Fähigkeiten

Arbeit und Energie

Geleistete Arbeit ist definiert als,

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

Dies ist ein Kurvenintegral. Sie müssen dieses Integral ausführen können, wenn die Kraft als Funktion des Ortes bekannt ist (wie in diesem Beispiel) oder wenn die Kraft als Funktion des Ortes, der Geschwindigkeit und der Zeit bekannt und der Ort als Funktion der Zeit gegeben ist (wie in diesem Beispiel). Sie müssen die Leistung durch Ableiten der Arbeit und die Arbeit durch Integrieren der Leistung erhalten können. Sie müssen wissen was eine konservative Kraft ist und die potentielle Energie einer solchen konservativen Kraft bestimmen können. Weiters müssen Sie die kinetische Energie eines Teilchens, $E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$ finden können. Diese Energie bleibt erhalten. Die geleistete Arbeit beinhaltet die Änderung der kinetischen plus die Änderung der potentiellen Energie, sowie die Arbeit die benötigt wird um gegen nichtkonservative (reibungsbedingte) Kräfte zu wirken.

Apps: Numerische Integration und Differentiation von Funktionen in Abhängigkeit von t, Numerische Integration und Differentiation von Funktionen in Abhängigkeit von x.

Energieerhaltungssatz

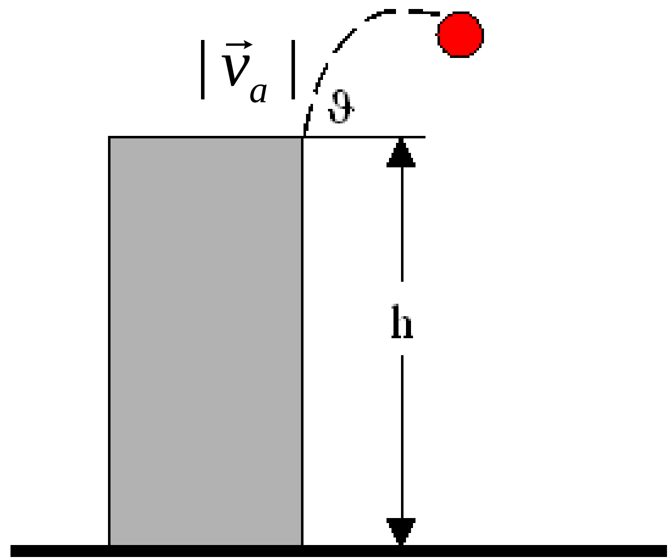
$$\Delta E = 0$$

$$E_{kin,nachher} - E_{kin,vorher} + W = 0$$

konservative Kräfte:

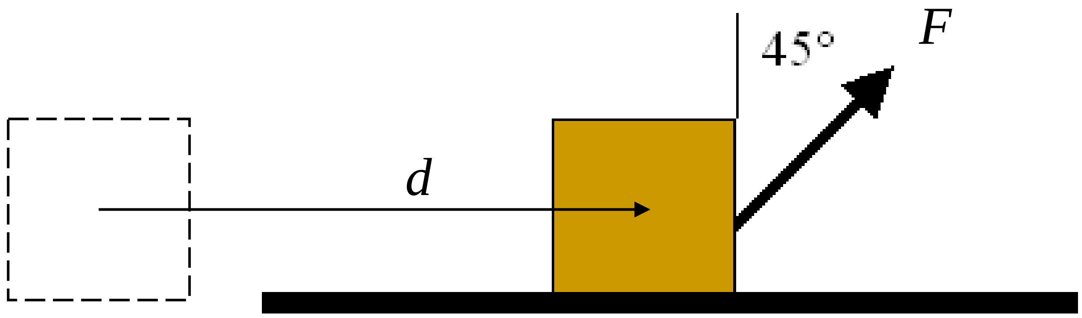
$$E_{pot,nachher} - E_{pot,vorher} + E_{kin,nachher} - E_{kin,vorher} = 0$$

