Physik M

Position → Kraft (numerisch)

Ein auf einer geraden Straße fahrendes Auto hat ein GPS-Gerät installiert, welches die Position des Autos speichert. Die Masse des Autos ist 1175 kg. Welche Kraft wirkt auf das Auto zur Zeit t =20 s?

Differenzieren Sie mittels der APP Numerische Integration.

t [s]	x [m]
0.00	7.0000000
0.500	14.191468
1.00	21.556045
1.50	29.073493
2.00	36.721801
2.50	44.477305
3.00	52.314830
3.50	60.207848
4.00	68.128647
4.50	76.048522
5.00	83.937969

solution

Arbeiten mit Daten

Manchmal erhält man Daten in Form von Textspalten. Sie sollten in der Lage sein:

- Erwartungswert und Standardabweichung jeder Spalte zu berechnen;
- alle Werte einer Spalte mit einem Wert zu multiplizieren (z.B. könnte eine Spalte die Beschleunigung eines Teilchens zu verschiedenen Zeiten repräsentieren. Multipliziert mit der Masse liefert das die jeweilige Kraft);
- die Daten einer Spalte zu plotten;
- die Daten einer Spalte numerisch zu integrieren;
- die Daten einer Spalte numerisch zu differenzieren;
- die Daten von einem Format, welches '.' als Dezimaltrennzeichen nutzt in ein Format, welches ',' als Dezimaltrennzeichen nutzt umzuwandeln.

Apps: Erwartungswert und Standardabweichung, Numerische Integration und Differentiation von Funktionen in Abhängigkeit von t, Numerische Integration und Differentiation von Funktionen in Abhängigkeit von x, Dezimal Punkt ↔ Beistrich.

Punktmechanik

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{r} \qquad \vec{v} \qquad \vec{a} \qquad \vec{F}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' + \vec{r}(t_0) \qquad \vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' + \vec{v}(t_0)$$

Fähigkeiten

Mechanik punktartiger Teilchen

Bei gegebener Position $\vec{r}$ [m], Geschwindigkeit $\vec{v}$ [m/s], Beschleunigung $\vec{a}$ [m/s²], oder Kraft $\vec{F}$ [N] als Funktion der Zeit eines Teilchens, müssen Sie in der Lage dazu sein, jede der vier Grössen durch Integrieren oder Ableiten der anderen Grössen zu erhalten.

App: Numerische Integration und Differentiation von Funktionen in Abhängigkeit von t.

Numerische Lösen von Differentialgleichungen

Anfangsbedingungen: $x(t=0)=x_0$ $\qquad v_x(t=0)=v_{x0}$

$$\frac{dx}{dt}=v_x \qquad \frac{dv_x}{dt}=\frac{F_x(x,v_x,t)}{m}$$

$$x(\Delta t)\approx x_0+v_x\Delta t \qquad v_x(\Delta t)\approx v_{x0}+a_x\Delta t$$

