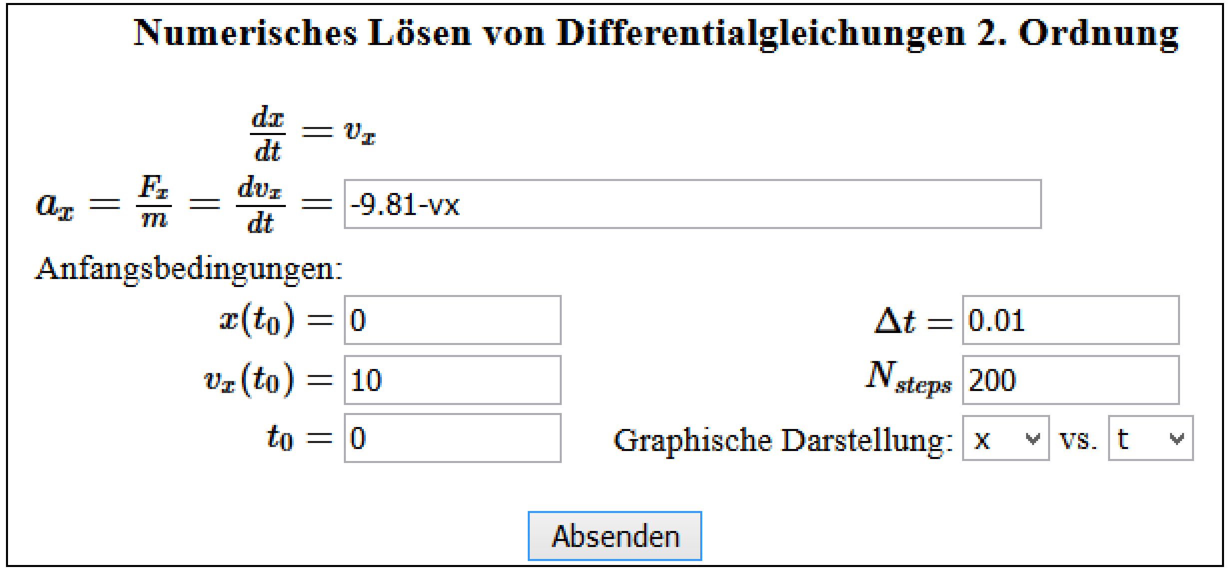
Absenden

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$

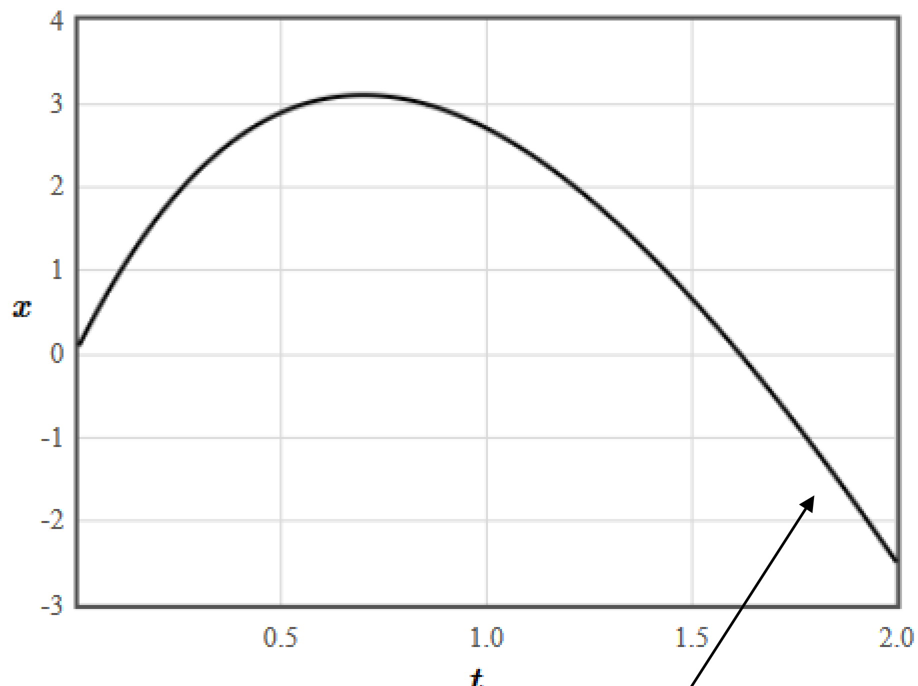


Ball werfen mit Reibung



$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - av_x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g - \frac{a}{m}v_x$$



