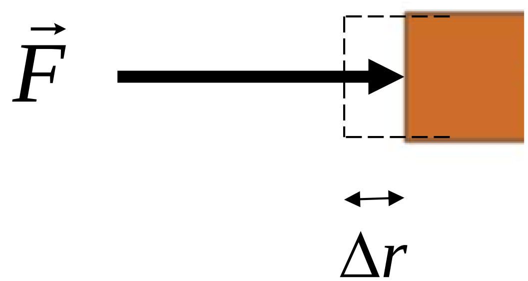
9. Arbeit

Elektrizität

5 Nov. 2018

Arbeit

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \times \text{Abstand}$$



$$\Delta W = F\,\Delta r$$

$$[\mathrm{Nm}] = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}\right]\mathrm{m} = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^2}\right] = \mathrm{J}$$

Kinetische Energie: $\frac{1}{2}mv^2 = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^2}\right]$ Potentielle Energie: $mg\Delta y = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^2}\right]$

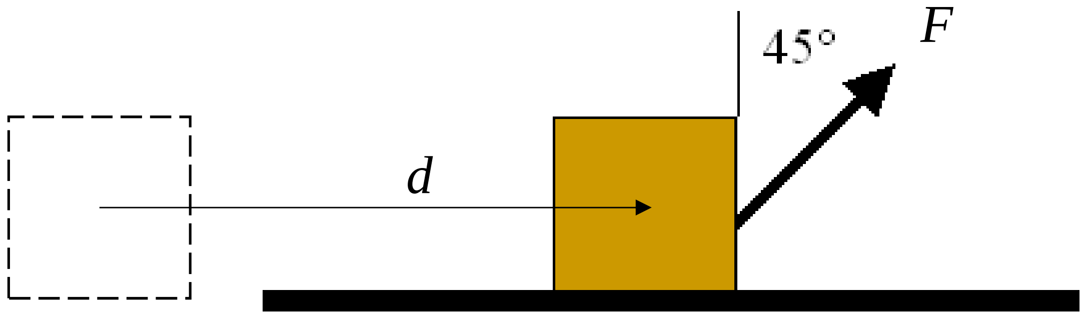
$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}}$$

Bauaufzug

Ein Bauaufzug soll Baumaterial zur Baustelle befördern. Der Aufzug muß in der Lage sein, ein maximales Gewicht von $m = 1467$ kg mit einer Geschwindigkeit von $v = 0.3$ m/s vertikal zu bewegen. Welche minimale Leistung muß der Aufzug aufbringen?

$P =$ ______ [W] submit

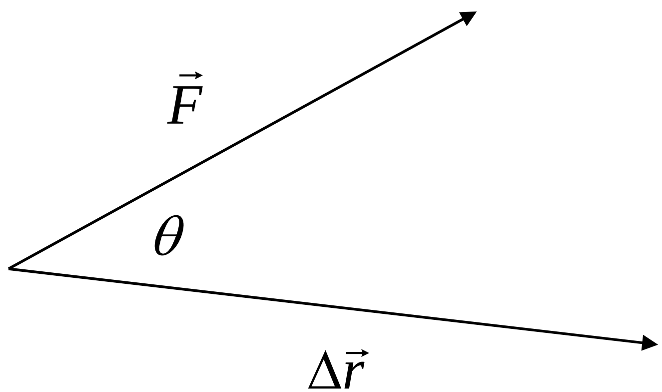
Arbeit



Skalarprodukt

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\theta = F_x\Delta r_x + F_y\Delta r_y + F_z\Delta r_z$$



Arbeit

$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$\vec{F} = F_x \ \hat{x} + F_y \ \hat{y} + F_z \ \hat{z}$$

$$d\vec{r} = dx \ \hat{x} + dy \ \hat{y} + dz \ \hat{z}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\boxed{W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz}$$

3-D motion differential equation solver

$F_x =$ -x [N]

$F_y =$ 0 [N]

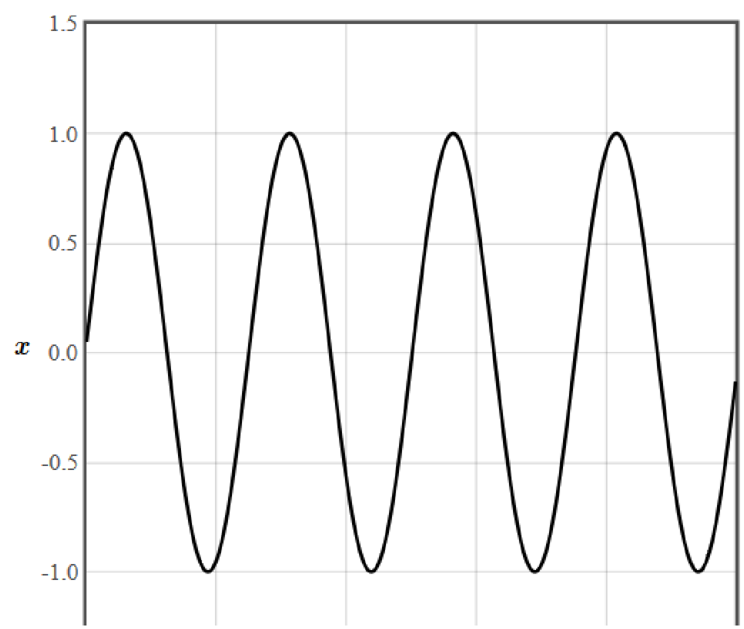
$F_z =$ 0 [N]

$m =$ 1 [kg]

Initial conditions:

