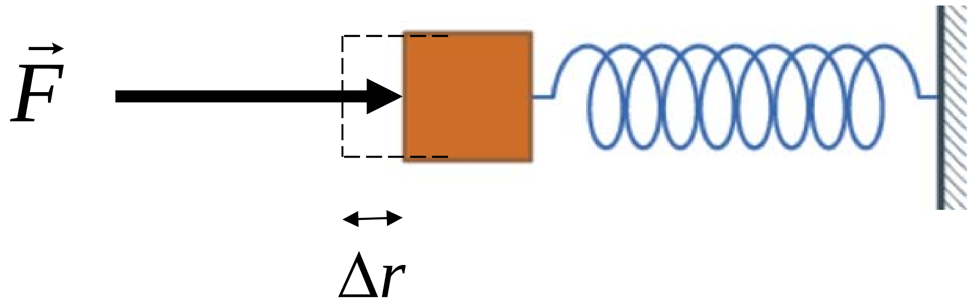
Arbeit

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \times \text{Abstand}$$



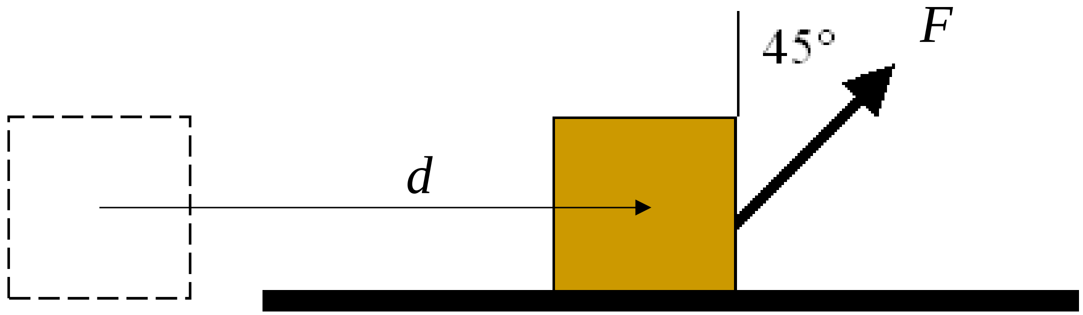
$$\Delta W = F\,\Delta r$$

$$[\mathrm{Nm}] = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}\right]\mathrm{m} = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^2}\right] = \mathrm{J}$$

Kinetische Energie: $\frac{1}{2}mv^2 = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^2}\right]$

Potentielle Energie: $mg\Delta y = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^2}\right]$

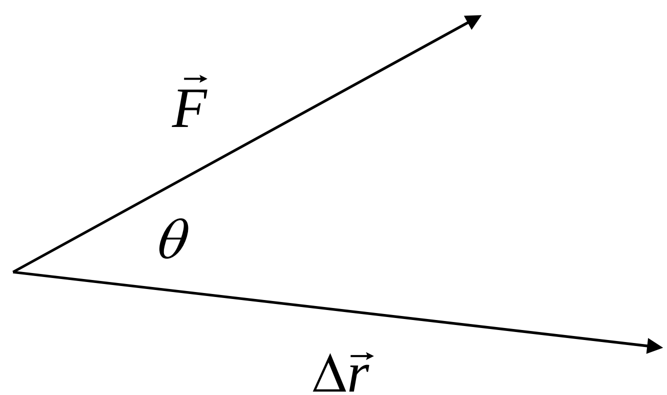
Arbeit



W ?

Skalarprodukt

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right| \left|\Delta\vec{r}\right| \cos\theta = F_x \Delta r_x + F_y \Delta r_y + F_z \Delta r_z$$



Verrichtete Arbeit durch konstante Kraft

Ein Objekt bewegt sich geradlinig von Position

$$\vec{r}_1 = 9\hat{x} - 6\hat{y} + 2\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

zu Position

$$\vec{r}_2 = 6\hat{x} - 5\hat{y} + 2\hat{z} \quad [\mathrm{m}],$$

während eine konstante Kraft

$$\vec{F} = 3\hat{x} + 7\hat{y} + 5\hat{z} \quad [\mathrm{N}].$$

auf das Objekt wirkt. Welche Arbeit wird durch diese Kraft verrichtet (die Arbeit kann negativ sein) ?