Endgeschwindigkeit

Massa - Feder mit Reibung

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} =$$ -2*x-0.1*vx

Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 1

$v_x(t_0) =$ 0

$t_0 =$ 0

$\Delta t =$ 0.05

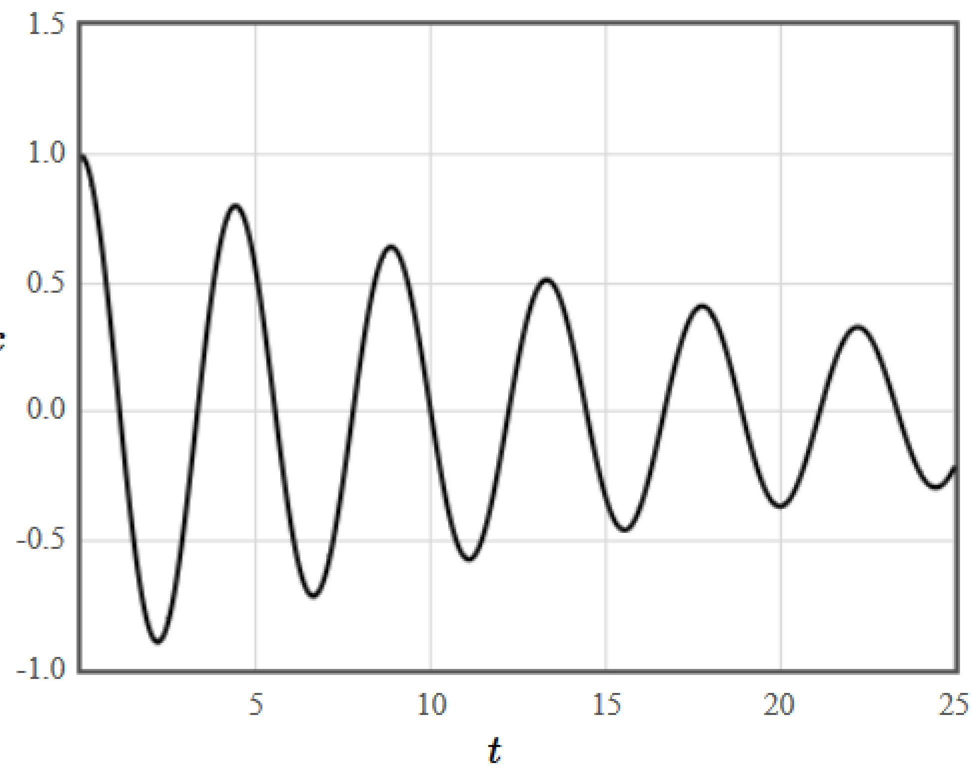
N_{steps} 500

Graphische Darstellung: x vs. t

Absenden

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - av_x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{a}{m}v_x$$



Numerisches Lösen von Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{dv_x}{dt} = F_x(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)/m$$