$t_0 =$	0	[s]	$\Delta t =$	0.05	[s]
$x(t_0) =$	0	[m]	N_{steps}	500	
$v_x(t_0) =$	1	[m/s]	Plot:	x vs. t	
$y(t_0) =$	1	[m]			
$v_y(t_0) =$	1	[m/s]			
$z(t_0) =$	1	[m]			
$v_z(t_0) =$	1	[m/s]			

submit



Energieerhaltungssatz

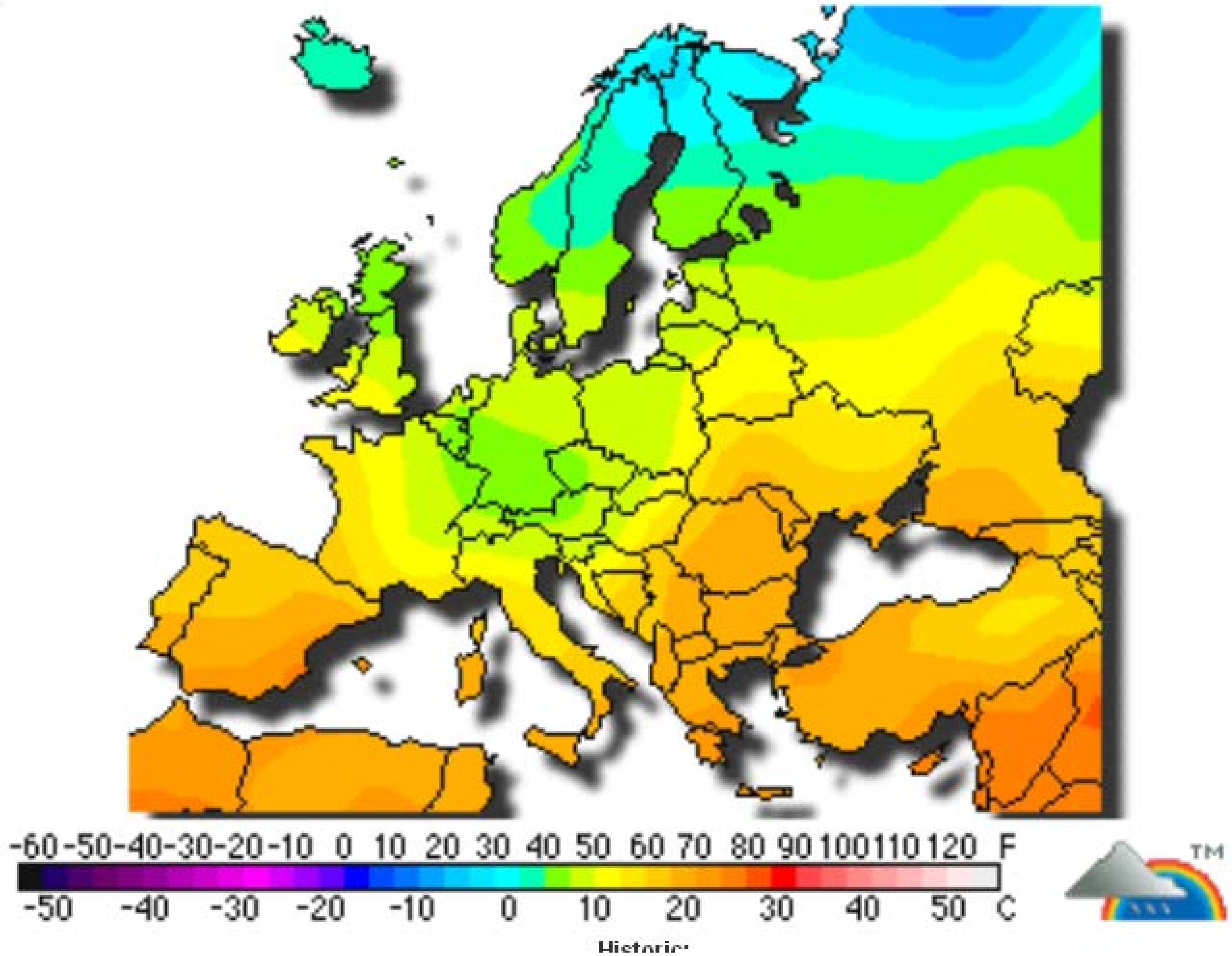
$$W = \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} + \Delta E_{therm}$$