$W =$ ______ [J] Lösung

Im Allgemeinen ist die Arbeit das Integral des inneren Produktes (Skalarproduktes) aus der Kraft und der zurückgelegten Entfernung:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz.$$

In diesem Fall ist die Kraft konstant,

negative Arbeit

$$W = \int_9^6 (3)dx + \int_{-6}^{-5} (7)dy + \int_2^2 (5)dz.$$

$$W = 3(6\text{-}9)\text{+}7(\text{-}5\text{+}6)\text{+}5(2\text{-}2) = \text{-}2\ [\mathrm{J}].$$

Die Arbeit ist negativ, wenn das Objekt in die der Kraft entgegengesetzte Richtung bewegt wird.

Arbeit

$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$\vec{F} = F_x \ \hat{x} + F_y \ \hat{y} + F_z \ \hat{z}$$

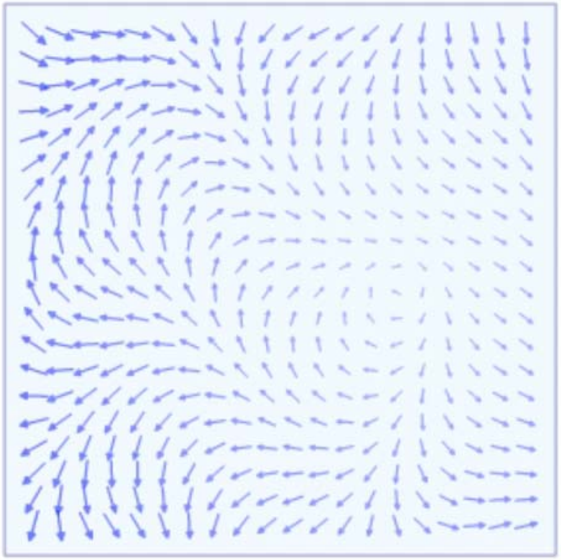
$$d\vec{r} = dx \ \hat{x} + dy \ \hat{y} + dz \ \hat{z}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\boxed{W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz}$$

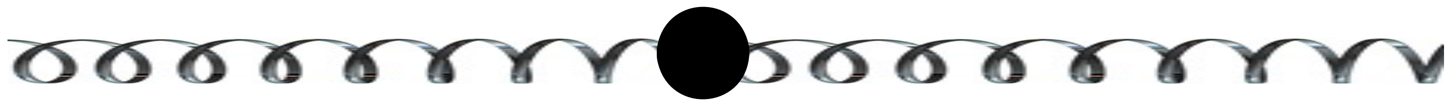
Arbeit

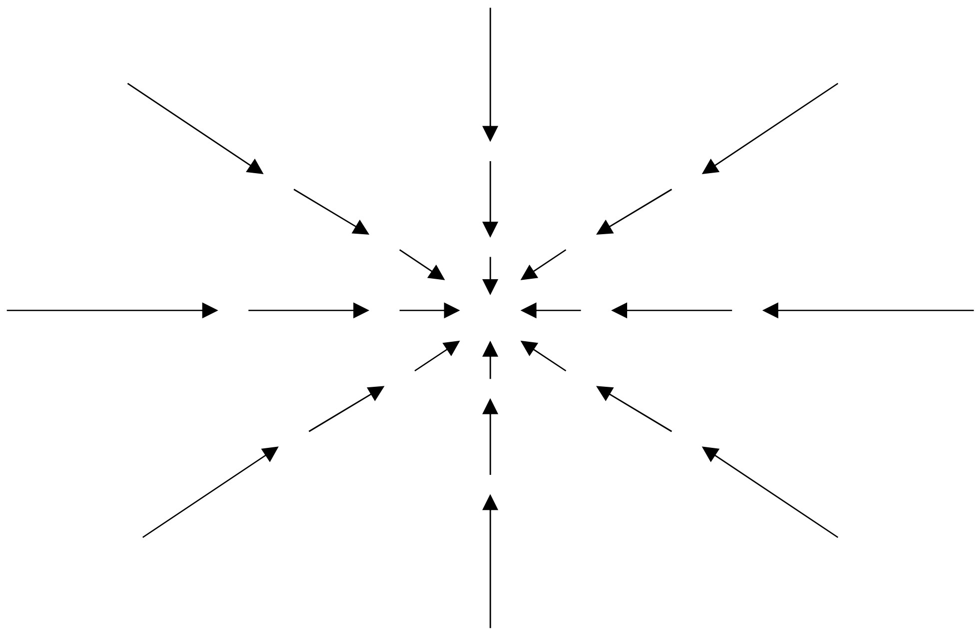
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



