Elektrostatik

$$\rho$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \boxed{\varepsilon_r} \varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} (\vec{r}-\vec{r}\,') d^3 r'$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\boxed{\varepsilon_r} \varepsilon_0}$$

$$\vec{E}$$

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} + \varphi_0$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\varphi$$

Elektrostatisches Potential → elektrisches Feld

Sei das elektrostatische Potential in einem gewissen räumlichen Bereich

$$\varphi = -3019x + 4579y - 7140z \text{ [V]},$$

wobei hier x, y und z in Metern gegeben seien. Welches elektrische Feld hat man in diesem Bereich?

$\vec{E} =$ ______ $\hat{x} +$ ______ $\hat{y} +$ ______ $\hat{z}$ [V/m] Lösung

Elektrisches Feld → Ladungsdichte

Das elektrische Feld in einer Siliziumdiode sei beschrieben durch:

$$\vec{E} = 0.80 \times 10^5 \exp\left(-10^{10}(2x+2y)^2\right)\hat{x} + 0.80 \times 10^5 \exp\left(-10^{10}(2x+2y)^2\right)\hat{y} \text{ [V/m]}.$$

Dabei sind x und y in Metern angegeben. Wie lautet die Ladungsdichte in dieser Region?

Die relative dielektrische Konstante von Silizium ist $\epsilon_r = 12$. Die elektrische Feldkonstante ist $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m.

$\rho =$ [C/m³] Lösung

Magnetostatik

$$I$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{i})}{|\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{i}|^3}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (4.171)$$

$$\vec{B}$$

Biot-Savart'sches Gesetz

Ampèresches Gesetz

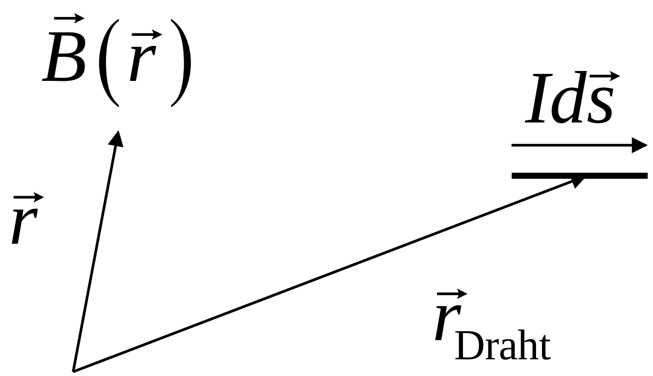
Magnetostatik (kleine Leiterstück)

Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \left(\vec{r} - \vec{r}_{\text{Draht}}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_{\text{Draht}}\right|^3} \qquad (4.176)$$

I

$\vec{B}$



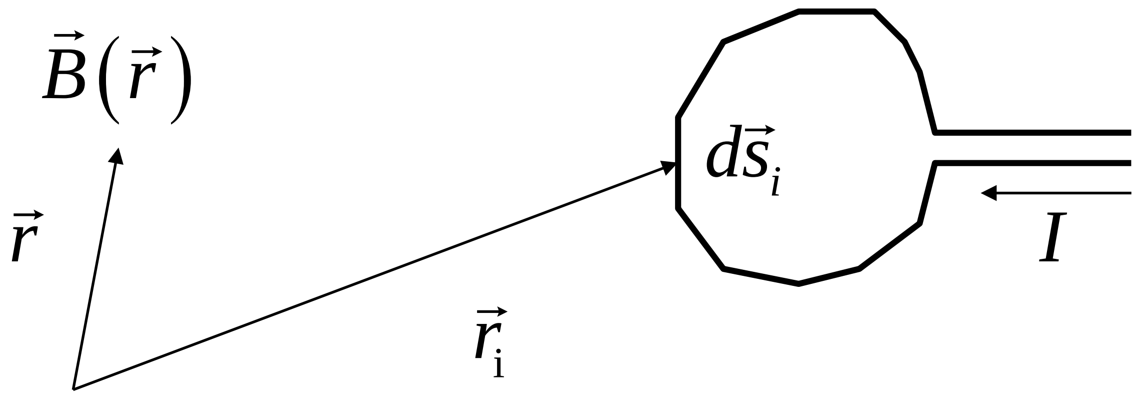
$d\vec{s}$ ist in der Richtung des Stroms

Magnetostatik

I

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{i})}{\left|\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{i}\right|^3}$$