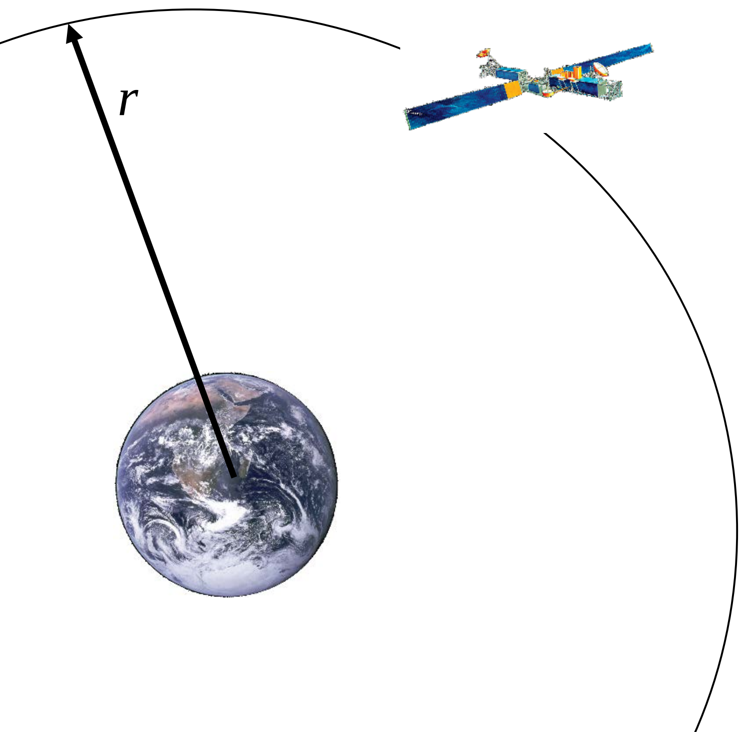
$$\frac{dy}{dt} = v_y \qquad \frac{dv_y}{dt} = F_y(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)/m$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \qquad \frac{dv_z}{dt} = F_z(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)/m$$

Satellitenbahnen

$$\vec{F} = \frac{-G m_{erde} m_{sat}}{r^2} \hat{r}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{-G m_{erde} m_{sat} x}{m_{sat} \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}}$$



Numerical 6th order differential equation solver

$\frac{dx}{dt} = v_x$

$\frac{dv_x}{dt} =$ -x*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

$\frac{dy}{dt} = v_y$

$\frac{dv_y}{dt} =$ -y*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

$\frac{dz}{dt} = v_z$

$\frac{dv_z}{dt} =$ -z*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

Initial conditions:

$t_0 =$ 0

$x(t_0) =$ 0

$v_x(t_0) =$ 7900

$y(t_0) =$ 6371000

$v_y(t_0) =$ 0

$z(t_0) =$ 0

$v_z(t_0) =$ 0

$\Delta t =$ 60

N_{steps} 1500

Plot: y vs. x

Ein Ball wird in den Wind geworfen

$$\vec{F} = -a(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}}) - b(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})|(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})| - mg\hat{z}$$

Numerical 6th order differential equation solver

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} =$$

```
(-0.01*(vx-(1))-0.03*(vx-(1))*sqrt((vx-(1))*(vx-
(1))+(vy-(7*exp(-x*x)))*(vy-(7*exp(-x*x)))+
(vz-(-3*exp(-t*t)))*(vz-(-3*exp(-t*t)))))/0.1
```

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} =$$

```
(-0.01*(vy-(7*exp(-x*x)))-0.03*(vy-
(7*exp(-x*x)))*sqrt((vx-(1))*(vx-(1))+(vy-
(7*exp(-x*x)))*(vy-(7*exp(-x*x)))+
(vz-(-3*exp(-t*t)))*(vz-(-3*exp(-t*t)))))/0.1
```

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_z}{dt} =$$

```
(-0.01*(vz-(-3*exp(-t*t)))-0.03*(vz-
(-3*exp(-t*t)))*sqrt((vx-(1))*(vx-(1))+(vy-
(7*exp(-x*x)))*(vy-(7*exp(-x*x)))+
(vz-(-3*exp(-t*t)))*(vz-(-3*exp(-t*t)))))/0.1-9.81
```

Initial conditions:

$t_0 =$ 0

$x(t_0) =$ 0

$v_x(t_0) =$ -7

$y(t_0) =$ 0

$v_y(t_0) =$ 5

$z(t_0) =$ 0

$v_z(t_0) =$ 10

$\Delta t =$ 0.01

N_{steps} 80

Plot: z vs. t