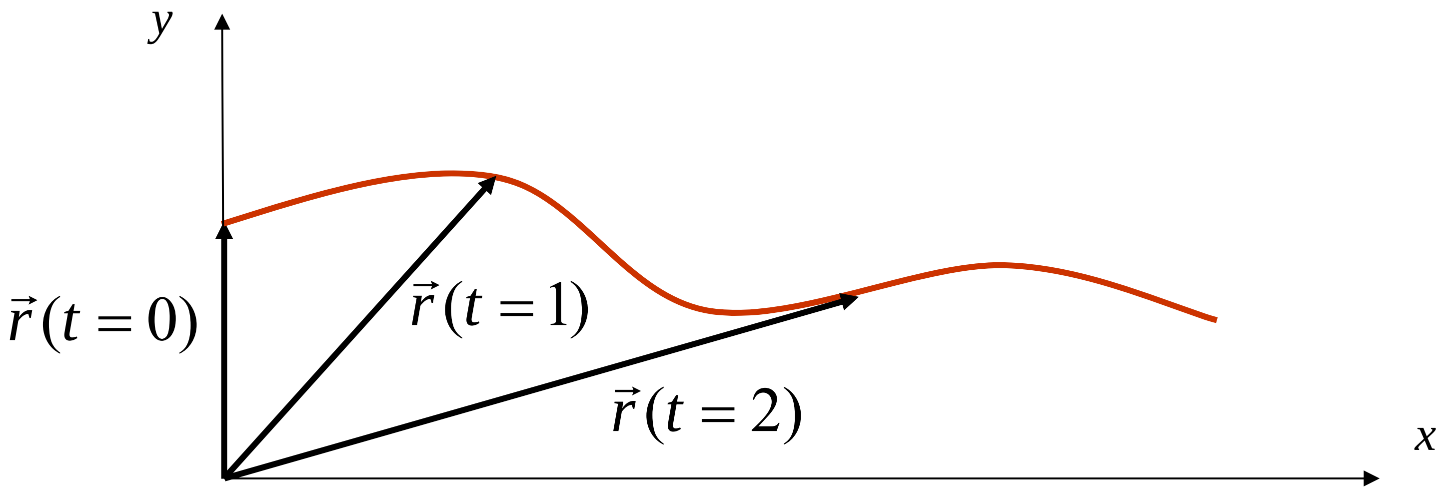
Punktmechanik

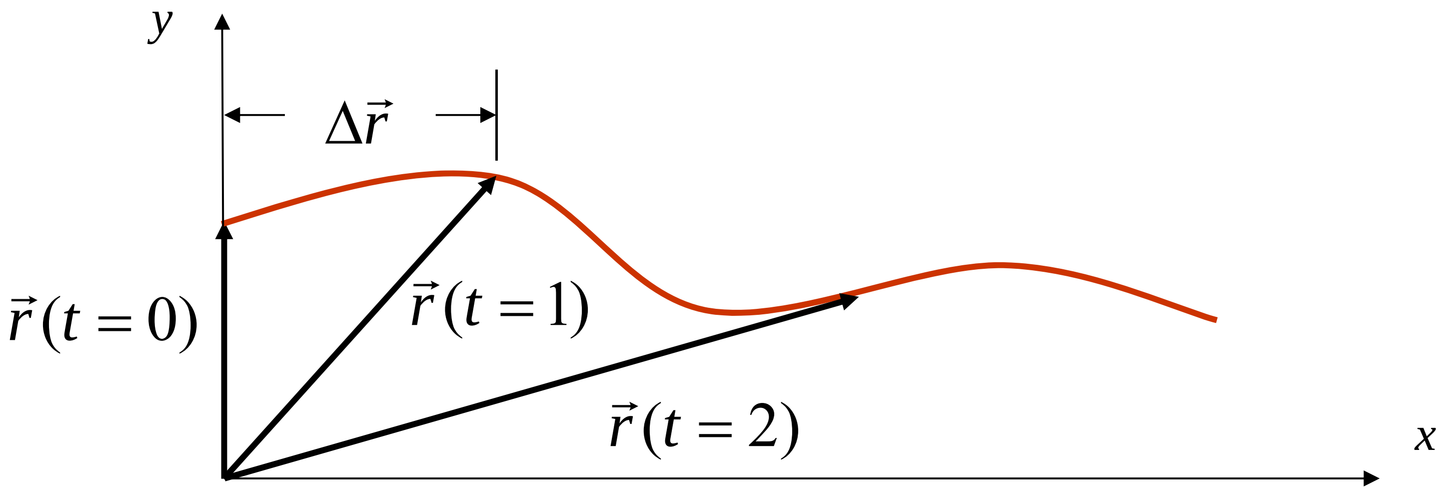
$$\vec{r} \Longleftrightarrow \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{a} \Longleftrightarrow \vec{F}$$