konservative Kraft $\rightarrow$ Potentielle energie

$$E_{pot}(x,y,z) = -W$$

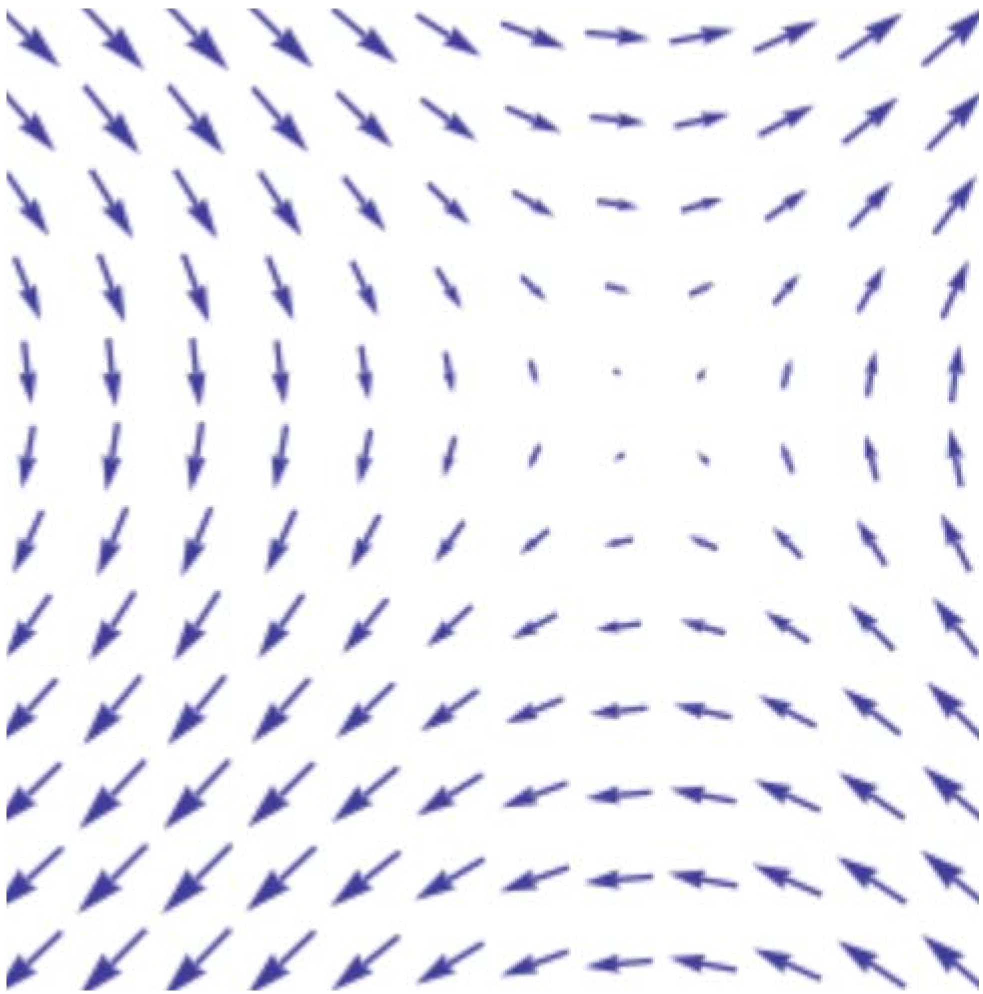
	Kraft	Potentielle energie
Schwerkraft	$\vec{F} = -mg\ \hat{y}$	$E_{pot}(x,y,z) = mgy$
Feder	$\vec{F} = -kx\ \hat{x}$	$E_{pot}(x,y,z) = \frac{kx^2}{2}$
Gravitation	$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\ \hat{r}$	$E_{pot}(x,y,z) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
Coulomb	$\vec{F} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$	$E_{pot}(x,y,z) = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Skalarfeld



Potentielle energie ist ein Skalarfeld

Vektorfeld



Elektrisches Feld, Magnetfeld

Potentielle energie → Kraft

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot}(x, y, z)$$

Gradient: $$\nabla E_{pot} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\hat{z}$$

Partielle Ableitung

Gradient

Der Druck P ist in einem bestimmten Gebiet im Raum durch die folgende Funktion bestimmt:

$$P = 7x^3y^{-9}z^6$$

Berechnen Sie den Gradienten des Drucks!

$\nabla P =$ ______ $\hat{x}$ + ______ $\hat{y}$ + ______ $\hat{z}$ [K/m]

Lösung

$$\nabla P = (21x^2y^{-9}z^6)\hat{x} + (-63x^3y^{-10}z^6)\hat{y} + (42x^3y^{-9}z^5)\hat{z}.$$

Potentielle energie $\rightarrow$ konservative Kraft

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot}(x, y, z)$$

	Potentielle energie	Kraft
Schwerkraft	$E_{pot}(x, y, z) = mgy$	$\vec{F} = -mg\ \hat{y}$
Feder	$E_{pot}(x, y, z) = \frac{kx^2}{2}$	$\vec{F} = -kx\ \hat{x}$
Gravitation	$E_{pot}(x, y, z) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$	$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\ \hat{r}$
Coulomb	$E_{pot}(x, y, z) = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\vec{F} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$

Potentielle energie → konservative Kraft

$$E_{pot}(x,y,z) = mgy \qquad \rightarrow \qquad \vec{F} = -mg\ \hat{y}$$

$$E_{pot}(x,y,z) = \frac{kx^2}{2} \qquad \rightarrow \qquad \vec{F} = -kx\ \hat{x}$$

Potentielle energie → konservative Kraft

$$E_{pot}(x, y, z) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \rightarrow \qquad \vec{F} = -\nabla E_{pot} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$$

