Fähigkeiten

Vektoren

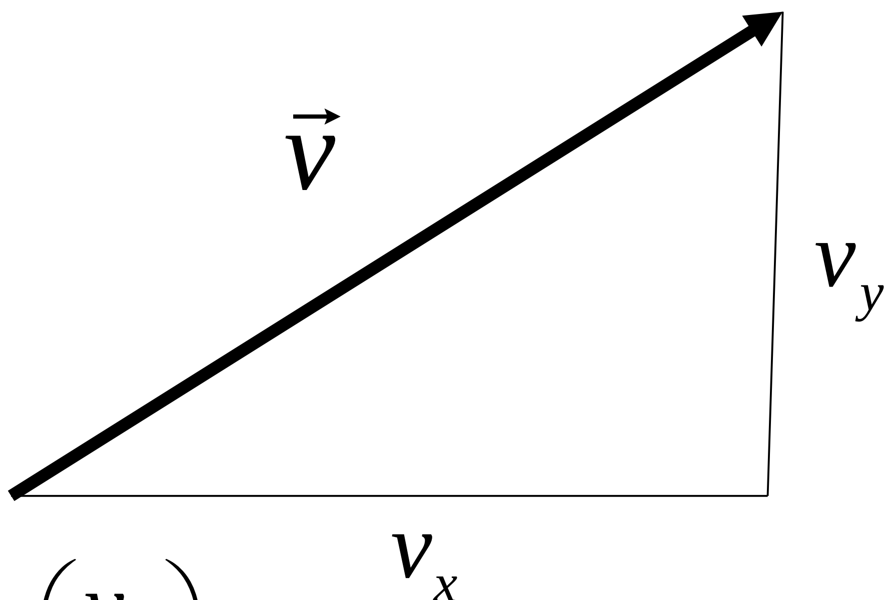
Sie müssen in der Lage sein:

- zwei Vektoren zu addieren $\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{x}+(A_y+B_y)\hat{y}+(A_z+B_z)\hat{z}$;
- die Länge eines Vektors zu bestimmen, $|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$;
- den Einheitsvektor, der in die Richtung des ursprünglichen Vektors zeigt, zu bestimmen, $\hat{A}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$;
- den Vektor in seine x-, y-, und z-Komponenten zu zerlegen;
- das innere Produkt zweier Vektoren zu berechnen, $\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos(\theta)=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$;
- das Kreuzprodukt zweier Vektoren zu berechnen, $\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{x}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{y}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{z}$.

App: Alles über die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$

Vektoren

Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung sind Vektoren



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

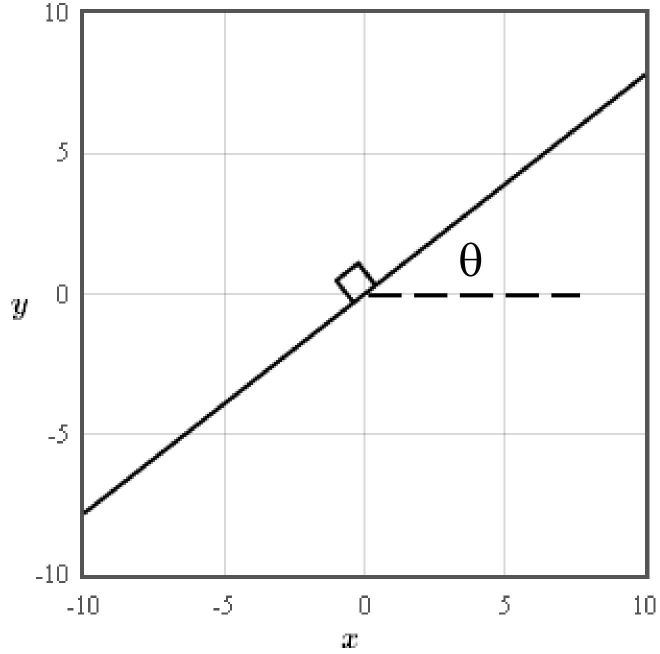
$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y + v_z \hat{e}_z$$