$\vec{B}$



Biot-Savart'sches Gesetz

Das magnetische Feld, welches von einem durch einen Draht fließenden elektrischen Strom I hervorgerufen wird, kann bestimmt werden, indem der Strompfad in kurze Segmente geteilt wird und Beiträge aller Segmente aufsummiert werden. Der Beitrag zum magnetischen Feld an der Position $\vec{r}$ hervorgerufen durch ein kurzes Längensegment $d\vec{s}$ an $\vec{r}_{wire}$ ist:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{r}_{wire})}{|\vec{r}-\vec{r}_{wire}|^3}\ \textbf{[T]}.$$

Dabei zeigt $d\vec{s}$ zeigt in die Richtung des Stromflusses. Die Konstante $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$ T m/A ist die magnetische Feldkonstante.

Die Lage und Form des Drahtes kann mit einer parametrischen Gleichung unter Verwendung eines Parameters s, der die Distanz entlang des Drahtes mißt, festgelegt werden. Beispielsweise wird ein gerader Draht von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ beschrieben durch:

$$\vec{r}_{wire} = (r_{1x}+s(r_{2x}-r_{1x}))\hat{x} + (r_{1y}+s(r_{2y}-r_{1y}))\hat{y} + (r_{1z}+s(r_{2z}-r_{1z}))\hat{z} \quad \text{mit } s=[0,1].$$

Für eine Drahtschleife des Radiuses R in der x-y Ebene an $z=0$:

$$\vec{r}_{wire} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + 0\hat{z} \quad \text{mit } s=[0,1].$$

Für eine Drahtwendel mit 10 Windungen

$$\vec{r}_{wire} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + \frac{s}{n}\ \hat{z} \quad \text{mit } s=[0,10],$$

wobei n die Anzahl der Windungen per Meter auf der Wendel ist. Das folgende Formular kann benutzt werden, um das magnetische Feld an der Position $\vec{r}$ zu berechnen.

Die Position, an der $\vec{B}$ berechnet wird:

$\vec{r} =$ 0 $\hat{x}$ + 0 $\hat{y}$ + 0.005 $\hat{z}$ [m].

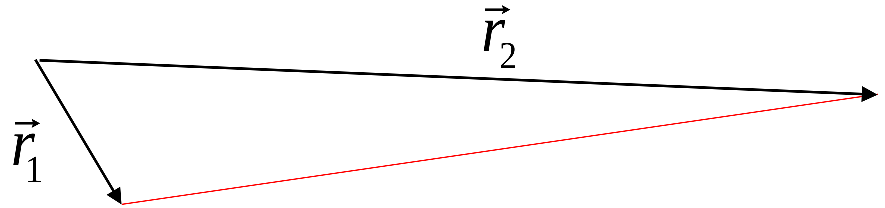
Die parametrischen Gleichungen zur Beschreibung des Drahtes:

$\vec{r}_{wire} =$ 0.1*cos(2*pi*s) $\hat{x}$ + 0.1*sin(2*pi*s) $\hat{y}$ + s/1000 $\hat{z}$ [m].

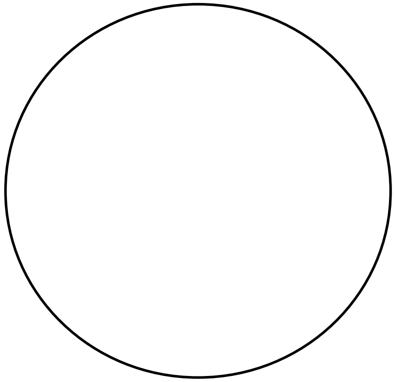
s ist definiert von $s =$ 0 bis $s =$ 10 in 3000 Segmenten.

Der Strom: $I =$ 10 [A].