Energieerhaltungssatz



$$|\vec{v}(y=0)|\,?$$

Energieerhaltungssatz



$$E_{therm}\ ?$$

konservative Kraft → Potentielle energie

$$E_{pot}(x,y,z) = -W$$

	Kraft	Potentielle energie
Schwerkraft	$\vec{F} = -mg\ \hat{y}$	$E_{pot}(x,y,z) = mgy$
Feder	$\vec{F} = -kx\ \hat{x}$	$E_{pot}(x,y,z) = \frac{kx^2}{2}$
Gravitation	$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\ \hat{r}$	$E_{pot}(x,y,z) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
Coulomb	$\vec{F} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$	$E_{pot}(x,y,z) = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

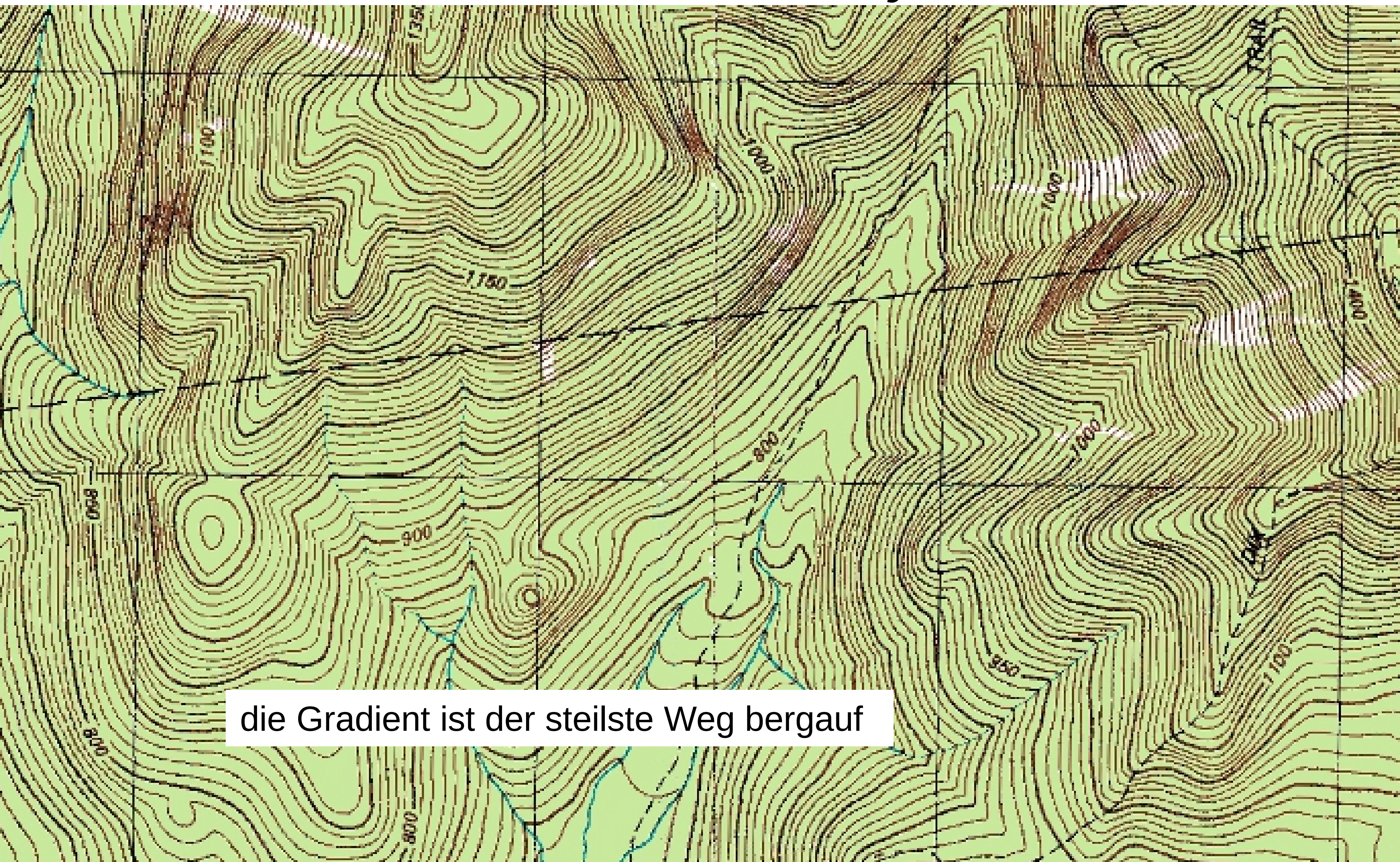
Potentielle energie → Kraft

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot}(x, y, z)$$

Gradient: $$\nabla E_{pot} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\hat{z}$$

Partielle Ableitung