Ortsvektor $\vec{r}$



$$\vec{r}(t) = r_x(t)\hat{x} + r_y(t)\hat{y} + r_z(t)\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

Geschwindikeit $\vec{v}$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \ [\mathrm{m/s}]$$

Beschleunigung $\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \ \ [\mathrm{m/s^2}]$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\hat{y} + \frac{dv_z}{dt}\hat{z} \ \ [\mathrm{m/s^2}]$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2 r_x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2 r_y}{dt^2}\hat{y} + \frac{d^2 r_z}{dt^2}\hat{z} \ \ [\mathrm{m/s^2}]$$

Kraft $\vec{F}$

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad [\mathrm{N}]$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad [\mathrm{N}]$$

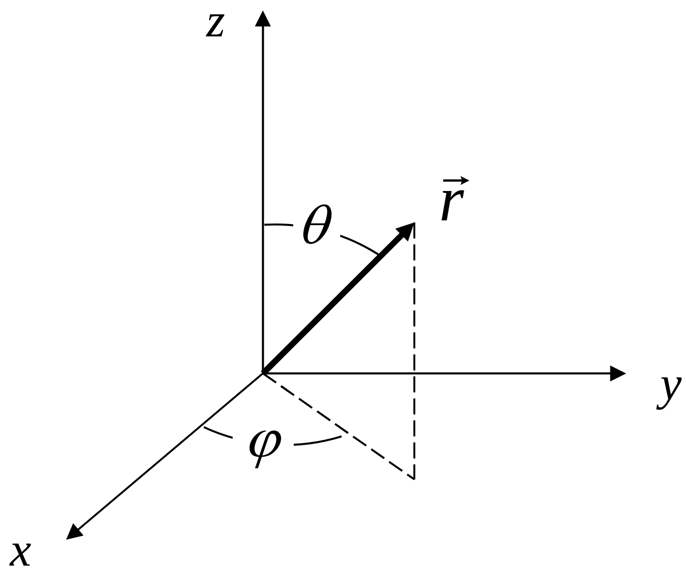
$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad [\mathrm{N}]$$

Punktmechanik

$$\vec{r} \xrightarrow{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \vec{v} \xrightarrow{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \vec{a} \xrightarrow{\vec{F} = m\vec{a}} \vec{F}$$

Corioliskraft

$$\vec{r}(t) = R\sin(\Omega t)\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\Omega t)\sin(\omega t)\,\hat{y} + R\cos(\Omega t)\,\hat{z}$$



$$\theta = \Omega t$$

$$\varphi = \omega t$$

$$\vec{F}\,?$$

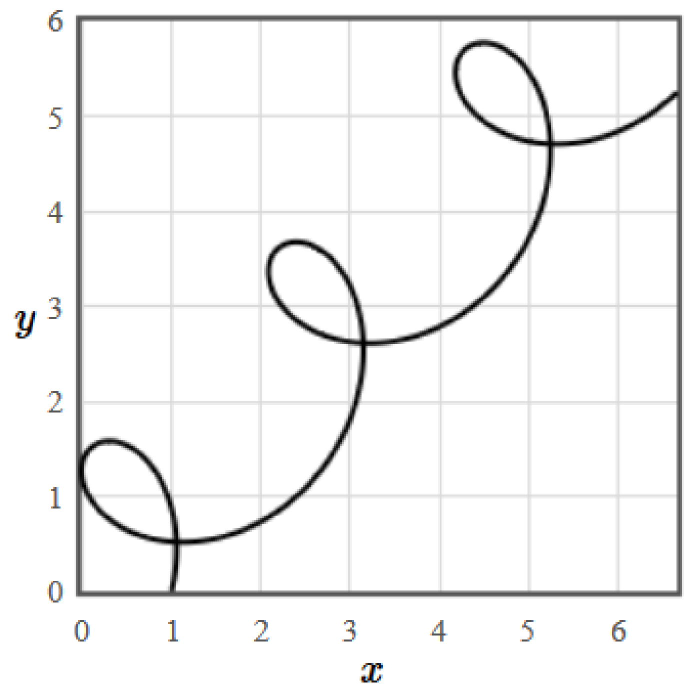
Müssen wir die Coriolis-Kraft für die Prüfung wissen?