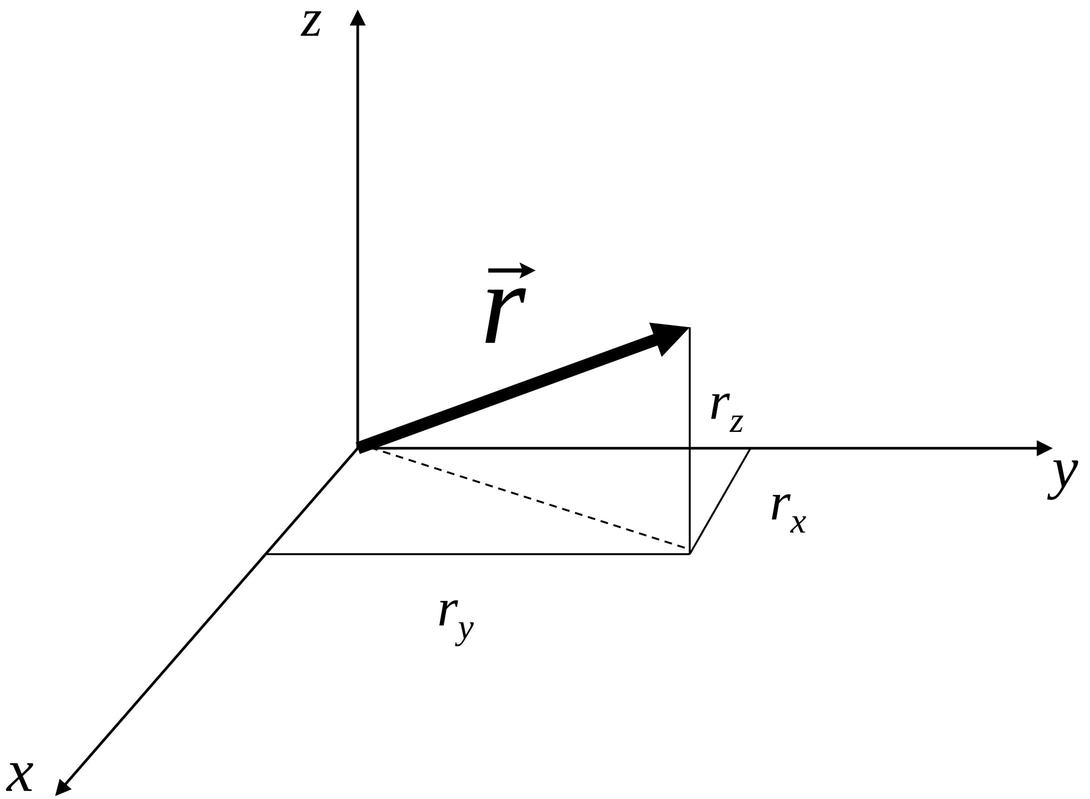
Hering $\rightarrow$ $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$

Vektoren zerlegen

Ein Klotz der Masse *m* = 95 g wird auf eine schiefe Ebene gelegt, welche um einen Winkel von 38° gegenüber der Horizontalen gekippt ist.