Elektrizität

Coulombsches Gesetz

$$E_{pot}(x, y, z) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

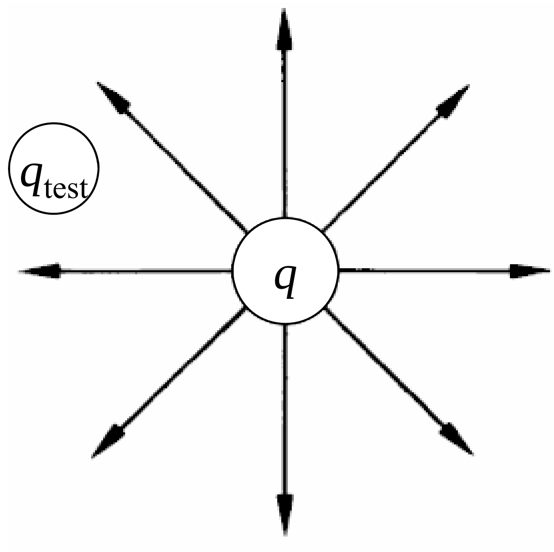
Skalarfeld

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot}$$

Vektorfeld

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \ \hat{r}$$

Elektrisches Feld



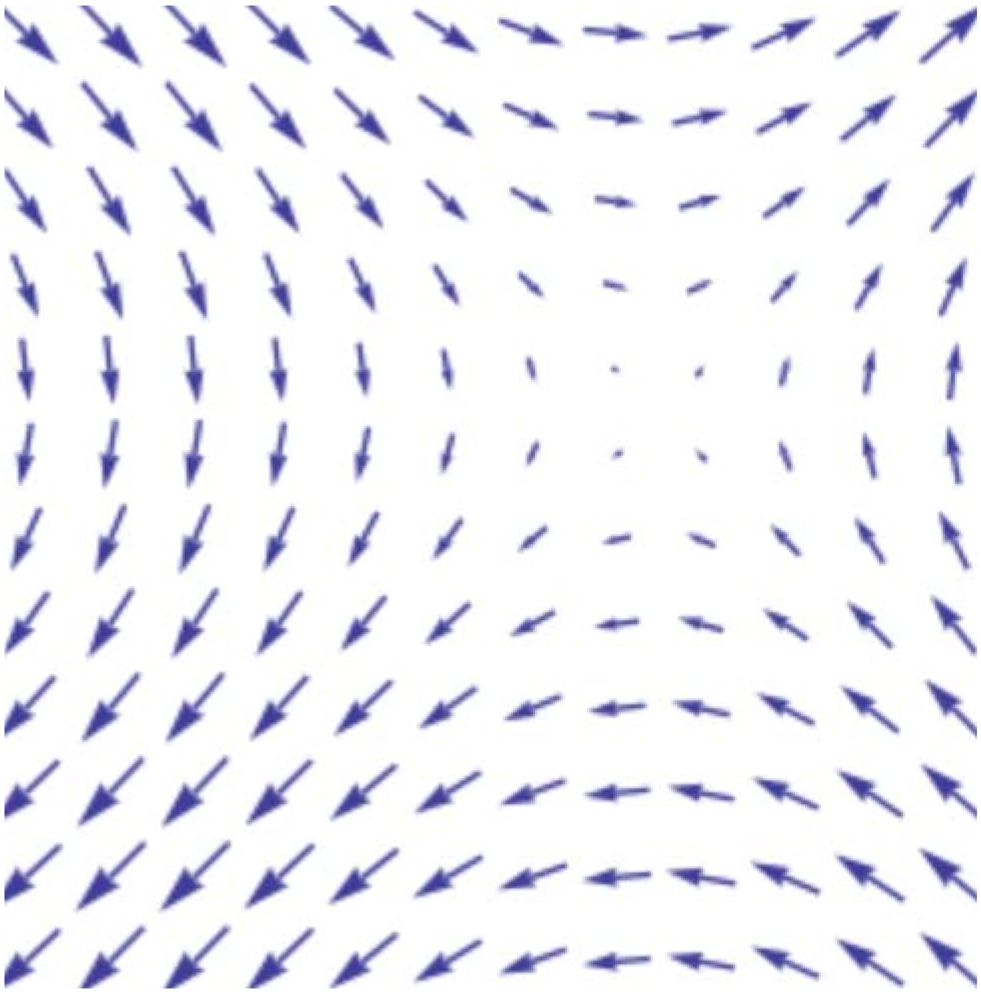
$$\vec{F} = \frac{q_{test} q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Vektorfeld

$$\vec{F} = q_{test}\vec{E}$$

Vektorfeld

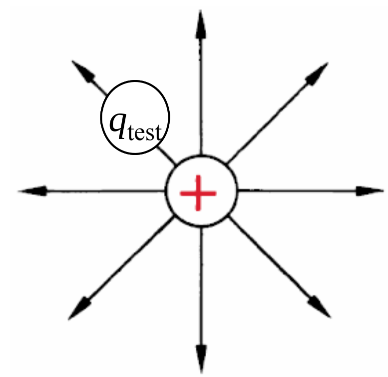


Elektrisches Feld, Magnetfeld

Elektrostatische Potential

Elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q_{test}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

Elektrostatische Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{E_{pot}}{q_{test}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