Problem 2

Die Bahnkurve eines Teilchens der Masse $m = 33$ g ist,

$$\vec{r}(t) = \big(t + \cos(3t)\big)\,\hat{x} + \big(t + \sin(3t)\big)\,\hat{y} \quad [\mathrm{m}].$$

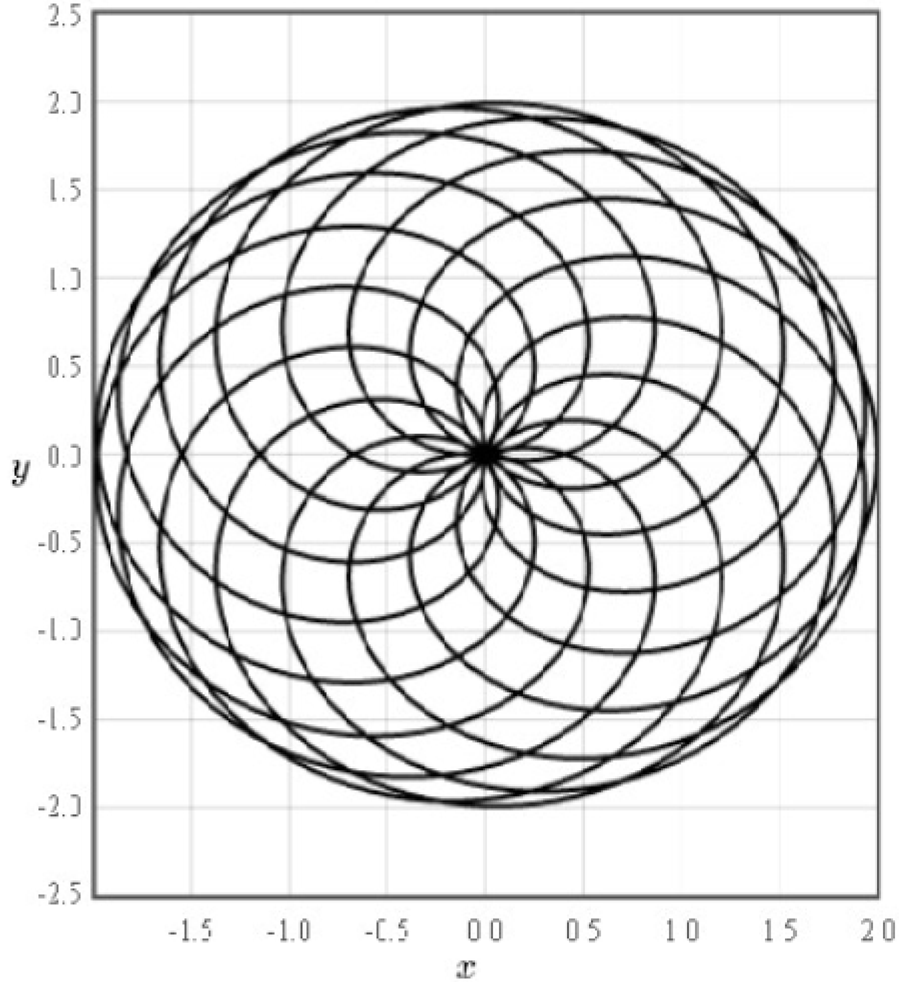
Dabei ist t die Zeit in Sekunden.



Welche Kraft wirkt auf das Teilchen zur Zeit $t = 1$ s?