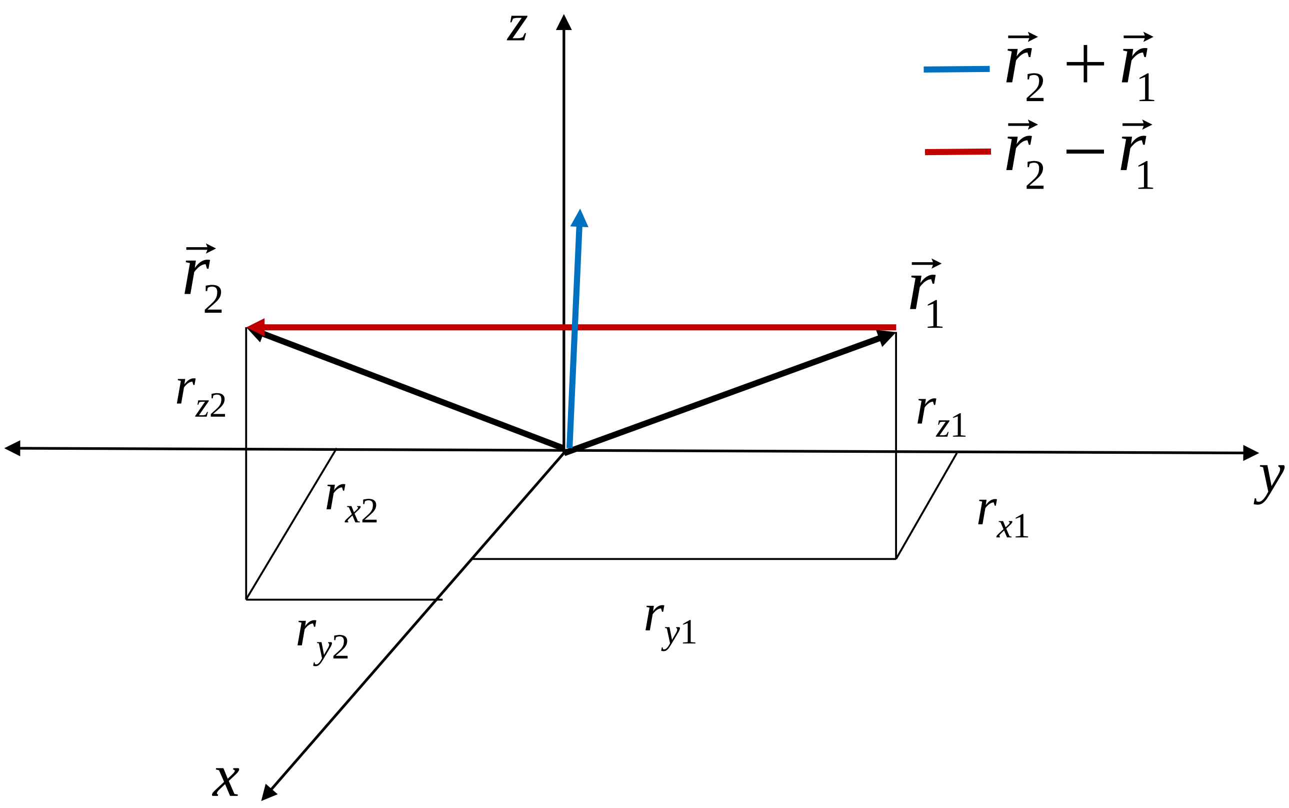


Länge von Vektor $\vec{r}$



$$\left|\vec{r}\right| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$ Pythagoras