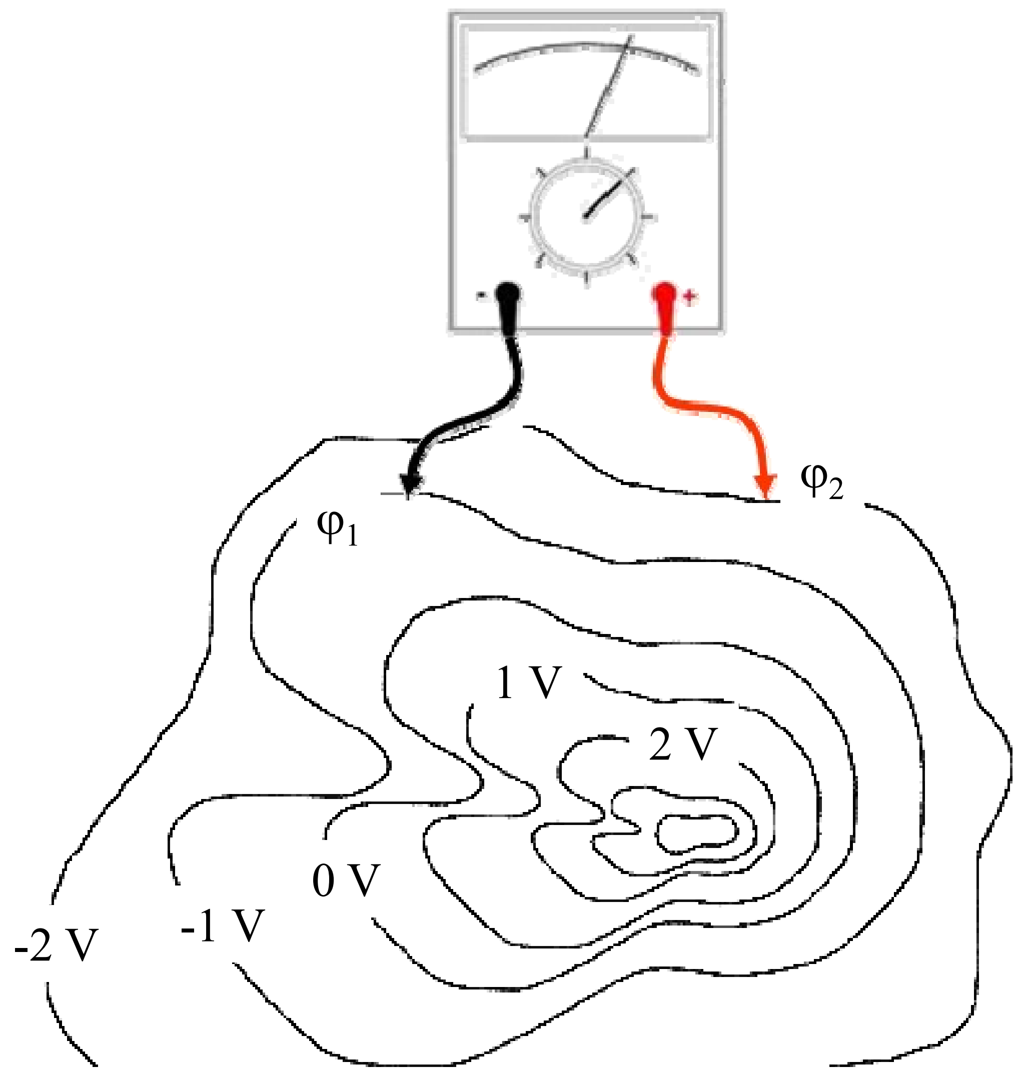
$$\varphi_b - \varphi_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Spannung

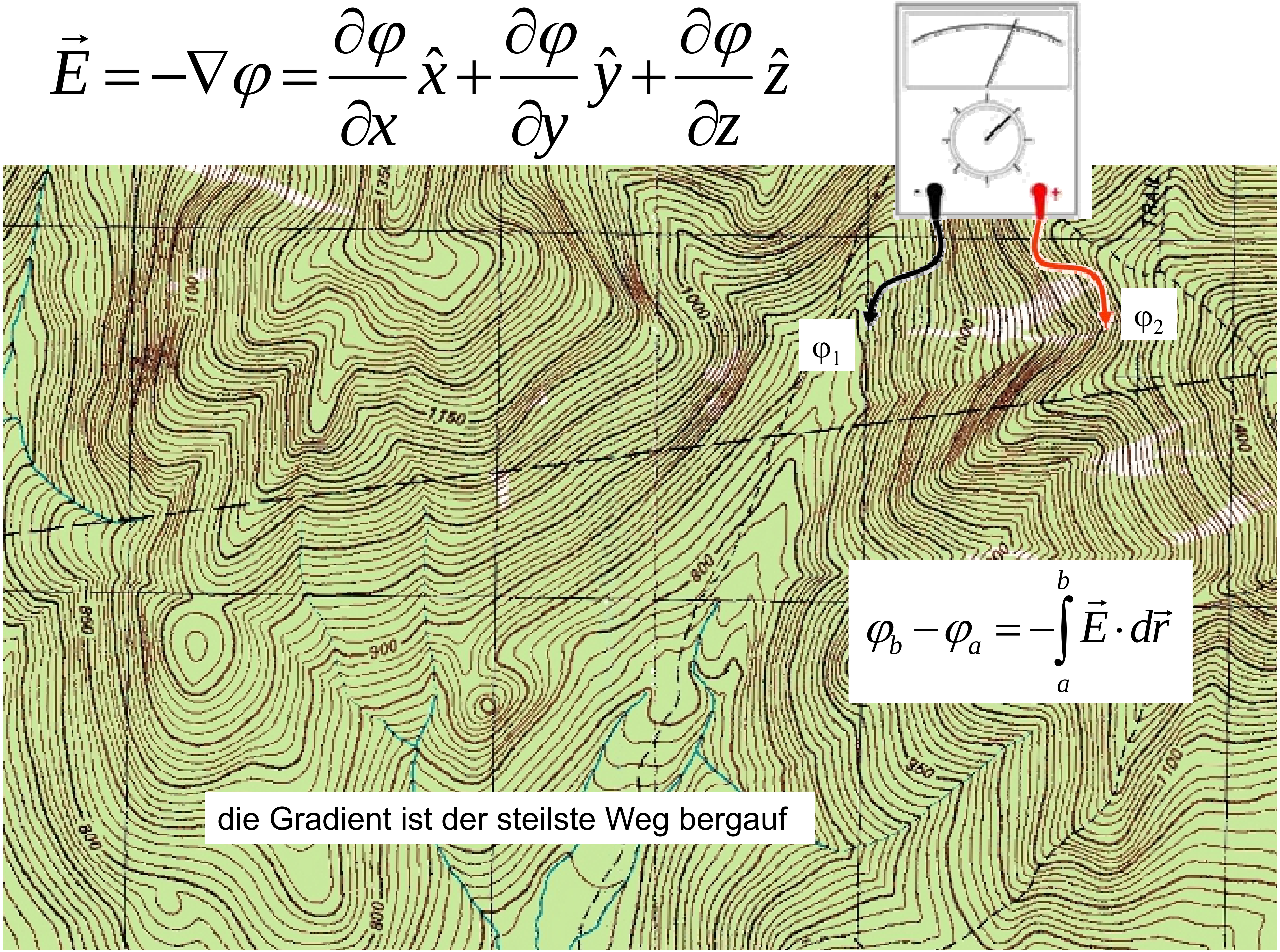
$$V = \varphi_2 - \varphi_1 \qquad \text{Volts}$$