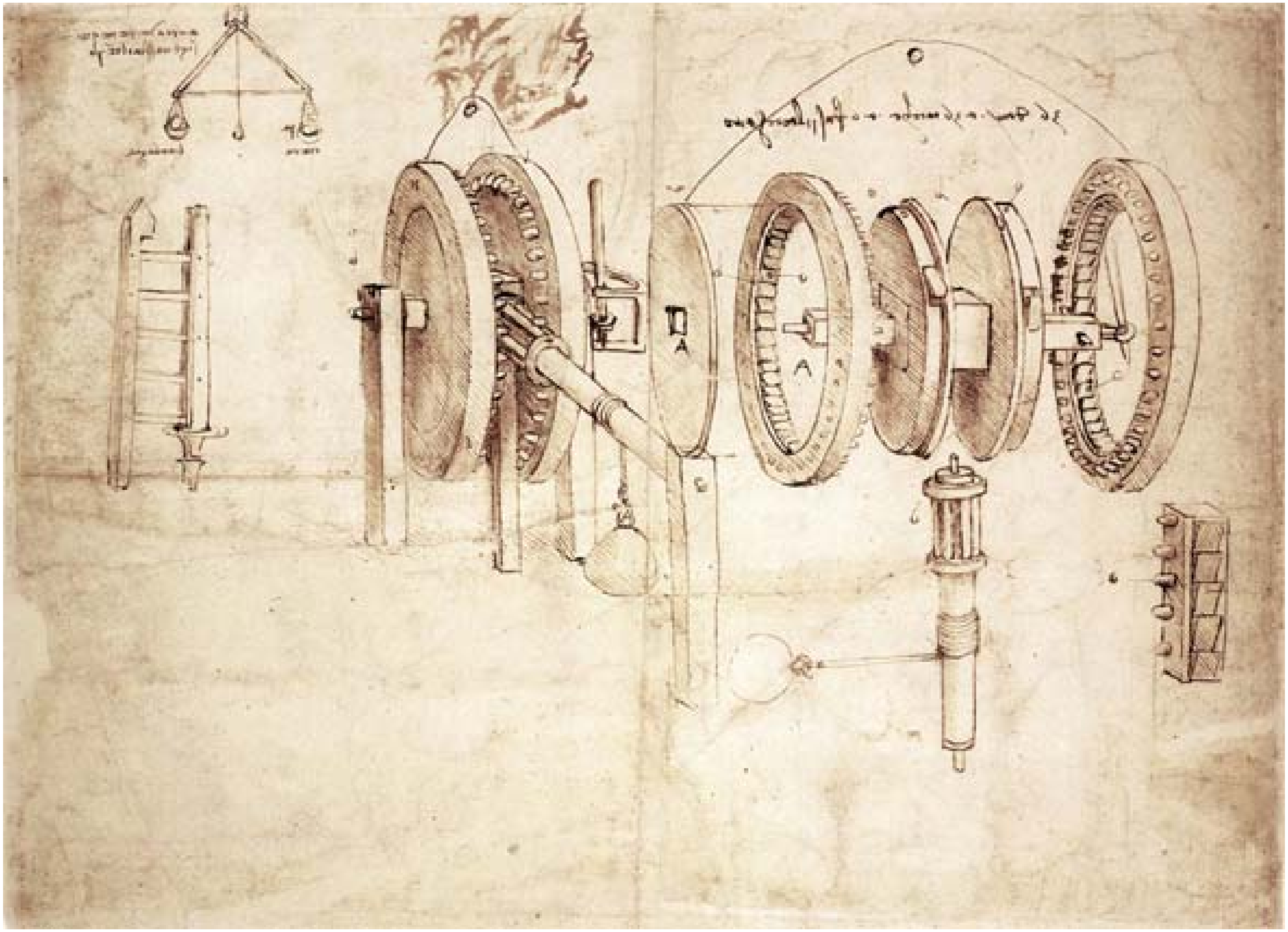
$$\vec{F} = \boxed{}\,\hat{x} + \boxed{}\,\hat{y} + \boxed{}\,\hat{z}\ [\mathrm{N}]$$