Ball werfen ohne Reibung

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} =$$ -9.81

Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 0

$v_x(t_0) =$ 10

$t_0 =$ 0

$\Delta t =$ 0.01

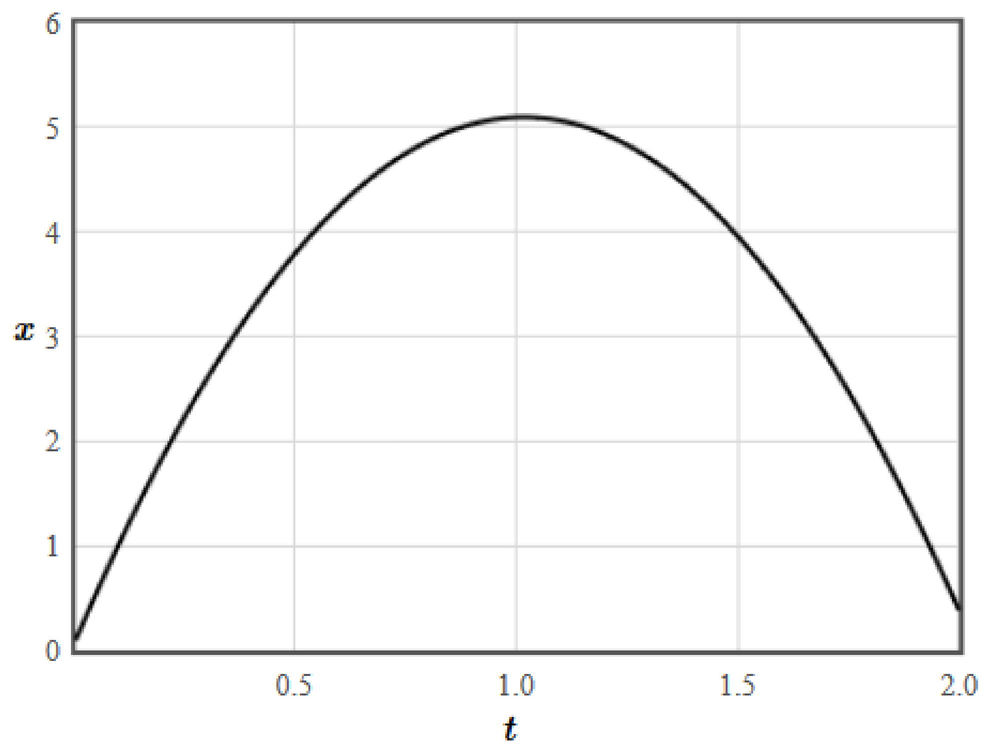
N_{steps} 200

Graphische Darstellung: x vs. t

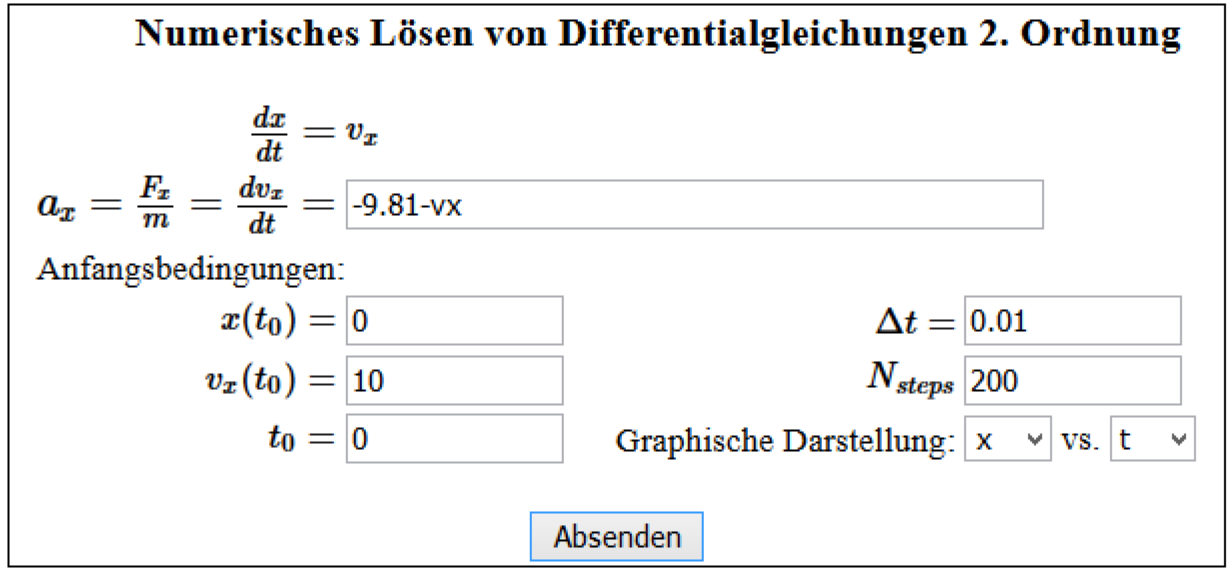
Absenden

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$



Ball werfen mit Reibung



$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - av_x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g - \frac{a}{m}v_x$$