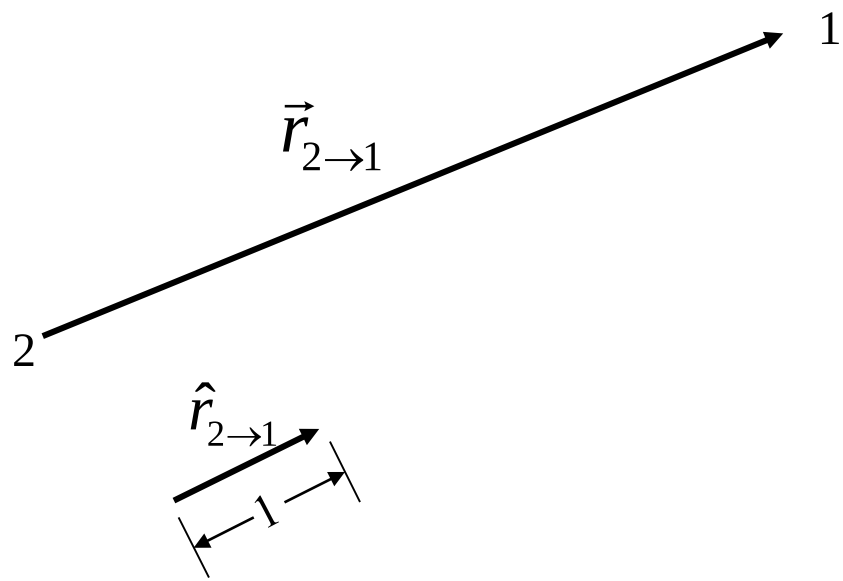
Vektoraddition



$$\vec{r}_2 + \vec{r}_1 = (r_{x2} + r_{x1})\hat{x} + (r_{y2} + r_{y1})\hat{y} + (r_{z2} + r_{z1})\hat{z}$$

$$\vec{r}_{1\to 2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (r_{x2} - r_{x1})\hat{x} + (r_{y2} - r_{y1})\hat{y} + (r_{z2} - r_{z1})\hat{z}$$

Einheitsvektor $\hat{r}_{2\to 1}$



$$\hat{r}_{2\to 1} = \frac{\vec{r}_{2\to 1}}{\left|\vec{r}_{2\to 1}\right|} = \frac{\left(r_{1x} - r_{2x}\right)\hat{x} + \left(r_{1y} - r_{2y}\right)\hat{y} + \left(r_{1z} - r_{2z}\right)\hat{z}}{\sqrt{(r_{1x} - r_{2x})^2 + (r_{1y} - r_{2y})^2 + (r_{1z} - r_{2z})^2}}$$

Einheitsvektoren

Wie lautet der Einheitsvektor, welcher von dieser Position

$$\vec{r}_1 = -2\hat{x} + 2\hat{y} + 5\hat{z} \quad [\mathrm{m}],$$

zu dieser Position zeigt:

$$\vec{r}_2 = 2\hat{x} + 4\hat{y} - 2\hat{z} \quad [\mathrm{m}]?$$

$\hat{r}_{1\rightarrow 2} =$ ____ $\hat{x} +$ ____ $\hat{y} +$ ____ $\hat{z}$ Senden

Kraft zwischen zwei Elektronen

Die elektrostatische Kraft, die auf Elektron 1 aufgrund der Ladung von Elektron 2 wirkt, ist durch das Coulombkraft Gesetz gegeben:

$$\vec{F} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\,\hat{r}_{2\to 1} \quad [\mathrm{N}]$$

Dabei ist $e = 1.6022\times10^{-19}$ C die Elementarladung, $\epsilon_0 = 8.854\times10^{-12}$ F/m ist die elektrische Feldkonstante und $\hat{r}_{2\to1}$ ist der Einheitsvektor, der von Elektron 2 auf das Elektron 1 zeigt.

Elektron 1 ist an der Position

$$\vec{r}_1 = 3\hat{x} + 3\hat{y} - 3\hat{z} \quad [\mathrm{nm}],$$

und Elektron 2 an der Position

$$\vec{r}_2 = 2\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z} \quad [\mathrm{nm}].$$

Welche Kraft wirkt auf Elektron 1?

$\vec{F} =$ ______ $\hat{x} +$ ______ $\hat{y} +$ ______ $\hat{z}$ [N] Lösung

Alles über die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$

$\vec{A} =$ 1 / 2 / 3 $\qquad \vec{B} =$ -1 / 3 / -5

Auskunft ueber A und B

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Die Länge von $\vec{A}$ ist $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2} = 3.7416574$.

Die Länge von $\vec{B}$ ist $\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-5)^2} = 5.9160798$.

Das innere Produkt (auch Skalarprodukt genannt) von $\vec{A}$ und $\vec{B}$ ist

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (1)(-1) + (2)(3) + (3)(-5) = -10.$$

Hier ist θ der Winkel zwischen den beiden Vektoren.