Bahnkurve

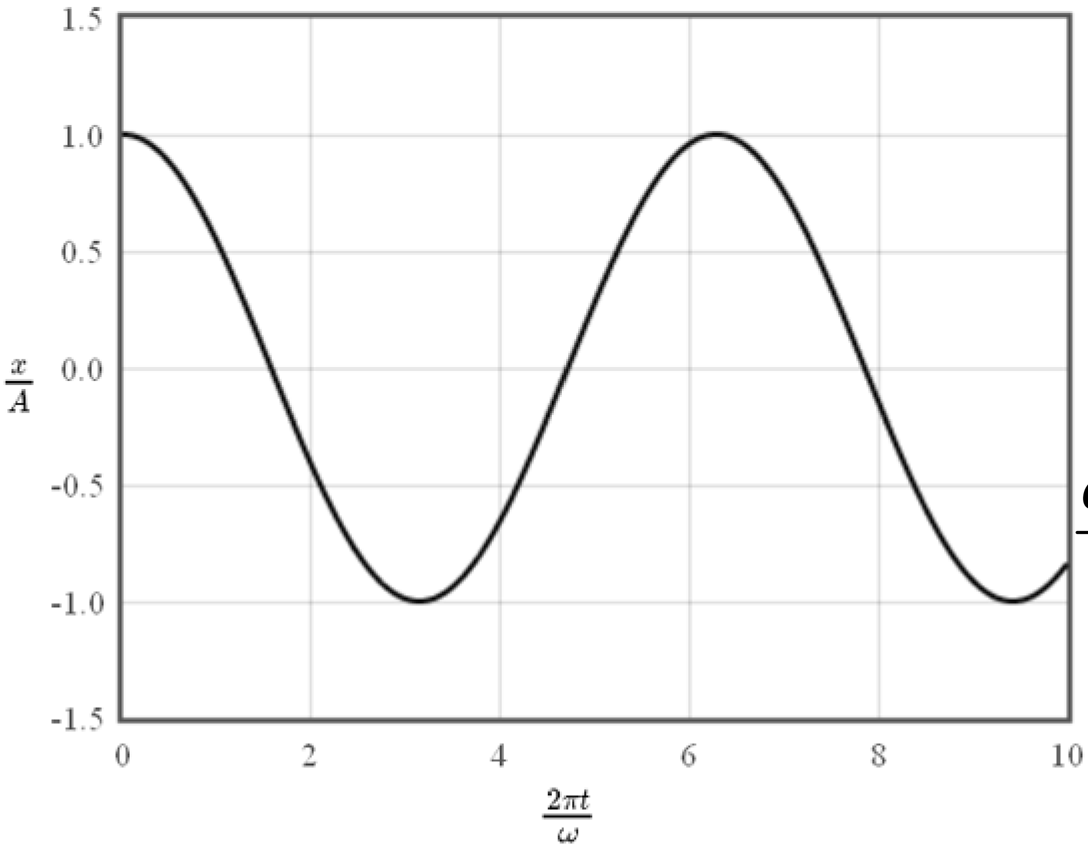


$$\vec{r}(t) = (\cos(2\pi t) + \cos(7.2\pi\ \mathrm{t}))\,\hat{\mathrm{x}} + (\sin(2\pi t) + \sin(7.2\pi\ \mathrm{t}))\,\hat{y}$$

Bewegung $\Longleftrightarrow$ Kraft



Harmonische Bewegung



Radiant

$$x = A\cos\left(2\pi ft\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\pi fA\sin\left(2\pi ft\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(2\pi f\right)^2 A\cos\left(2\pi ft\right)$$

$$F_x = ma = -m\left(2\pi f\right)^2 A\cos\left(2\pi ft\right) = -m\left(2\pi f\right)^2 x$$

$$F_x \propto f^2$$

Lineare Federkraft:

Punktmechanik

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{r} \qquad \vec{v} \qquad \vec{a} \qquad \vec{F}$$