Endgeschwindigkeit

Massa - Feder

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \text{-3*x}$$

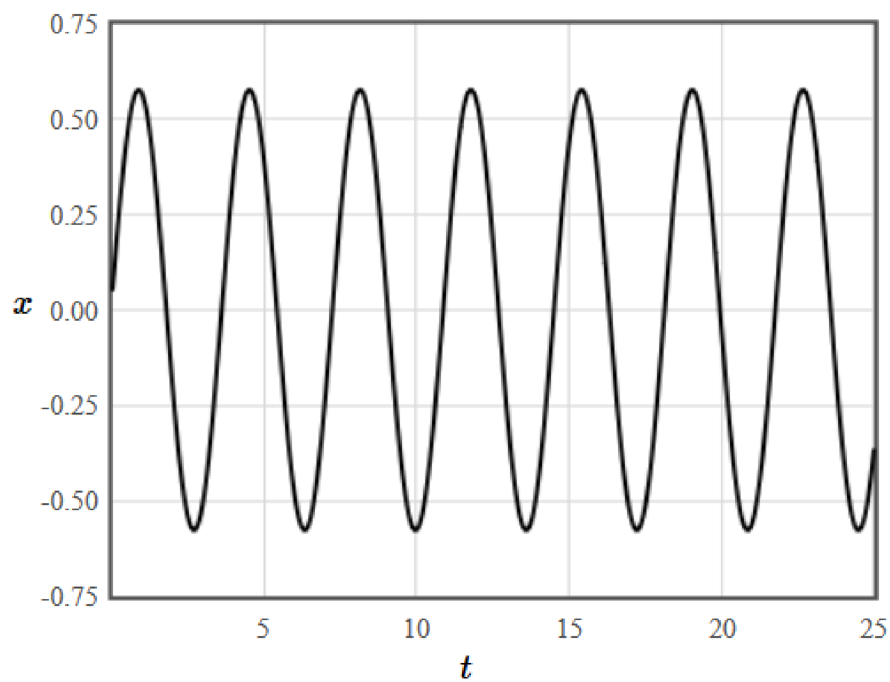
Anfangsbedingungen:

$x(t_0) = 0$ $\quad \Delta t = 0.05$

$v_x(t_0) = 1$ $\quad N_{steps}$ 500

$t_0 = 0$ $\quad$ Graphische Darstellung: x vs. t

Absenden



$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}x$$

Massa - Feder mit Reibung

Numerical 2nd order differential equation solver

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} = \text{-0.9*x-0.2*vx+0.1000*cos(1*t)}$$

Intitial conditions:

$x(t_0) =$ 0.02 $\Delta t =$ 0.05

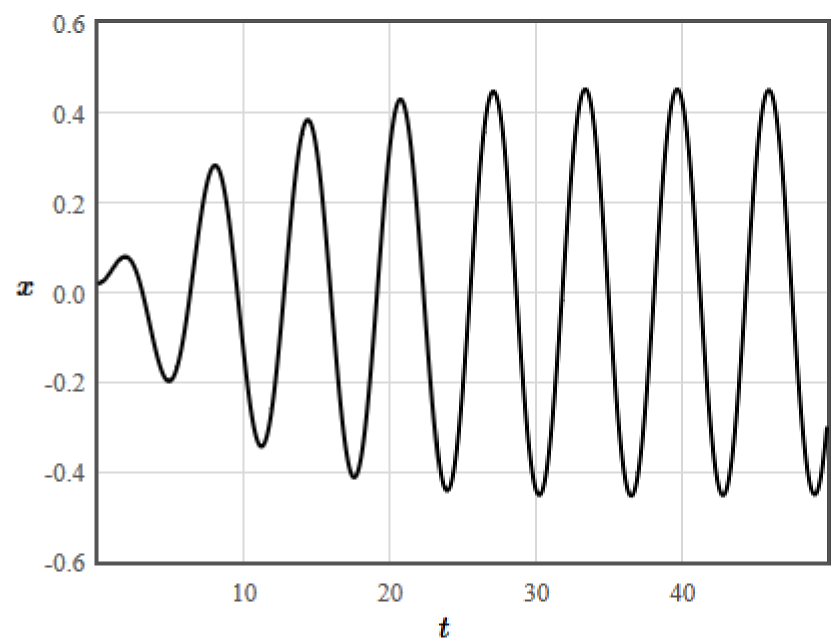
$v_x(t_0) =$ 0 N_{steps} 1000

$t_0 =$ 0 Plot: x vs. t

submit

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - av_x + A\cos(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{a}{m}v_x + \frac{A\cos(t)}{m}$$



Numerisches Lösen von Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{dv_x}{dt} = F_x(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)/m$$

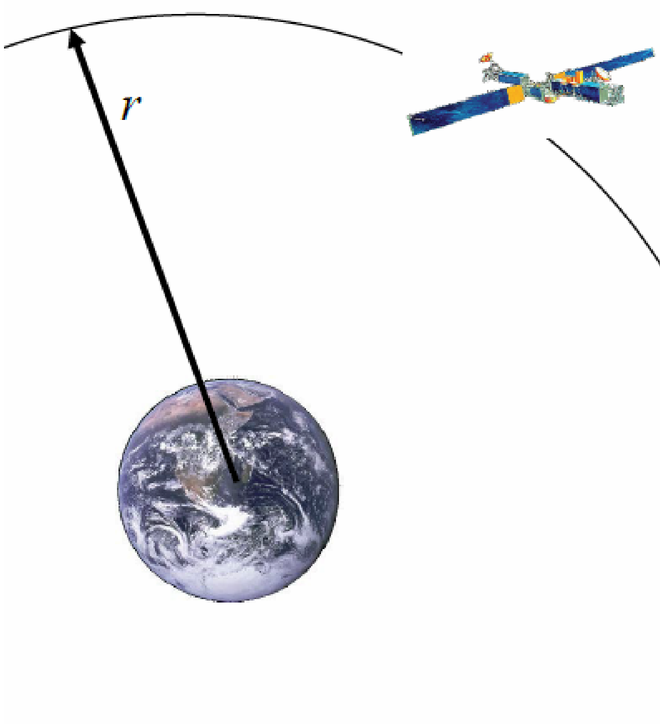
$$\frac{dy}{dt} = v_y \qquad \frac{dv_y}{dt} = F_y(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)/m$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \qquad \frac{dv_z}{dt} = F_z(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)/m$$

Satellitenbahnen

$$\vec{F} = \frac{-Gm_{erde}m_{sat}}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{-Gm_{erde}m_{sat}x}{m_{sat}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$



Numerical 6th order differential equation solver

$\frac{dx}{dt} = v_x$

$\frac{dv_x}{dt} =$ -x*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

$\frac{dy}{dt} = v_y$

$\frac{dv_y}{dt} =$ -y*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

$\frac{dz}{dt} = v_z$

$\frac{dv_z}{dt} =$ -z*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

Initial conditions:

$t_0 =$	0	$\Delta t =$	60
$x(t_0) =$	0	N_{steps}	1500
$v_x(t_0) =$	7900	Plot:	y vs. x
$y(t_0) =$	6371000		
$v_y(t_0) =$	0		
$z(t_0) =$	0		
$v_z(t_0) =$	0		

Ein Ball wird in den Wind geworfen

$$\vec{F} = -a(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}}) - b(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})|(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})| - mg\hat{z}$$