Kräfte

Coulombkraft
Newtonsches Gravitationsgesetz
Lorentzkraft
Hookesches Gesetz
Reibungskraft

Coulombkraft

Die elektrostatische Kraft, die auf Elektron 1 aufgrund der Ladung von Elektron 2 wirkt

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2}\,\hat{r}_{2\to 1}$$

Ladung q_1, q_2 [C] = [A s]
elektrische Feldkonstante ε_0 = 8.854187817 × 10^{-12} [F/m]=[$A^2 s^4$/kg m^3]

Newtonsches Gravitationsgesetz

$$\vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2} \hat{r}_{2\to1}$$

in der Nähe der Erdoberfläche

Erdbeschleunigung

$$\vec{F} = -m_1 g \hat{z}$$

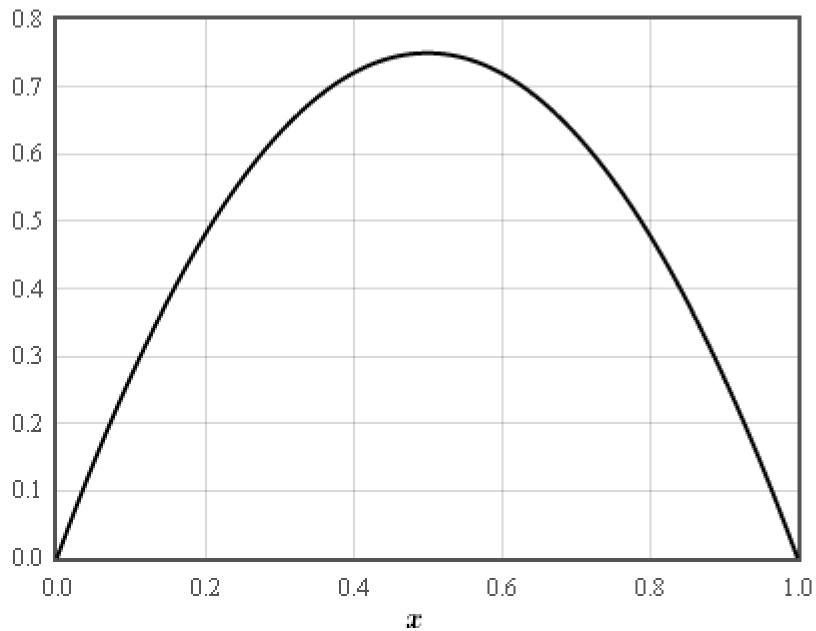
$$g = \frac{G m_{erde}}{r_{erde}^2} = \frac{6.6726 \times 10^{-11}\ 5.97219 \times 10^{24}}{\left(6.371 \times 10^{6}\right)^2} = 9.8174\ \mathrm{m/s^2}$$

$$m_2 = m_{erde}$$

Lorentzkraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

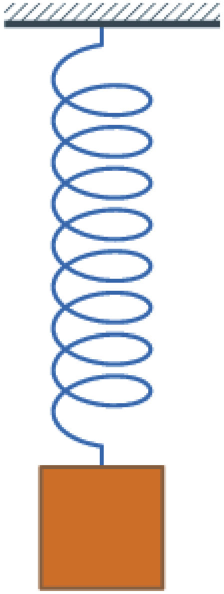
konstantes elektrisches Feld $\quad \vec{F} = q\vec{E}$