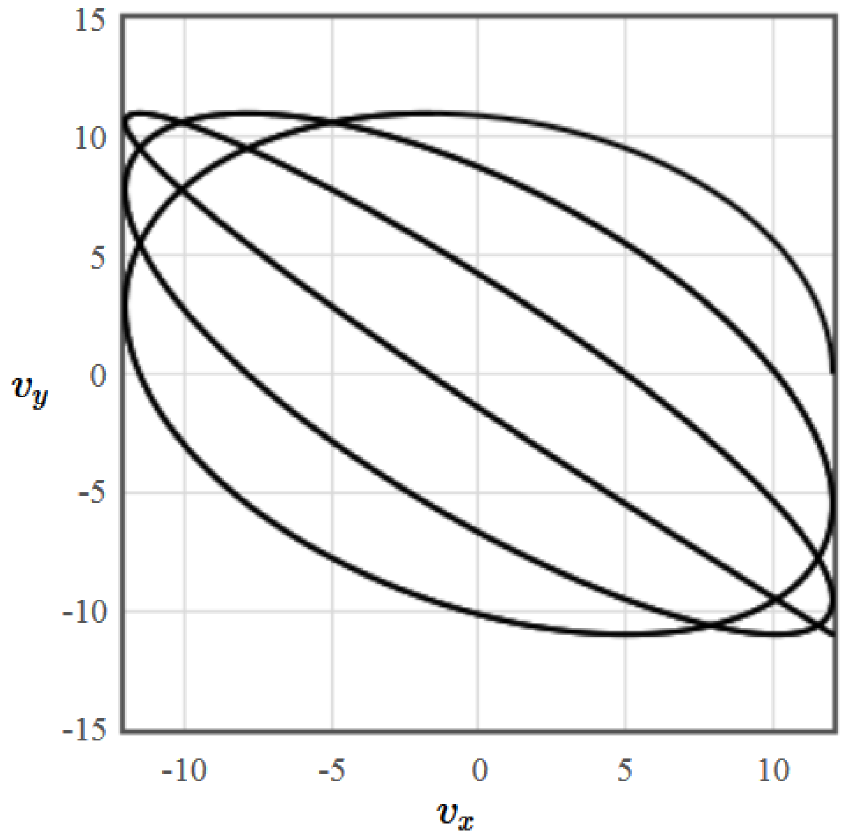
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' + \vec{r}(t_0) \qquad \vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' + \vec{v}(t_0)$$

Problem 1

Eine Biene befindet sich bei $\vec{r} = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Geschwindigkeit der Biene ist,

$$\vec{v}(t) = 12\cos(12t)\hat{x} + 11\sin(11t)\hat{y} \quad [\mathrm{m/s}]$$



Hierbei ist t die Zeit in Sekunden. Wo ist die Biene zum Zeitpunkt $t = 3$ s?

$\vec{r} =$ ______ $\hat{x} +$ ______ $\hat{y}$ [m]

Geschwindigkeit → Kraft

Die Geschwindigkeit eines Teilches der Masse, $m = 95$ Gramm, wird beschrieben durch den Vektor,

$$\vec{v} = -399\sin(7t)\,\hat{x} - 12\exp(-4t)\,\hat{y} - 18t\;\hat{z}\;\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

Dabei ist t in Sekunden gemessen. Zur Zeit $t = 0$ sind Position und Geschwindigkeit des Teilchens:

$$\vec{r} = 57\,\hat{x} + 3\,\hat{y} + 0\,\hat{z}\;[\mathrm{m}] \qquad \vec{v} = 0\,\hat{x} - 12\,\hat{y} + 0\,\hat{z}\;\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

Berechnen Sie die Kraft auf das Teilchen zur Zeit $t = 4$ Sekunden.

$\vec{F} =$ ______ $\hat{x}$ + ______ $\hat{y}$ + ______ $\hat{z}$ [N] Lösung

immer Radiant

Fähigkeiten

Integrieren und Differenzieren

Sie müssen wissen:

- wie man die Funktionen $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, und Polynome x^n, $1/x^n$ integriert und ableitet;
- die Produktregel für Ableitungen;
- die Quotientenregel für Ableitungen;
- die Kettenregel für Ableitungen.

Sie können Ihre Arbeit mit der App für numerische Integration und Differentiation überprüfen.