http://en.wikipedia.org/wiki/Line_integral

Kraftveld



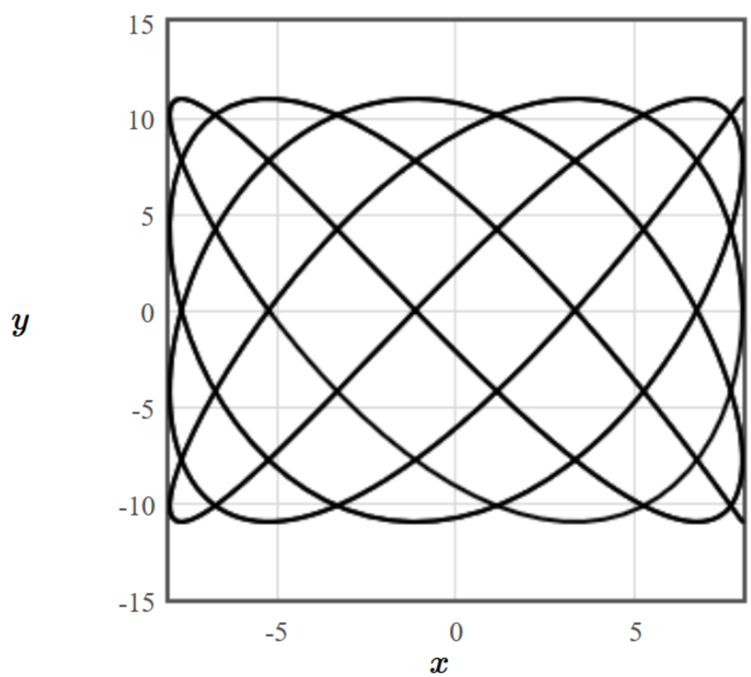


Kurvenintegral

Zurückgelegter Weg

Ein Käfer krabbelt entlang einer Lissajous-Kurve. Der Ortsvektor in Abhängigkeit der Zeit ist gegeben durch:

$$\vec{r}(t) = 8\cos(8t)\hat{x} + 11\sin(11t)\hat{y} \quad [\mathrm{m}]$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -64\sin(8t)\hat{x} + 121\cos(11t)\hat{y}.$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-64\sin(8t))^2 + (121\cos(11t))^2}$$

$$d = \int_0^6 |\vec{v}|dt.$$

mit t der Zeit in Sekunden. Berechnen Sie die Entfernung die der Käfer zwischen $t = 0$ und $t = 6$ s zurückgelegt hat.

$d =$ [m] Lösung

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (1)$$

$\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}$ bekannt

$$W = \int F_x(x)dx + \int F_y(y)dy + \int F_z(z)dz$$

Nichtlineare Feder

Die Kraft, die für das Zusammendrücken einer nichtlinearen Feder um die Strecke x benötigt wird, ist:

$$\vec{F} = 823x^{1.5}\hat{x} \quad \text{[N]},$$

wobei x in Metern angegeben ist. Wieviel Arbeit wird verrichtet, wenn eine ursprünglich entspannte Feder um 7 Zentimeter zusammengedrückt wird?

$W =$ [J] Lösung

Die Arbeit ist das Integral des inneren Produktes (Skalarproduktes) aus der Kraft und der zurückgelegten Entfernung:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Da die Bewegung nur in x-Richtung erfolgt, gilt

$$W = \int F_x dx = \int\limits_0^{0.07} 823x^{1.5} dx = \frac{823}{2.5}\, x^{2.5}\Big|_0^{0.07}.$$

$$W = 0.427 \text{ [J]}.$$

Dieses Integral kann auch numerisch bestimmt werden. Geben Sie 823*pow(x,1.5) in das Textfeld auf der APP Numerische Integration ein und scrollen Sie herab, um das Integral der Funktion zu finden.