Hookesches Gesetz

$$\vec{F} = -kx\hat{x}$$

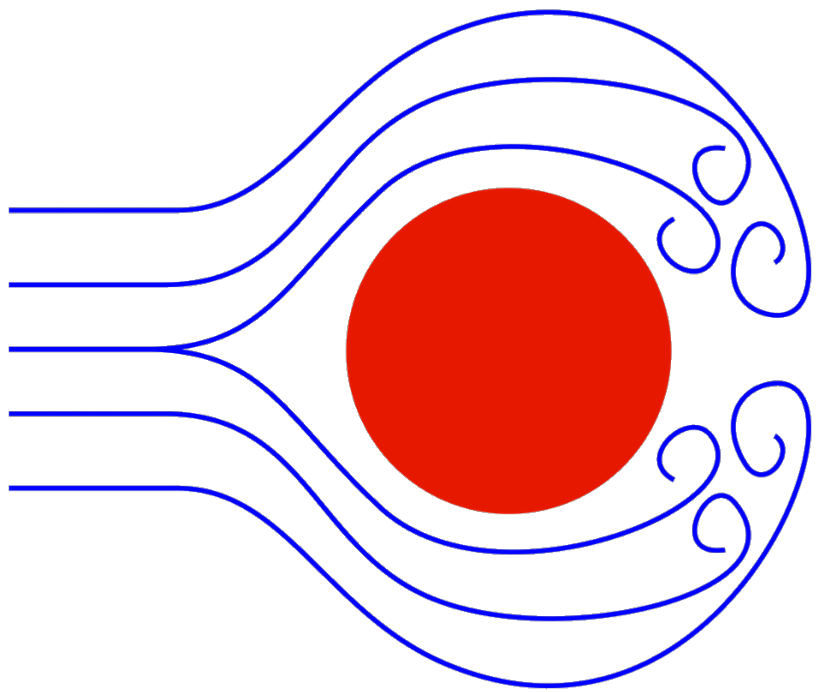
Federkonstante [N/m]



http://en.wikipedia.org/wiki/Effective_mass_%28spring%E2%80%93mass_system%29

Reibungskraft
(Strömungswiderstand)

$$\vec{F} = -a\vec{v} - b\vec{v}\left|\vec{v}\right| - c\vec{v}\left|\vec{v}\right|^2 + \cdots$$