Mathematica, Wolfram Alpha

Lehrplan
Bücher
Testfragen

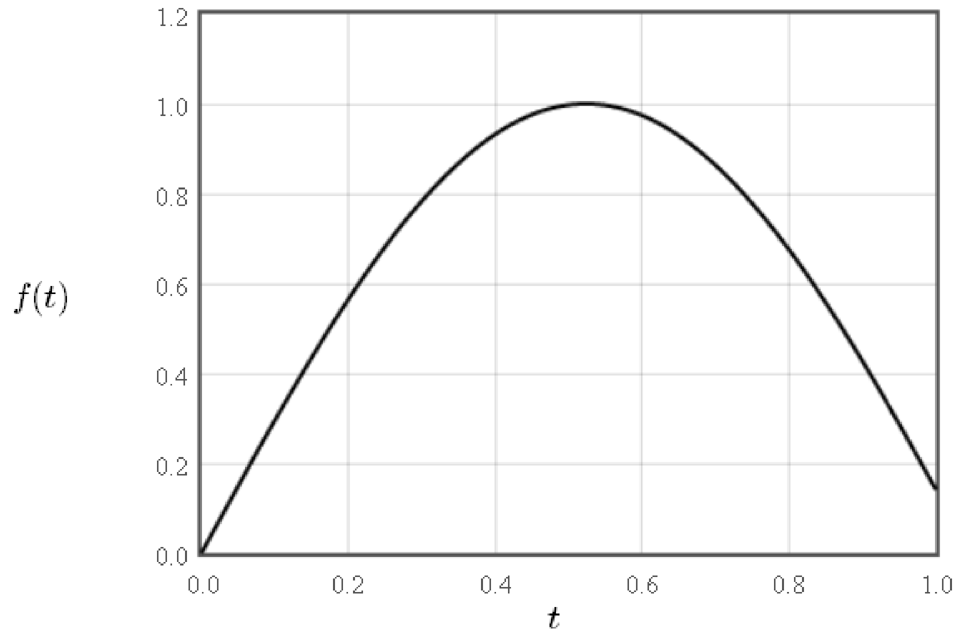
Numerische Integration and Differentiation

$f(t) =$ sin(3*t) ?

Fill table from $t_1 = 0$ to $t_2 = 1$.

t	$f(t)$
0.02000	0.05996
0.02333	0.06994
0.02667	0.07991
0.03000	0.08988
0.03333	0.09983
0.03667	0.1098
0.04000	0.1197
0.04333	0.1296
0.04667	0.1395
0.05000	0.1494
0.05333	0.1593

calculate from table



Die 1. Ableitung

Die Ableitung von $f(t)$ wird berechnet aus

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Position → Kraft (numerisch)

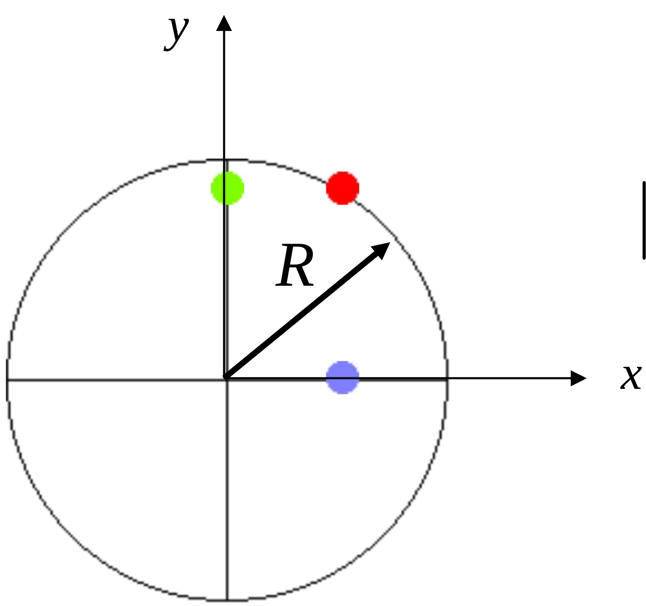
Ein auf einer geraden Straße fahrendes Auto hat ein GPS-Gerät installiert, welches die Position des Autos speichert. Die Masse des Autos ist 1175 kg. Welche Kraft wirkt auf das Auto zur Zeit t =20 s?