$$\nabla h(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial h}{\partial y}\hat{y}$$



die Gradient ist der steilste Weg bergauf

Potentielle energie → konservative Kraft

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot}(x, y, z)$$

	Potentielle energie	Kraft
Schwerkraft	$E_{pot}(x, y, z) = mgy$	$\vec{F} = -mg\ \hat{y}$
Feder	$E_{pot}(x, y, z) = \dfrac{kx^2}{2}$	$\vec{F} = -kx\ \hat{x}$
Gravitation	$E_{pot}(x, y, z) = -\dfrac{Gm_1m_2}{r}$	$\vec{F} = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\ \hat{r}$
Coulomb	$E_{pot}(x, y, z) = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\vec{F} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$

Gradient

Der Druck P ist in einem bestimmten Gebiet im Raum durch die folgende Funktion bestimmt:

$$P = 7x^3y^{-9}z^6$$

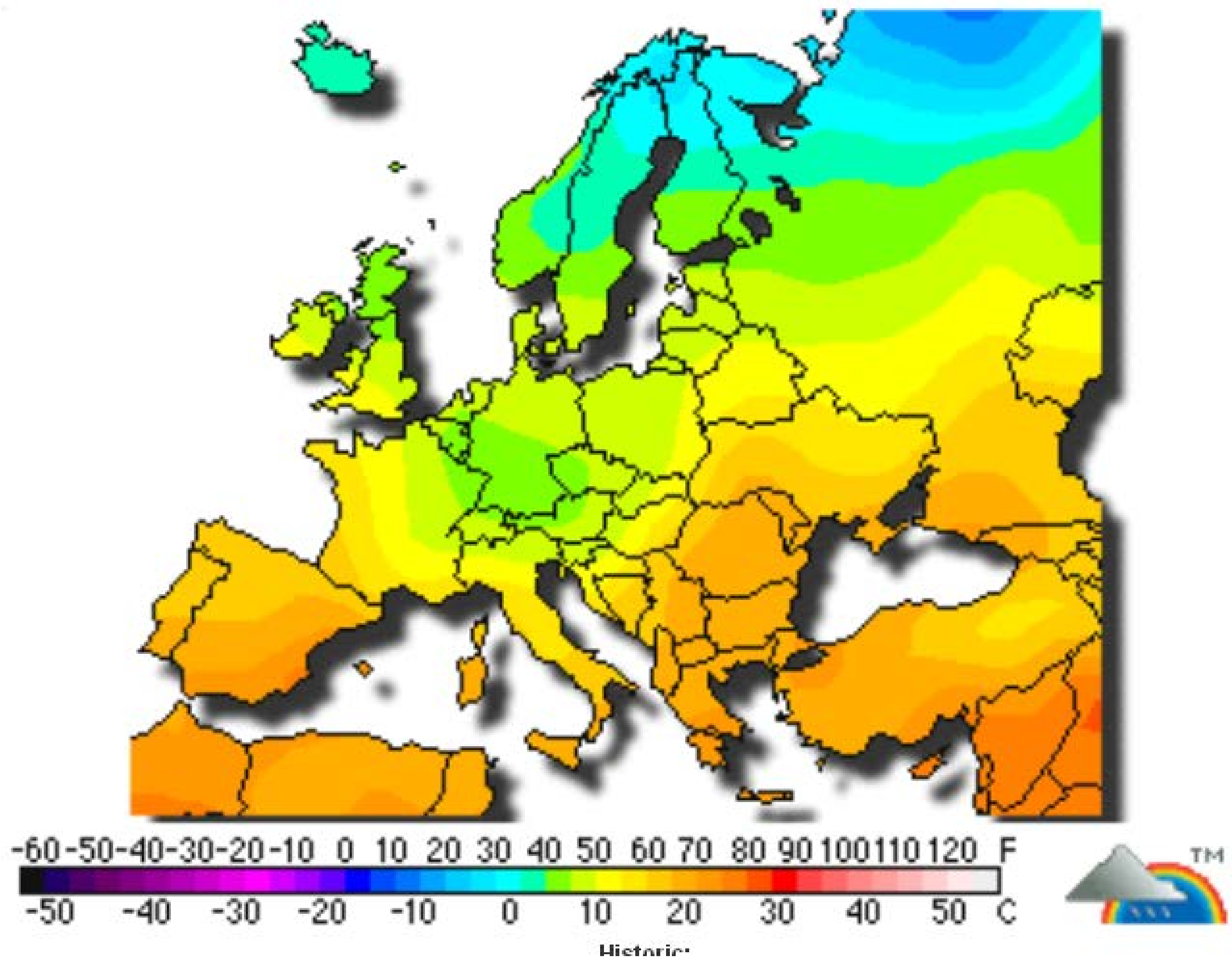
Berechnen Sie den Gradienten des Drucks!