Parameterdarstellung



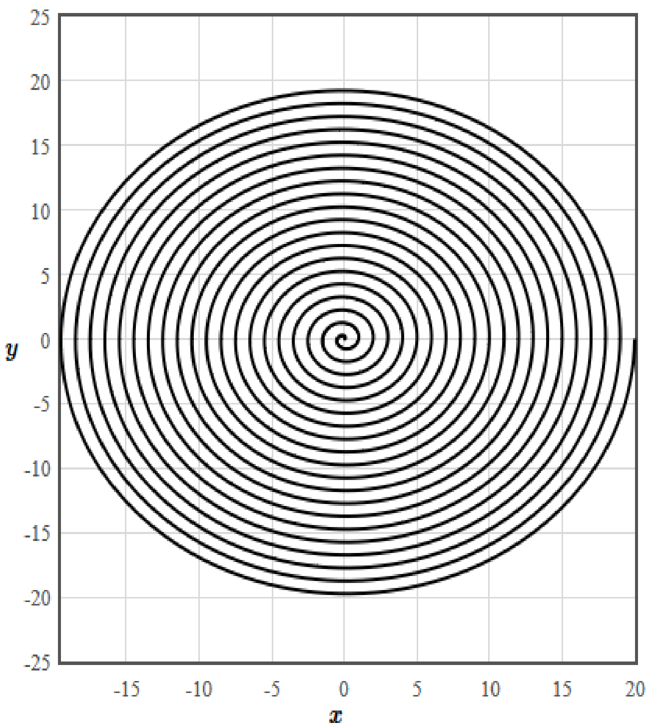
$$\vec{r} = \left(r_{1x} + (r_{2x} - r_{1x})s\right)\hat{x} + \left(r_{1y} + (r_{2y} - r_{1y})s\right)\hat{y} + \left(r_{1z} + (r_{2z} - r_{1z})s\right)\hat{z} \qquad s = [0,1]$$



$$\vec{r} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + 0\hat{z} \qquad s = [0,1]$$

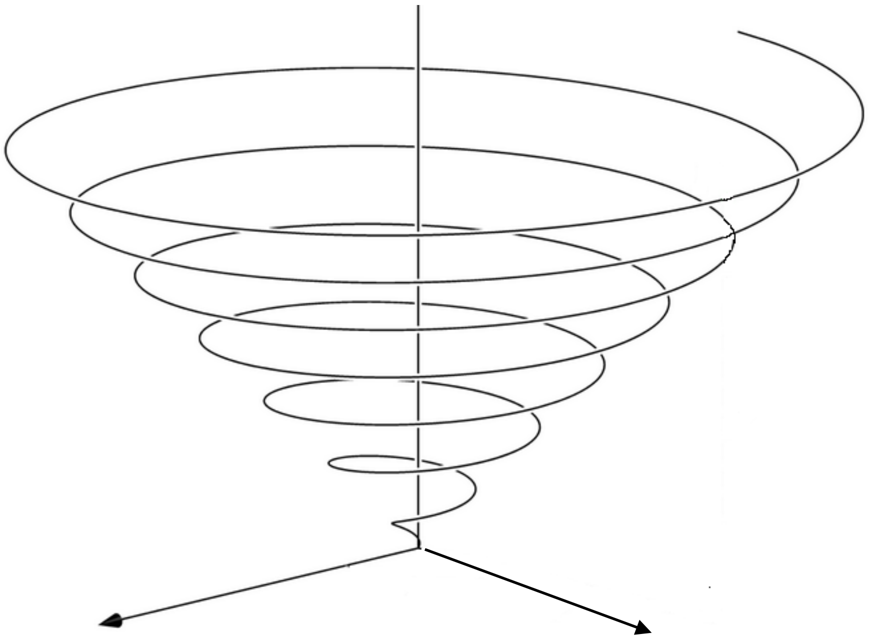
$$\vec{r} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + \frac{s}{n}\hat{z} \qquad s = [0,10]$$