Differenzieren Sie mittels der APP Numerische Integration.

t [s]	x [m]
0.00	7.0000000
0.500	14.191468
1.00	21.556045
1.50	29.073493
2.00	36.721801
2.50	44.477305
3.00	52.314830
3.50	60.207848
4.00	68.128647
4.50	76.048522
5.00	83.937969

solution

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

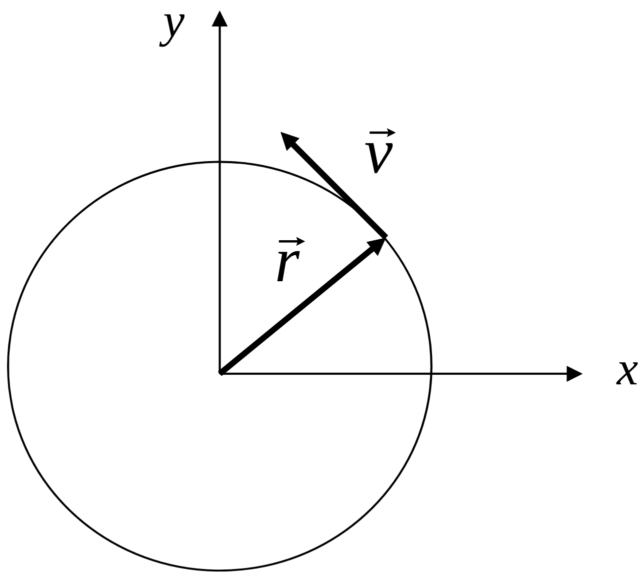
$$|\vec{r}| = \sqrt{R^2\cos^2(\omega t) + R^2\sin^2(\omega t)} = R$$

$$\omega = 2\pi f$$

Frequenz [1/s] = [Hz]

Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

Kreisbewegung

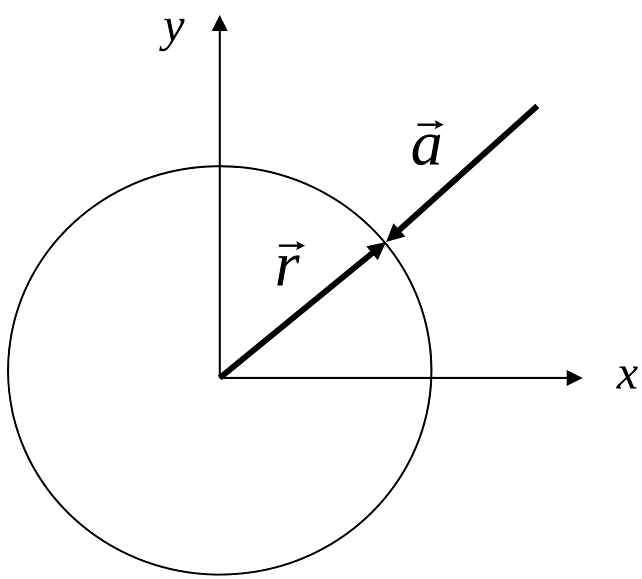


$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

$$|\vec{v}| = |\omega R|$$

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

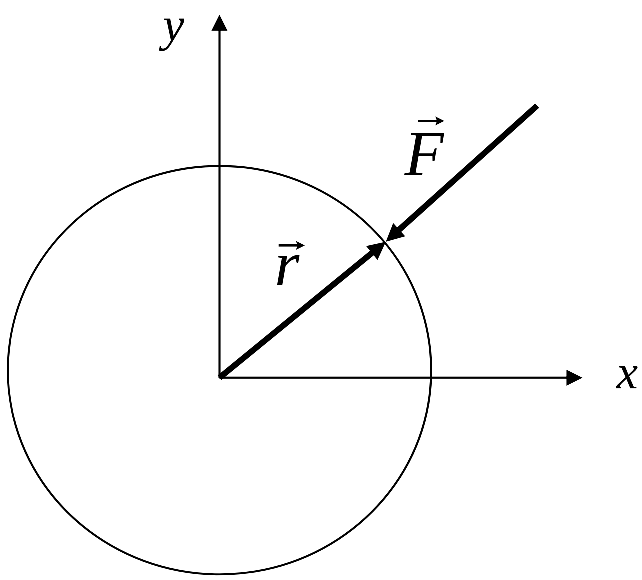
$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$|\vec{a}| = |\omega^2 R| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

Zentrifugalbeschleunigung

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r}$$

$$\left|\vec{F}\right| = \left|m\omega^2 R\right| = \frac{m\left|\vec{v}\right|^2}{R}$$

Zentrifugalkraft