$\nabla P =$ [ ] $\hat{x}$ + [ ] $\hat{y}$ + [ ] $\hat{z}$ [K/m]

Lösung

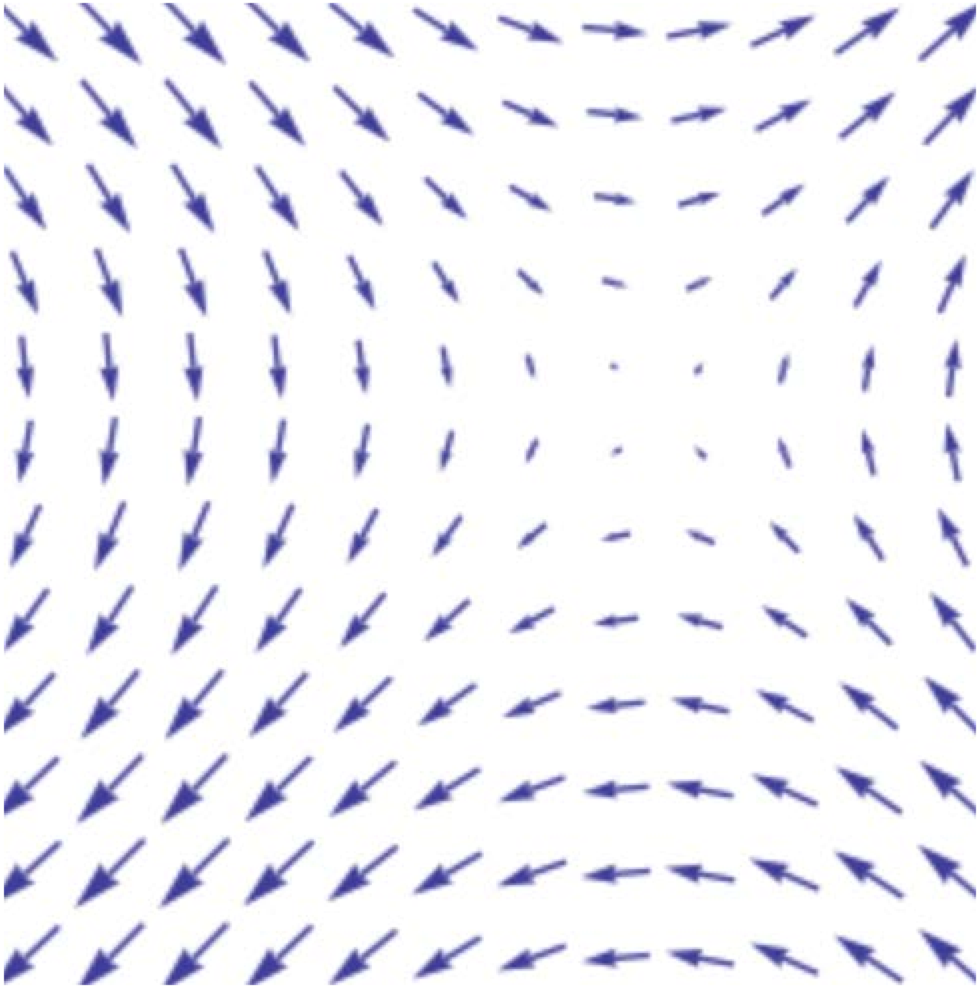
$$\nabla P = (21x^2y^{-9}z^6)\hat{x} + (-63x^3y^{-10}z^6)\hat{y} + (42x^3y^{-9}z^5)\hat{z}.$$