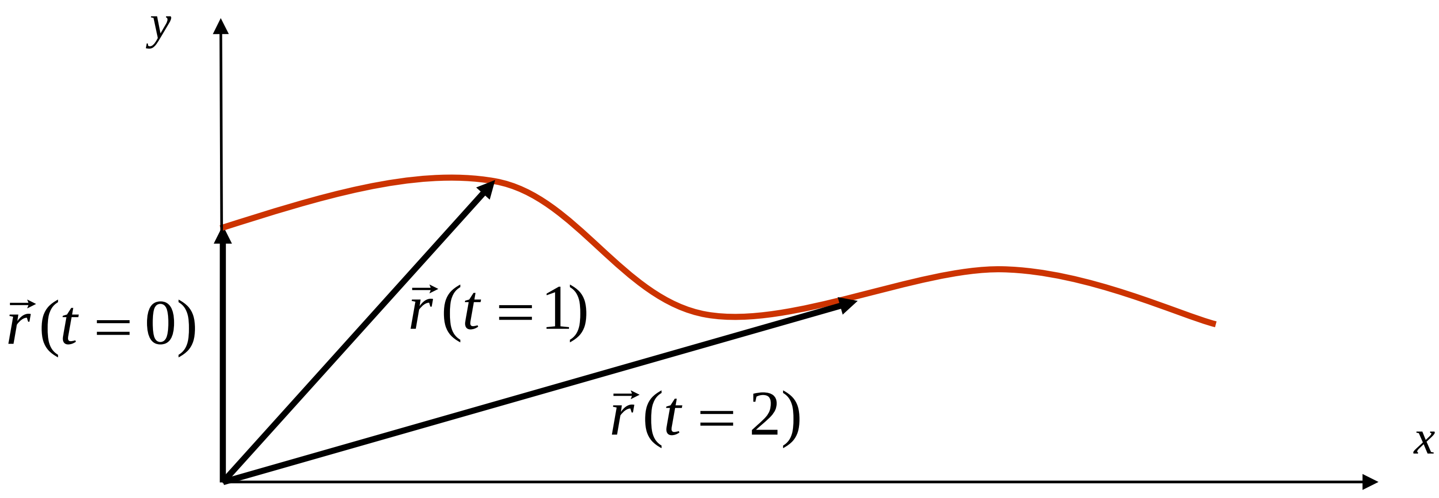


http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_%28physics%29

Punktmechanik

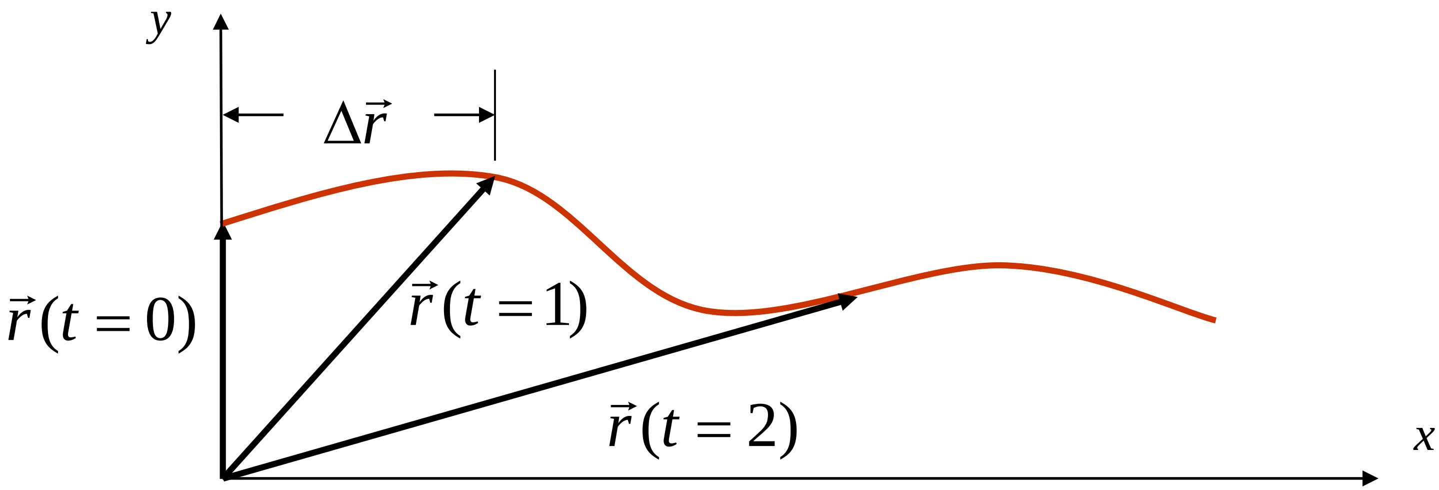
$$\vec{r} \Longleftrightarrow \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{a} \Longleftrightarrow \vec{F}$$

Ortsvektor $\vec{r}$



$$\vec{r}(t) = r_x(t)\hat{x} + r_y(t)\hat{y} + r_z(t)\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