Benötigte Arbeit um ein Elektron zu bewegen

Welche Arbeit wird benötigt, um ein Elektron von der Position

$$\vec{r}_1 = 5\hat{x} - 7\hat{y} + 8\hat{z} \quad [\text{m}]$$

zur Position

$$\vec{r}_2 = -2\hat{x} - 2\hat{y} + 6\hat{z} \quad [\text{m}]$$

in einem elektrischen Feld

$$\vec{E} = -7x\hat{x} - 4\hat{y} - 7z^2\hat{z} \quad [\text{V/m}] \text{ zu bewegen?}$$

Die Kraft auf das Elektron lautet $-e\vec{E}$, wobei $e = 1.6022 \times 10^{-19}$ C die Ladung des Elektrons ist.

$W =$ [J] Lösung

Im Allgemeinen ist die Arbeit das Integral des inneren Produktes (Skalarproduktes) aus der Kraft und der zurückgelegten Entfernung:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_5^{-2} 7ex\,dx - \int_{-7}^{-2} 4e\,dy - \int_8^{6} 7ez^2\,dz.$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{7ex^2}{2}\Big|_5^{-2} - 4y\Big|_{-7}^{-2} - \frac{7ez^3}{3}\Big|_8^{6}.$$

$$W = 1.19 \times 10^{-16} \text{ [J]}.$$

Die Arbeit ist positiv, wenn sich das Elektron gegen die elektrostatische Kraft bewegt. Die Arbeit ist negativ, wenn es sich in die Richtung der elektrostatischen Kraft bewegt. Überprüfen Sie die Vorzeichen Ihrer Antwort.

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (2)$$

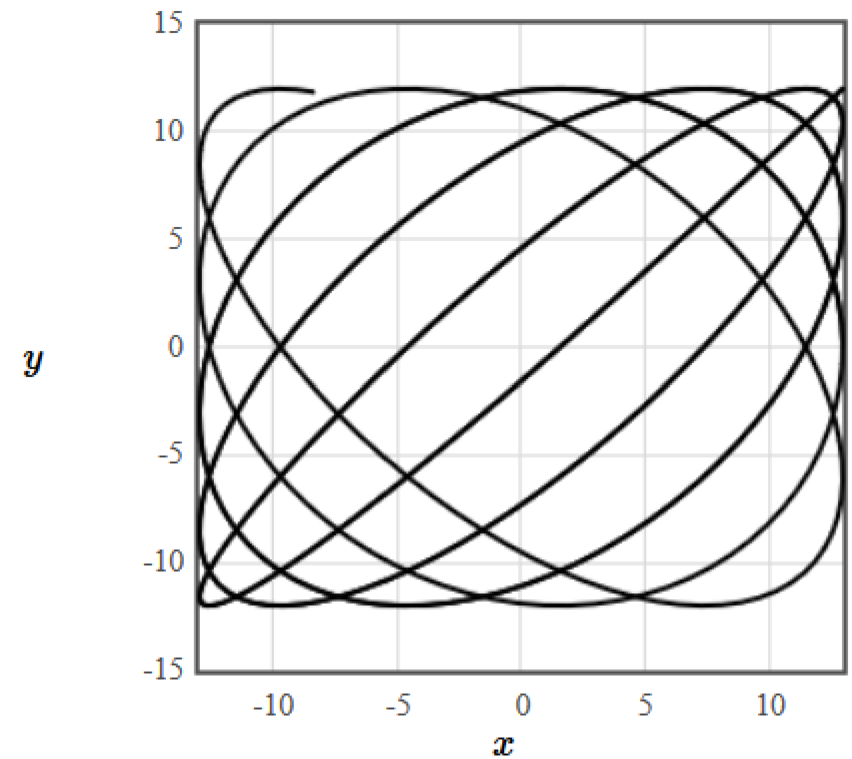
$\vec{F}(t), \vec{r}(t),$ ist bekannt

$$W = \int F_x(t) v_x(t) dt + \int F_y(t) v_y(t) dt + \int F_z(t) v_z(t) dt$$

Arbeit gegen eine Reibungskraft(2)