Skalarfeld



Potentielle energie ist ein Skalarfeld

Vektorfeld



Elektrisches Feld, Magnetfeld

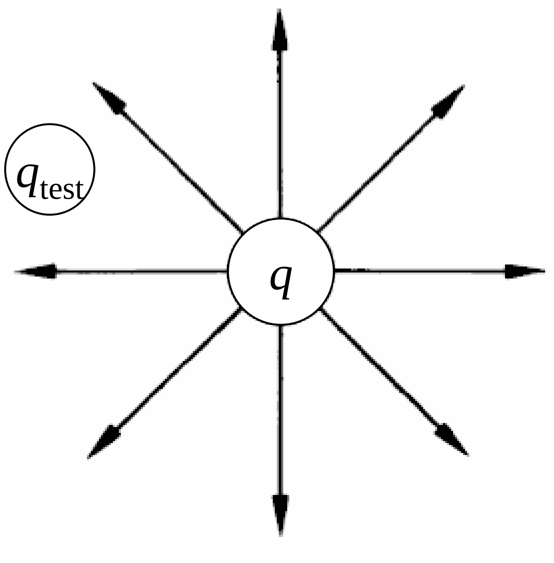
Coulombsches Gesetz

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$$

$$E_{pot}(x, y, z) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot}$$

Das elektrische Feld verursacht durch eine Ladung *q*



$$\vec{F} = \frac{q_{test}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

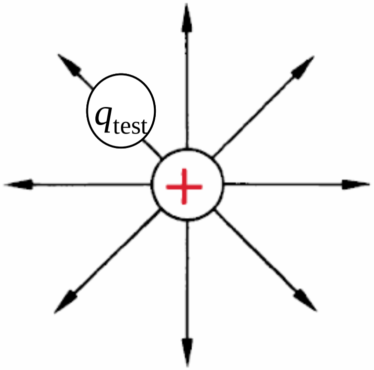
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F} = q_{test}\vec{E}$$

Vektorfeld

Elektrostatische Potential

Elektrostatische Potential $$\varphi(\vec{r}) = \frac{E_{pot}}{q_{test}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$\vec{F} = -\nabla E_{pot} \qquad E_{pot} = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi \qquad \varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Arbeit: $$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q_{test} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_{test} \left(\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) \right)$$

$$E(x,y,z) = -\left(\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\, i}_{E_x} + \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\, j}_{E_y} + \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\, k}_{E_z} \right) \tag{4.102}$$