Elektrostatische Potential [Volts]

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$



$$\vec{E} = -\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}$$



$$\varphi_b - \varphi_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

die Gradient ist der steilste Weg bergauf

$$E(x,y,z) = -\left(\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\, i}_{E_x} + \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\, j}_{E_y} + \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\, k}_{E_z}\right) \tag{4.102}$$

Elektrostatische Potential φ

Gleichung (4.102) kann auch mit dem *Vektoroperator Gradient*

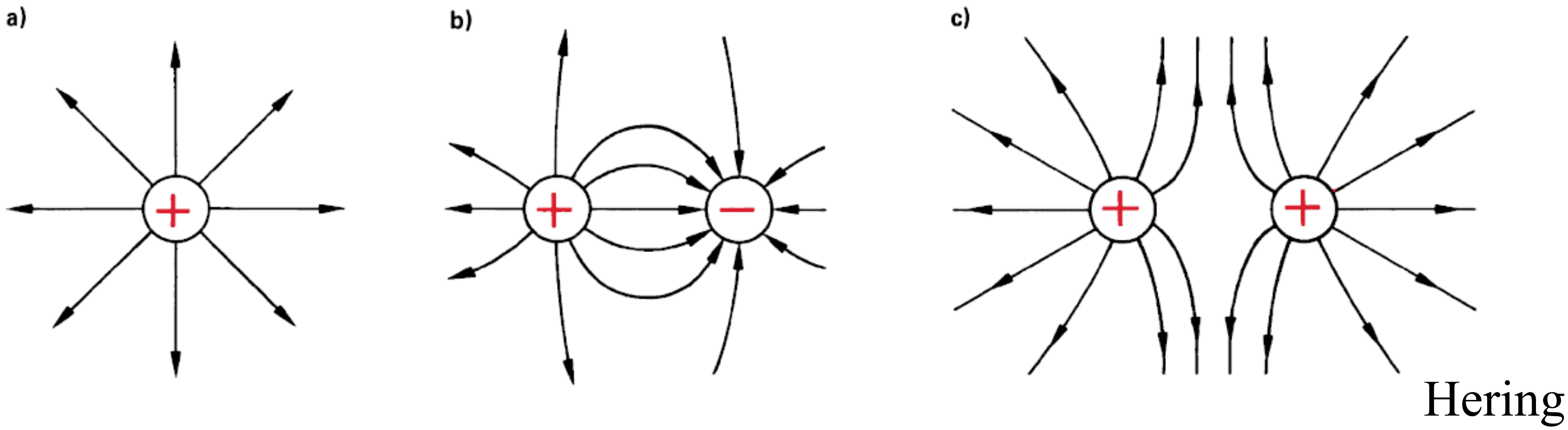
$$\mathbf{grad} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

Hering

formuliert werden:

$$E = -\mathbf{grad}\,\varphi\,. \tag{4.103}$$

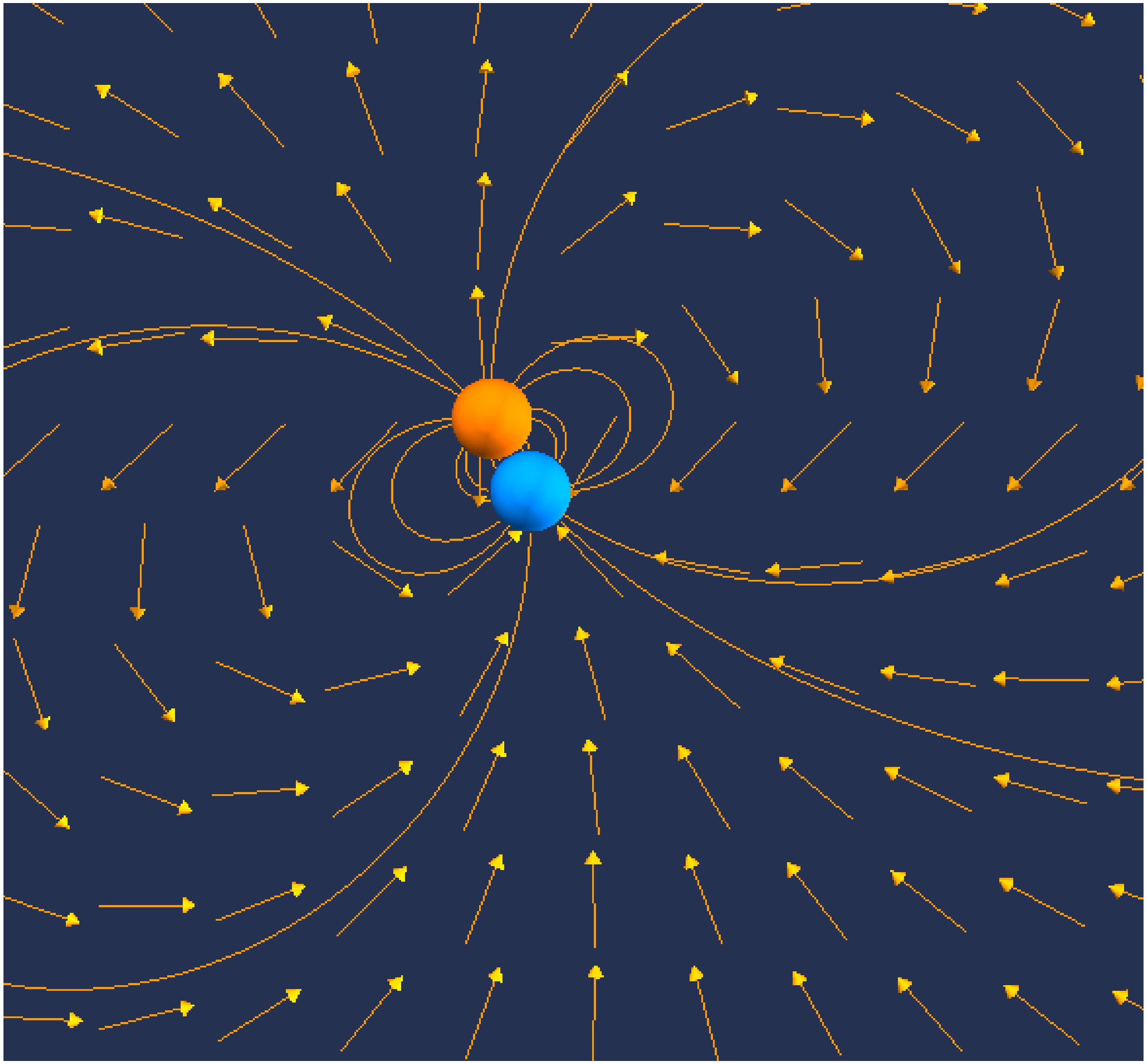
Elektrisches Feld



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Äquipotentialfläche - Feldlinien



http://public.mitx.mit.edu/gwt-teal/PCharges.html

Punktladungsverteilung

Elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Elektrostatische Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = q_{test}\vec{E} = q_{test} \sum_i \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Elektrisches Feld einer Punktladungsverteilung

Das elektrostatische Potential φ einer Punktladungsverteilung ist

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}} \text{ [V].}$$

Dabei sind q_i die Ladungen und $\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$ die Positionen der Punktladungen. Die Beziehung zwischen elektrischem Feld und elektrostatischem Potential ist $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \text{ [V/m].}$$

Das elektrische Feld lautet in x, y und z Koordinaten:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{q_i(x-x_i)}{4\pi\epsilon_0\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}\hat{x} + \frac{q_i(y-y_i)}{4\pi\epsilon_0\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}\hat{y} + \frac{q_i(z-z_i)}{4\pi\epsilon_0\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}\hat{z} \right] \text{ [V/m]}$$

Im folgenden Formular können Sie Ladungen und Positionen von bis zu 10 Punktladungen angeben. Für diese wird das elektrostatische Potential und das elektrische Feld am Ort $\vec{r}$ berechnet. Der Nullpunkt des Potentials sei sehr weit von allen Ladungen entfernt.

$\vec{r} =$ 1 $\hat{x} +$ 0 $\hat{y} +$ 0 $\hat{z}$ [m]

Berechne φ und E an der Position r

$\varphi(\vec{r}) =$ [V]

$\vec{E}(\vec{r}) =$ $\hat{x} +$ $\hat{y} +$ $\hat{z}$ [V/m]

$q_1 =$ 1E-6 [C] $\vec{r}_1 =$ 0 $\hat{x} +$ 0 $\hat{y} +$ 0 $\hat{z}$ [m]

$q_2 =$ [C] $\vec{r}_2 =$ $\hat{x} +$ $\hat{y} +$ $\hat{z}$ [m]

$q_3 =$ [C] $\vec{r}_3 =$ $\hat{x} +$ $\hat{y} +$ $\hat{z}$ [m]

http://lampx.tugraz.at/~hadley/physikm/apps/coulombE.de.php

Elektrisches Feld einer Ladungsverteilung auf einer gekrümmten Linie

Gegeben sei ein Draht der Länge L mit einer uniformen Ladungsdichte λ. Dieser Draht kann in verschiedene Formen gebogen werden. Das elektrostatische Potential φ, welches durch den Draht aufgebaut wird, kann bestimmt werden, indem der Draht in kurze Segmente geteilt wird und Beiträge aller Segmente aufsummiert werden. Die Segmente haben eine Länge Δs und eine Ladung $\Delta q = \lambda \Delta s$. Deren Beitrag zum elektrostatischen Potential an der Position $\vec{r}$ ist:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}} \text{ [V].}$$

Hier sind $\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$ die Positionen der Punktladungen entlang des Drahts. Die Beziehung zwischen elektrischem Feld und elektrostatischem Potential ist $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \text{ [V/m]}$$

Das elektrische Feld lautet in x, y und z Koordinaten:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{q_i(x-x_i)}{4\pi\epsilon_0 \left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}\hat{x} + \frac{q_i(y-y_i)}{4\pi\epsilon_0 \left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}\hat{y} + \frac{q_i(z-z_i)}{4\pi\epsilon_0 \left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}\hat{z} \right] \text{ [V/m].}$$

Die Lage und Form des Drahtes kann mit einer parametrischen Gleichung unter Verwendung eines Parameters s, der die Distanz entlang des Drahtes mißt, festgelegt werden. Beispielsweise wird ein gerader Draht von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ beschrieben durch:

$$\vec{r}_{wire} = (r_{1x} + s(r_{2x} - r_{1x}))\hat{x} + (r_{1y} + s(r_{2y} - r_{1y}))\hat{y} + (r_{1z} + s(r_{2z} - r_{1z}))\hat{z} \quad \text{mit } s = [0,1].$$