Der Ortsvektor eines Teilchens ist gegeben durch:

$$\vec{r}(t) = 13\cos(12t)\hat{x} + 12\sin(13t)\hat{y} \quad [\mathrm{m}]$$



12*13=156

Mit t der Zeit in Sekunden.Das Teilchen bewegt sich durch eine viskose Flüssigkeit entgegen einer Reibungskraft $\vec{F} = -|\vec{v}|\vec{v}$. Wie groß ist die benötigte Arbeit um das Teilchen zwischen der Zeit $t = 0$ Sekunden und $t = 4$ Sekunden zu bewegen?

$W =$ [J] Submit

Konservative Kraft

Konservative Kraft: Arbeit entlang eines beliebigen Weges ist nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig.

$$\oint_C \vec{F}_{konservative} \cdot d\vec{r} = 0$$

konservative Kräfte: Schwerkraft, Coulombkraft, elastische Kraft

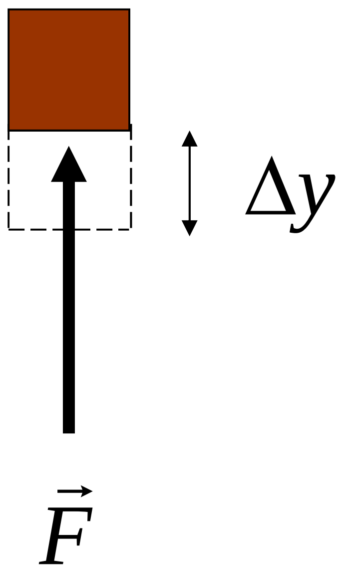
nicht konservative Kräfte: Reibungskräfte, dissipative Kräfte