Elektrostatische Potential φ

Gleichung (4.102) kann auch mit dem *Vektoroperator Gradient*

$$\mathbf{grad} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

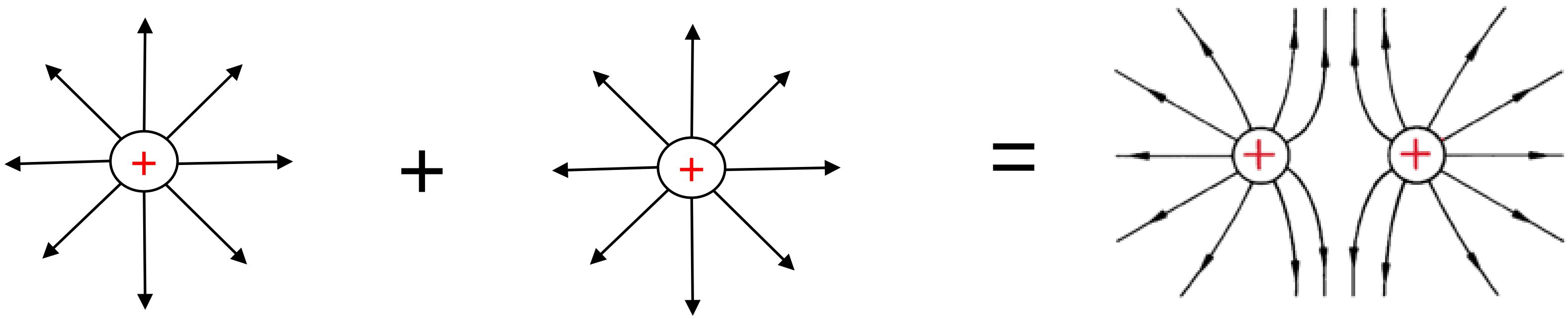
Hering

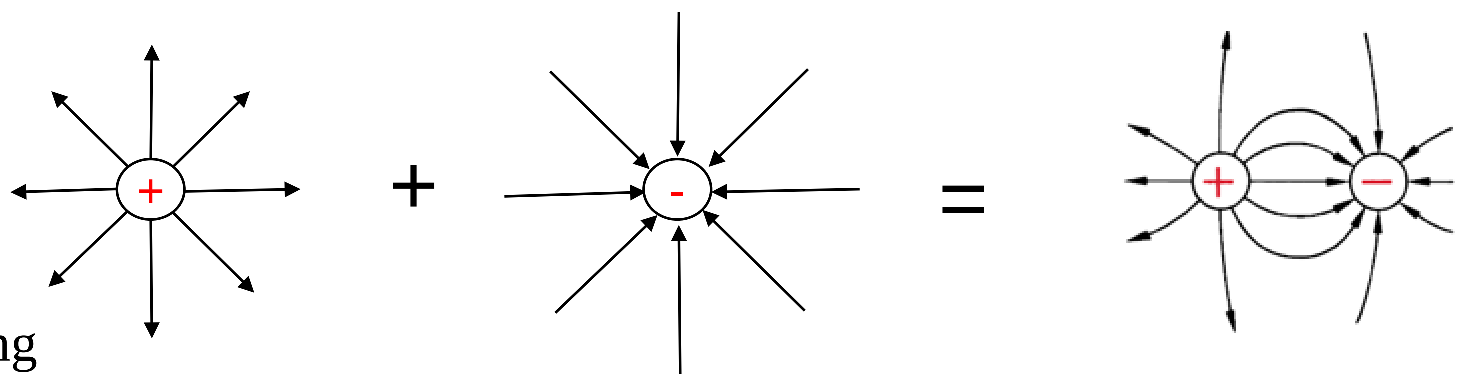
formuliert werden:

$$E = -\mathbf{grad}\, \varphi\, . \tag{4.103}$$

Elektrisches Feld

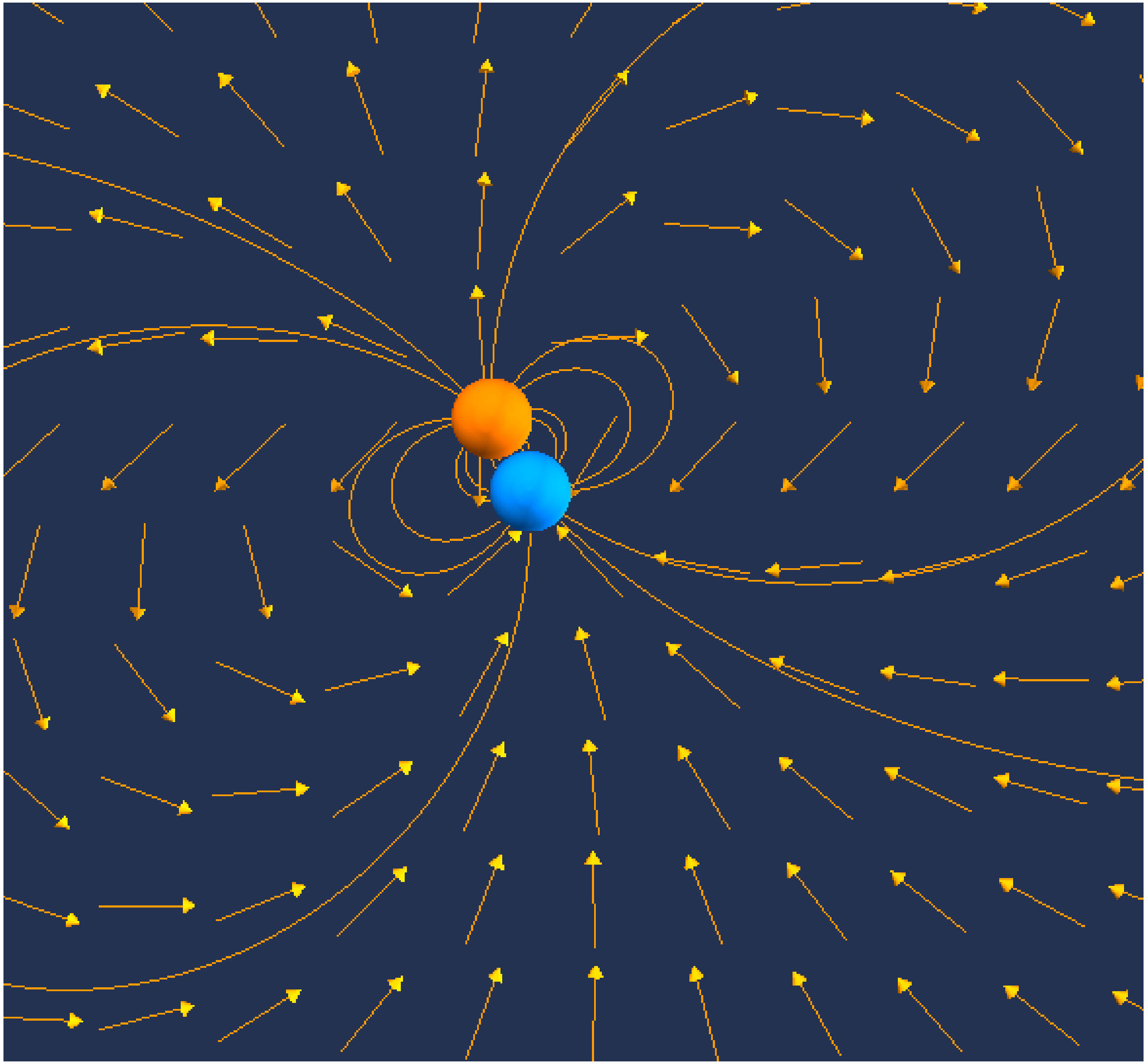
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^2}\hat{r}_{ri\to r} = \sum_i \frac{q_i\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}$$





Hering

Äquipotentialfläche - Feldlinien



http://public.mitx.mit.edu/gwt-teal/PCharges.html

Punktladungsverteilung

Kraft $$\vec{F}(\vec{r}) = q_{test} \sum_i \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

Elektrisches Feld $$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

Elektrostatische Potential $$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Elektrisches Feld einer Punktladungsverteilung

Das elektrostatische Potential φ einer Punktladungsverteilung ist

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}} \text{ [V].}$$

Dabei sind q_i die Ladungen und $\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$ die Positionen der Punktladungen. Die Beziehung zwischen elektrischem Feld und elektrostatischem Potential ist $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \text{ [V/m].}$$