Numerical 6th order differential equation solver

$\frac{dx}{dt} = v_x$

$\frac{dv_x}{dt} =$
```
(-0.01*(vx-(1))-0.03*(vx-(1))*sqrt((vx-(1))*(vx-
(1))+(vy-(7*exp(-x*x)))*(vy-(7*exp(-x*x)))+
(vz-(-3*exp(-t*t)))*(vz-(-3*exp(-t*t)))))/0.1
```

$\frac{dy}{dt} = v_y$

$\frac{dv_y}{dt} =$
```
(-0.01*(vy-(7*exp(-x*x)))-0.03*(vy-
(7*exp(-x*x)))*sqrt((vx-(1))*(vx-(1))+(vy-
(7*exp(-x*x)))*(vy-(7*exp(-x*x)))+
(vz-(-3*exp(-t*t)))*(vz-(-3*exp(-t*t)))))/0.1
```

$\frac{dz}{dt} = v_z$

$\frac{dv_z}{dt} =$
```
(-0.01*(vz-(-3*exp(-t*t)))-0.03*(vz-
(-3*exp(-t*t)))*sqrt((vx-(1))*(vx-(1))+(vy-
(7*exp(-x*x)))*(vy-(7*exp(-x*x)))+
(vz-(-3*exp(-t*t)))*(vz-(-3*exp(-t*t)))))/0.1-9.81
```

Initial conditions:

$t_0 =$ 0

$x(t_0) =$ 0

$v_x(t_0) =$ -7

$y(t_0) =$ 0

$v_y(t_0) =$ 5

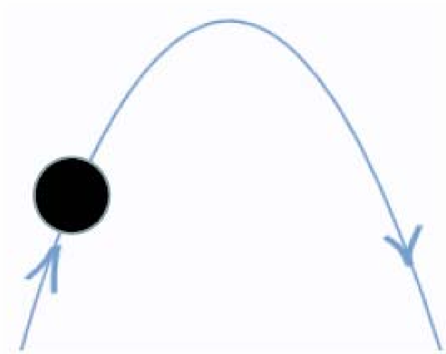
$z(t_0) =$ 0

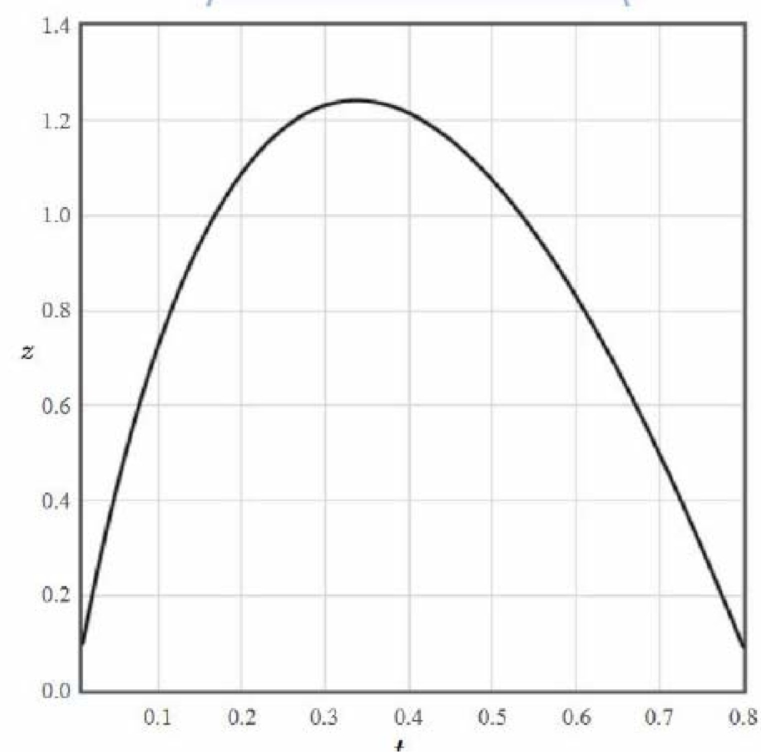
$v_z(t_0) =$ 10

$\Delta t =$ 0.01

N_{steps} 80

Plot: z vs. t





Rocket launch

$$\vec{F}_{fric} = -a(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}}) - b(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})|(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})|,$$