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \geq 0$$

konservative Kraft → Potentielle energie

$$\Delta E_{pot}(x, y, z) = -W$$

Hubarbeit gegen Gewichtskraft

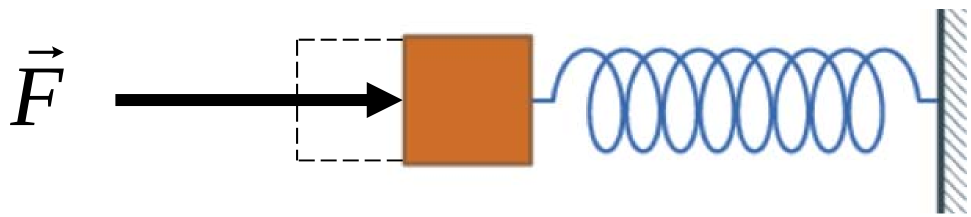


$$\vec{F} = -mg\hat{z}$$

$$\Delta E_{pot} = -W$$

Potentielle energie: $\Delta E_{pot}(x, y, z) = mg\Delta y$

Feder



Hookesches Gesetz: $F(x) = -kx$

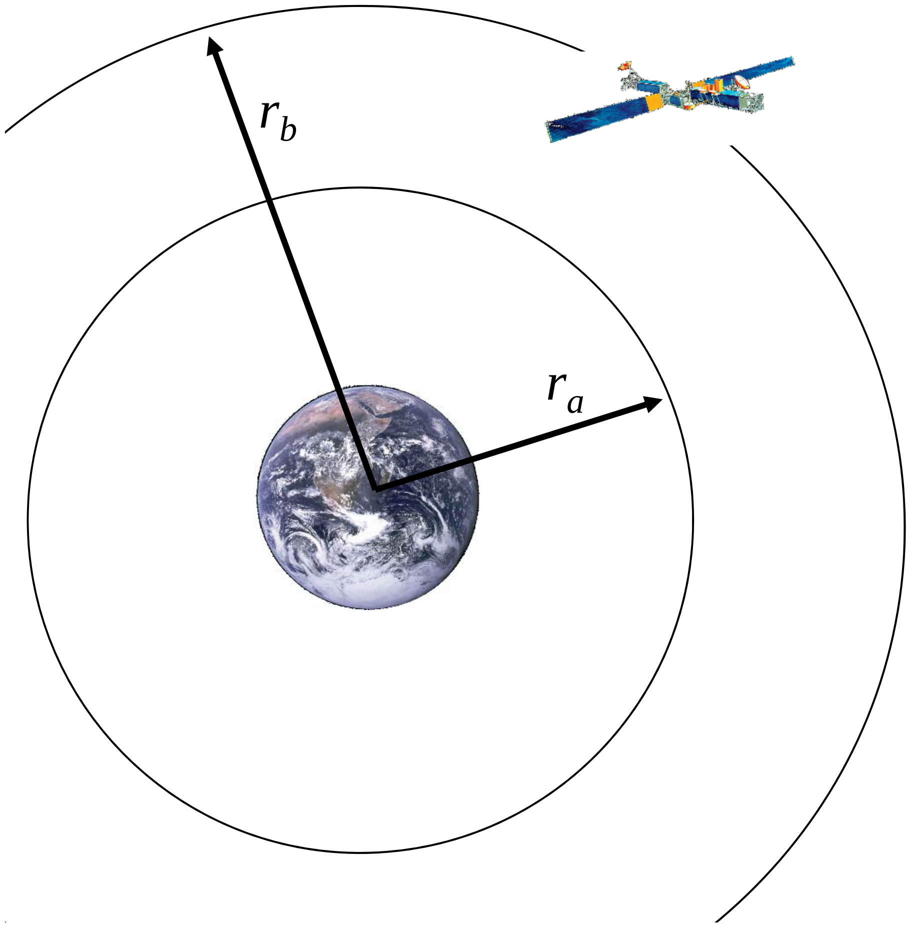
$$W = -\int_0^{x_e} kx\,dx = -\tfrac{1}{2} k x_e^2 \quad [\mathrm{J}]$$

Potentielle energie: $$\Delta E_{pot} = \frac{kx^2}{2}$$

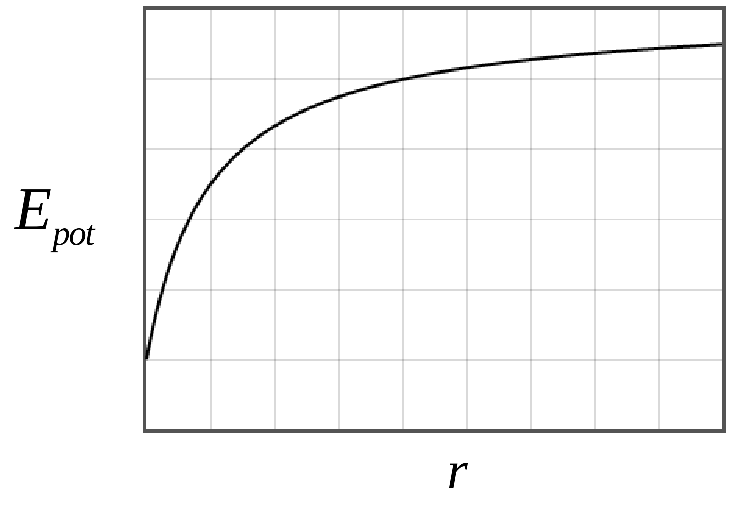
Gravitation

$$\Delta E_{pot}\left(\vec{r}\right) = -W$$

$$-W = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{-Gm_1m_2}{r^2}dr = \frac{-Gm_1m_2}{r_b} - \frac{-Gm_1m_2}{r_a}$$



$$E_{pot}\left(\vec{r}\right) = \frac{-Gm_1m_2}{\left|\vec{r}\right|}$$



konservative Kraft → Potentielle energie

$$E_{pot}(x,y,z) = -W$$

	Kraft	Potentielle energie
Schwerkraft	$\vec{F} = -mg\ \hat{y}$	$E_{pot}(x,y,z) = mgy$
Feder	$\vec{F} = -kx\ \hat{x}$	$E_{pot}(x,y,z) = \dfrac{kx^2}{2}$
Gravitation	$\vec{F} = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\ \hat{r}$	$E_{pot}(x,y,z) = -\dfrac{Gm_1m_2}{r}$
Coulomb	$\vec{F} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$	$E_{pot}(x,y,z) = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$