Das elektrische Feld lautet in x, y und z Koordinaten:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{q_i(x-x_i)}{4\pi\epsilon_0\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}\hat{x} + \frac{q_i(y-y_i)}{4\pi\epsilon_0\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}\hat{y} + \frac{q_i(z-z_i)}{4\pi\epsilon_0\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}\hat{z} \right] \text{ [V/m}$$

Im folgenden Formular können Sie Ladungen und Positionen von bis zu 10 Punktladungen angeben. Für diese wird das elektrostatische Potential und das elektrische Feld an Ort $\vec{r}$ berechnet. Der Nullpunkt des Potentials sei sehr weit von allen Ladungen entfernt.

$\vec{r} =$ 1 $\hat{x} +$ 0 $\hat{y} +$ 0 $\hat{z}$ [m]

Berechne φ und E an der Position r

$\varphi(\vec{r}) =$ [V]

$\vec{E}(\vec{r}) =$ $\hat{x} +$ $\hat{y} +$ $\hat{z}$ [V/m]

$q_1 =$ 1E-6 [C] $\vec{r}_1 =$ 0 $\hat{x} +$ 0 $\hat{y} +$ 0 $\hat{z}$ [m]

$q_2 =$ [C] $\vec{r}_2 =$ $\hat{x} +$ $\hat{y} +$ $\hat{z}$ [m]

$q_3 =$ [C] $\vec{r}_3 =$ $\hat{x} +$ $\hat{y} +$ $\hat{z}$ [m]

$q_4 =$ [C] $\vec{r}_4 =$ $\hat{x} +$ $\hat{y} +$ $\hat{z}$ [m]

$q_5 =$ [C] $\vec{r}_5 =$ $\hat{x} +$ $\hat{y} +$ $\hat{z}$ [m]

Lehrplan
Bücher
Testfragen
Vorlesungen
Apps

Elektrisches Feld einer Ladungsverteilung auf einer gekrümmten Linie

Gegeben sei ein Draht der Länge L mit einer uniformen Ladungsdichte λ. Dieser Draht kann in verschiedene Formen gebogen werden. Das elektrostatische Potential φ, welches durch den Draht aufgebaut wird, kann bestimmt werden, indem der Draht in kurze Segmente geteilt wird und Beiträge aller Segmente aufsummiert werden. Die Segmente haben eine Länge Δs und eine Ladung $\Delta q = \lambda\Delta s$. Deren Beitrag zum elektrostatischen Potential an der Position $\vec{r}$ ist:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}} \text{ [V].}$$

Hier sind $\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$ die Positionen der Punktladungen entlang des Drahts. Die Beziehung zwischen elektrischem Feld und elektrostatischem Potential ist $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \text{ [V/m]}$$

Das elektrische Feld lautet in x, y und z Koordinaten:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{q_i(x-x_i)}{4\pi\epsilon_0\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}\hat{x} + \frac{q_i(y-y_i)}{4\pi\epsilon_0\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}\hat{y} + \frac{q_i(z-z_i)}{4\pi\epsilon_0\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}\hat{z}\right] \text{ [V/m].}$$

Die Lage und Form des Drahtes kann mit einer parametrischen Gleichung unter Verwendung eines Parameters s, der die Distanz entlang des Drahtes mißt, festgelegt werden. Beispielsweise wird ein gerader Draht von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ beschrieben durch:

$$\vec{r}_{wire} = (r_{1x} + s(r_{2x} - r_{1x}))\hat{x} + (r_{1y} + s(r_{2y} - r_{1y}))\hat{y} + (r_{1z} + s(r_{2z} - r_{1z}))\hat{z} \quad \text{mit } s = [0,1].$$

Für eine Drahtschleife des Radiuses R in der x-y Ebene an $z = 0$:

$$\vec{r}_{wire} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + 0\hat{z} \quad \text{mit } s = [0,1].$$

Für eine Drahtwendel mit 10 Windungen

$$\vec{r}_{wire} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + \frac{s}{n}\hat{z} \quad \text{mit } s = [0,10],$$