Numerical 6th order differential equation solver

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} =$$

```
(-0.01*(vx-(0.2*exp(-t*t/50)))-0.03*(vx-
(0.2*exp(-t*t/50)))*sqrt((vx-(0.2*exp(-t*t/50)))*
(vx-(0.2*exp(-t*t/50)))+(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))*
(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))+(vz-(0))*(vz-(0))))/(0.1*
(2-H(3-t)*t/3-H(t-3)))
```

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} =$$

```
(-0.01*(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))-0.03*(vy-
(-0.3*exp(-t*t/50)))*sqrt((vx-(0.2*exp(-t*t/50)))*
(vx-(0.2*exp(-t*t/50)))+(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))*
(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))+(vz-(0))*(vz-(0))))/(0.1*
(2-H(3-t)*t/3-H(t-3)))
```

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_z}{dt} =$$

```
(-0.01*(vz-(0))-0.03*(vz-(0))*sqrt((vx-
(0.2*exp(-t*t/50)))*(vx-(0.2*exp(-t*t/50)))+
(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))*(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))+
(vz-(0))*(vz-(0))))/(0.1*(2-H(3-t)*t/3-H(t-3)))-
9.81+5*H(3-t)/(0.1*(2-H(3-t)*t/3-H(t-3)))
```

Initial conditions:

$t_0 =$	0	$\Delta t =$	0.02
$x(t_0) =$	0	N_{steps}	500
$v_x(t_0) =$	0	Plot:	z vs. t
$y(t_0) =$	0		
$v_y(t_0) =$	0		
$z(t_0) =$	0		
$v_z(t_0) =$	0		

submit

Fähigkeiten

Differenzialgleichungen

Viele Systeme die sich mit der Zeit verändern, lassen sich als Differenzialgleichungen darstellen. Dies beinhaltet Aktienkurse, Tierpopulationen, Maschinenvibrationen und die Bewegungen eines Teilchens. Dieser Kurs wird sich darauf beschränken die Bewegung von Teilchen in 1, 2 und 3 Dimensionen zu behandeln. Die Kraft eines solchen Teilchens, welches in einer Dimension bewegt ist, lässt sich durch seinen Ort x, seine Geschwindigkeit v_x, und die Zeit t beschreiben. Ist die Kraft eines Teilchens bekannt, lässt sich das Gesetz von Newton als Differenzialgleichung schreiben:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(v_x, x, t).$$

Mit F der Kraft und m der Masse. Dies lässt sich ebenfalls als zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung darstellen,

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \text{und} \quad \frac{dv_x}{dt} = F(x, v_x, t)/m.$$

Problem 4

Zur Zeit $t = 0$ befindet sich ein Ball an der Position $\vec{r} = 0$ und hat die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = 4\hat{x} + 3\hat{y} + 9\hat{z} \text{ [m/s]}.$$

Der Ball hat eine Masse von $m = 0.5$ [kg]. Zwei Kräfte wirken auf den Ball: Schwerkraft $\vec{F}_{grav} = -mg\hat{z}$ [N], und eine Reibungskraft, auf Grund des Windes. Der Wind hat eine zeitabhängige Geschwindigkeit $\vec{v}_{wind} = \exp(-t^2)\hat{y}$ [m/s]. Die Reibungskraft ist $\vec{F}_{drag} = -0.1(\vec{v} - \vec{v}_{wind})$ [N].

Mit $g = 9.81$ [m/s²] der Gravitationsbeschleunigung auf der Erdoberfläche. Welche Differentialgleichung muss gelöst werden, um die Bahnkurve des Balls bestimmen zu können?

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \quad$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \quad$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \quad$$

Wo ist der Ball bei $t = 3$ s?

$$\vec{r} = \quad \hat{x} + \quad \hat{y} + \quad \hat{z} \text{ [m]}$$