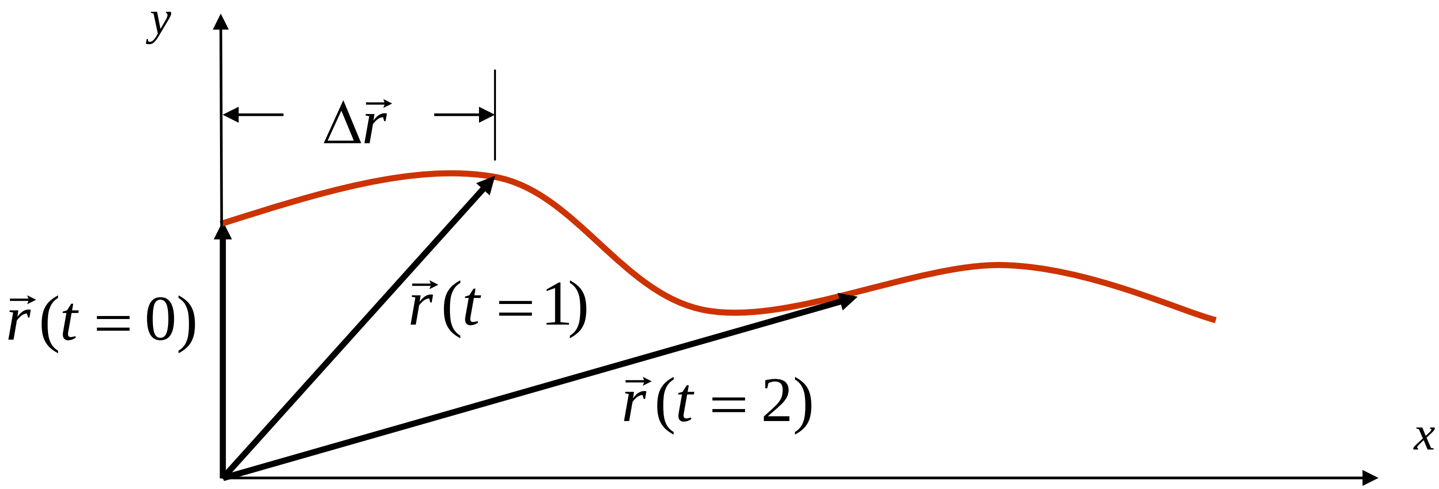
Geschwindikeit $\vec{v}$



$$\vec{v} \approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad [\mathrm{m/s}]$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \; [\mathrm{m/s}]$$

Geschwindikeit $\vec{v}$



$$\vec{r}(t) = r_x(t)\hat{x} + r_y(t)\hat{y} + r_z(t)\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\hat{x} + \frac{dr_y}{dt}\hat{y} + \frac{dr_z}{dt}\hat{z} \quad [\mathrm{m/s}]$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v_x(t)\hat{x} + v_y(t)\hat{y} + v_z(t)\hat{z} \quad [\mathrm{m/s}]$$

Ableitung (schreibweise)

Leibniz: $\dfrac{df}{dx}$ $\dfrac{dg}{dt}$ $\dfrac{dy}{dx}$ $\dfrac{dx}{dt}$ $\dfrac{dy}{dt}$ $\dfrac{dz}{dt}$

Lagrange: f' g'

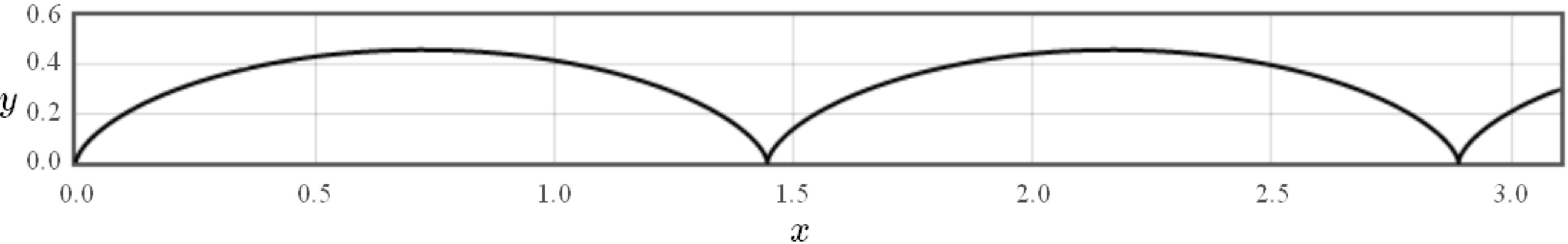
Euler: $D_x f$ $D_t y$

Newton: $\dot{x}$ $\dot{y}$

Beispiel: $f(x) = x^2$ $\dfrac{df}{dx} = 2x$

Zykloid (Radlaufkurve)

Ein kleiner Stein der Masse $m = 41$ g steckt in einem Autoreifen. Der Radius des Reifens ist $R = 0.23$ m. Der Stein folgt einem Zykloid während der Reifen rollt. Der Reifen rollt mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = 3$ m/s.



Der Positionsvektor der Steines ist:

$$\vec{r}(t) = R\left(\frac{vt}{R} - \sin(\frac{vt}{R})\right)\hat{x} + R\left(1 - \cos(\frac{vt}{R})\right)\hat{y}\ \ [\mathrm{m}].$$

immer Radiant