Parameterdarstellung



$$\vec{r} = s\cos(2\pi s)\hat{x} + s\sin(2\pi s)\hat{y} + 0\hat{z}$$

$$s = [0, 20]$$

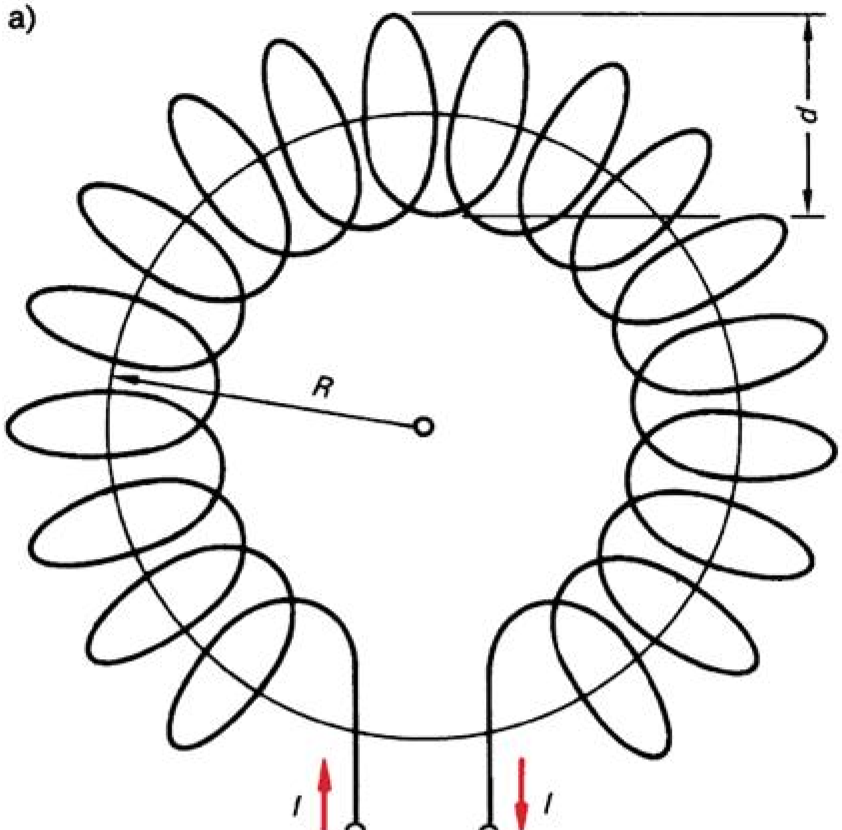


$$\vec{r} = s\cos(2\pi s)\hat{x} + s\sin(2\pi s)\hat{y} + \frac{s}{n}\hat{z}$$

$$s = [0,10]$$

Parameterdarstellung

$$\vec{r} = \cos(2\pi s)\left(R + r\cos(20\pi s)\right)\hat{x} + \sin(2\pi s)\left(R + r\cos(20\pi s)\right)\hat{y} + r\sin(20\pi s)\hat{z}$$



$$s = \left[0,1\right]$$

Ringspule

Fähigkeiten

Parametrisierung

Sie sollten es beherrschen Parameterdarstellungen zu benützen um Kurven darzustellen. Beispielsweise beschreibt $x = \cos(s)$, $y = \sin(s)$, $s = [0, \pi]$ einen halben Kreis und $x = 2\cos(s)$, $y = 3\sin(s)$, $s = [0, 2\pi]$ eine Ellipse. s ist in diesem Fall der Parameter.

Apps: Elektrisches Feld einer gleichmäßig geladenen gekrümmten Linie, Gesetz von Biot-Savart.

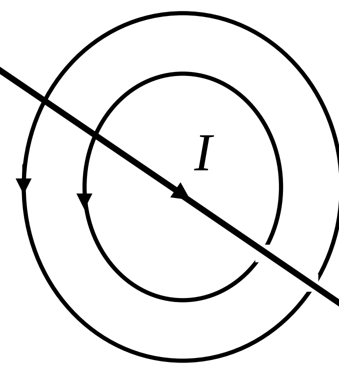
unendlich langen geraden Leiter

Ampèresches Gesetz
(integrale Form)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (4.171)$$

$$2\pi R \left| \vec{B} \right| = \mu_0 I$$

$$\left| \vec{B} \right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \qquad (4.173)$$

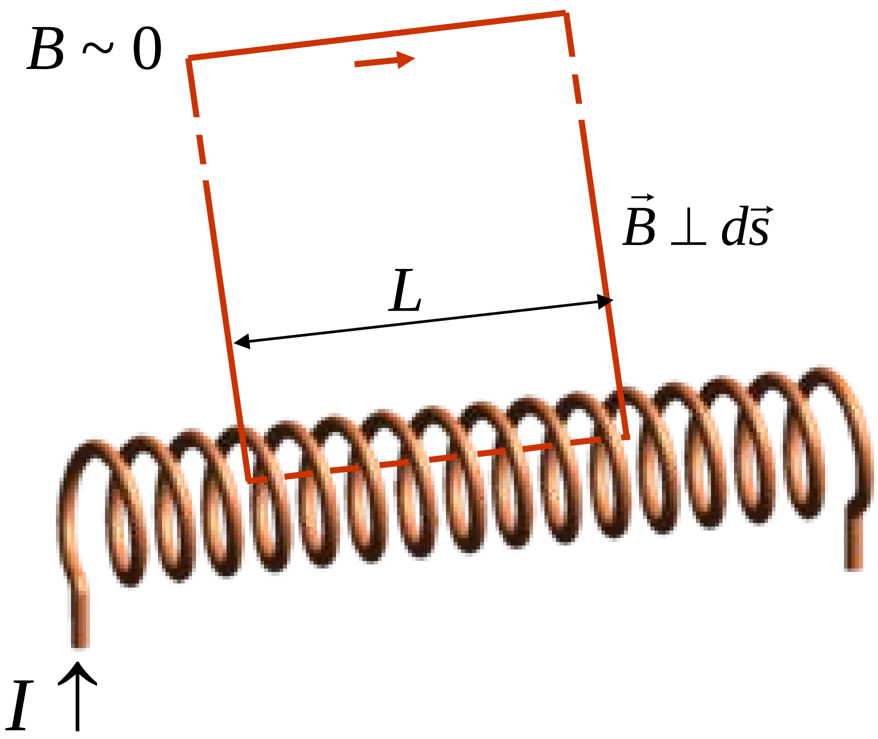


Rechte-Hand-Regel

unendlich langen Zylinderspule

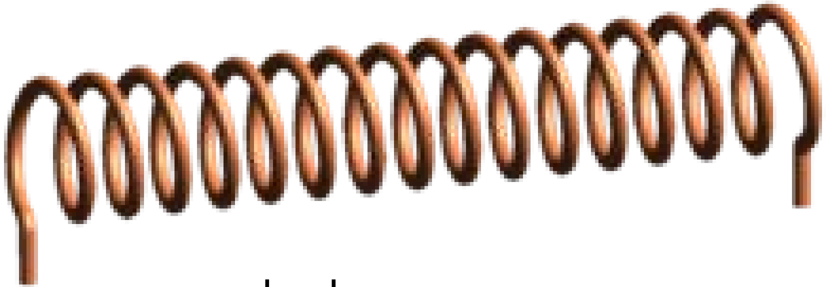
Ampèresches Gesetz
(integrale Form)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (4.171)$$



$$L\left|\vec{B}\right| = \mu_0 N I$$

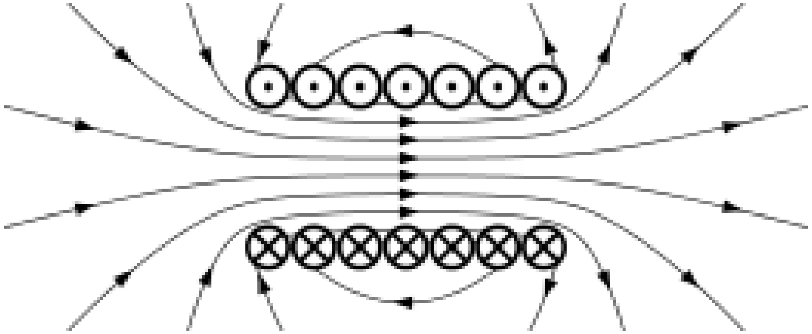
unendlich langen Zylinderspule



$$L\left|\vec{B}\right| = \mu_0 NI$$

$$\left|\vec{B}\right| = \mu_0 nI \quad (4.174)$$

Windungen/meter



Rechte-Hand-Regel

http://en.wikipedia.org/wiki/Solenoid

Lorentzkraft

Ein langer gerader Draht liegt entlang der x-Achse eines Koordinatensystems. Durch diesen Draht fließt ein elektrischer Strom 76 mA in die positive x-Richtung. Ein Elektron fliegt über den Draht. Das Elektron hat die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = -219\hat{x} - 262\hat{y} \text{ [m/s]}.$$

als es an der Position

$$\vec{r} = 0\hat{x} + 0\hat{y} + 0.01\hat{z} \text{ [m]}$$

ist.

Wie groß ist die Lorentzkraft des magnetischen Feldes auf das Elektron?

$$\vec{F} = \boxed{}\ \hat{x} + \boxed{}\ \hat{y} + \boxed{}\ \hat{z} \text{ [N]}$$

Lösung

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

Schraubenförmige Bewegung eines geladenen Teilchens in einem konstanten magnetischen Feld

Ein Elektron (Ladung $-e$) gerät in eine Region konstanten magnetischen Feldes mit $B = 5\ \hat{z}$ [T]. Die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons ist

$$\vec{v} = 18736\hat{x} + 12175\hat{y} + 5643\hat{z}\ \text{[m/s]}.$$

Das Elektron beschreibt ein Spirale um die z −Achse. Entlang der z −Achse gesehen, entspricht der Pfad des Elektrons einem Kreis. Wie groß ist der Radius des Kreises?

$R =$ ______ [m]

Lösung

$$ev_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{R}$$