Für eine Drahtschleife des Radiuses R in der x-y Ebene an $z = 0$:

$$\vec{r}_{wire} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + 0\hat{z} \quad \text{mit } s = [0,1].$$

Für eine Drahtwendel mit 10 Windungen

$$\vec{r}_{wire} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + \frac{s}{n}\hat{z} \quad \text{mit } s = [0,10],$$

http://lampx.tugraz.at/~hadley/physikm/apps/linecharge.de.php

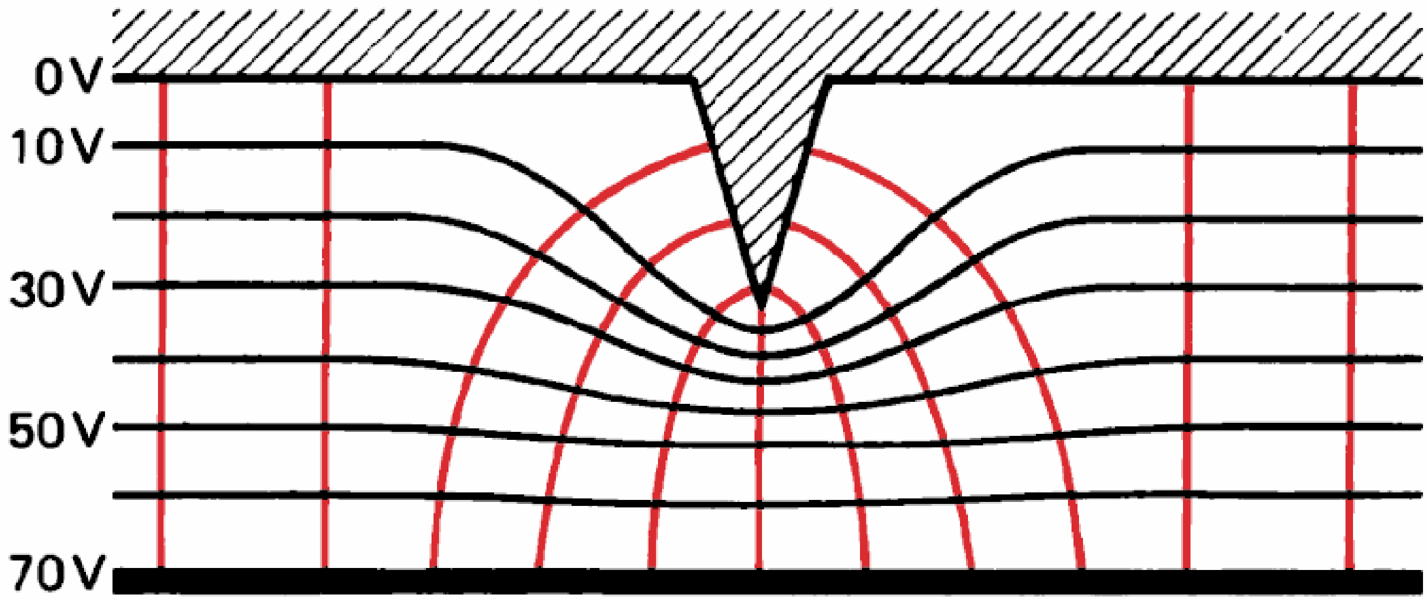
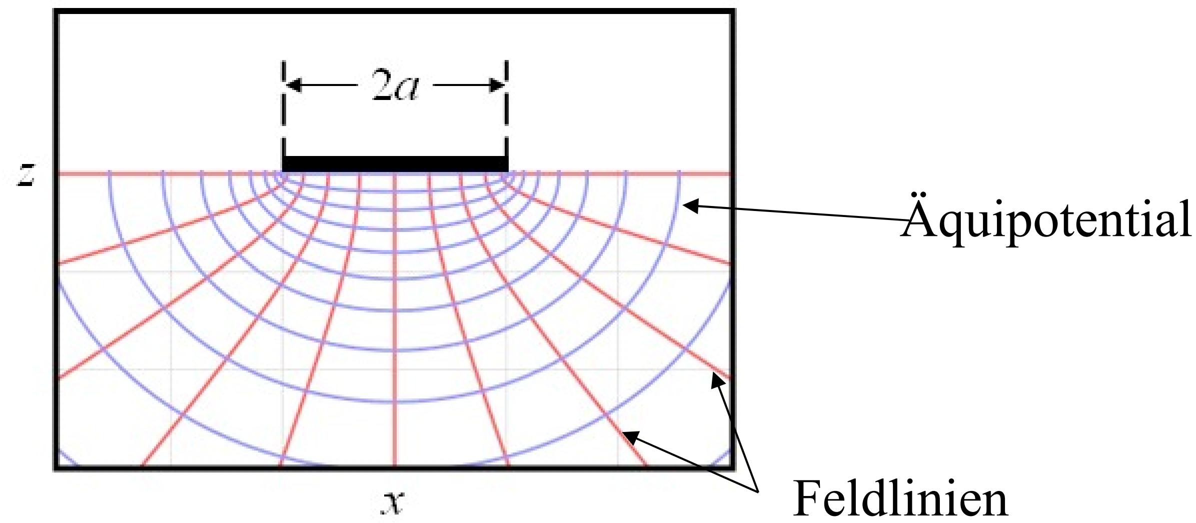
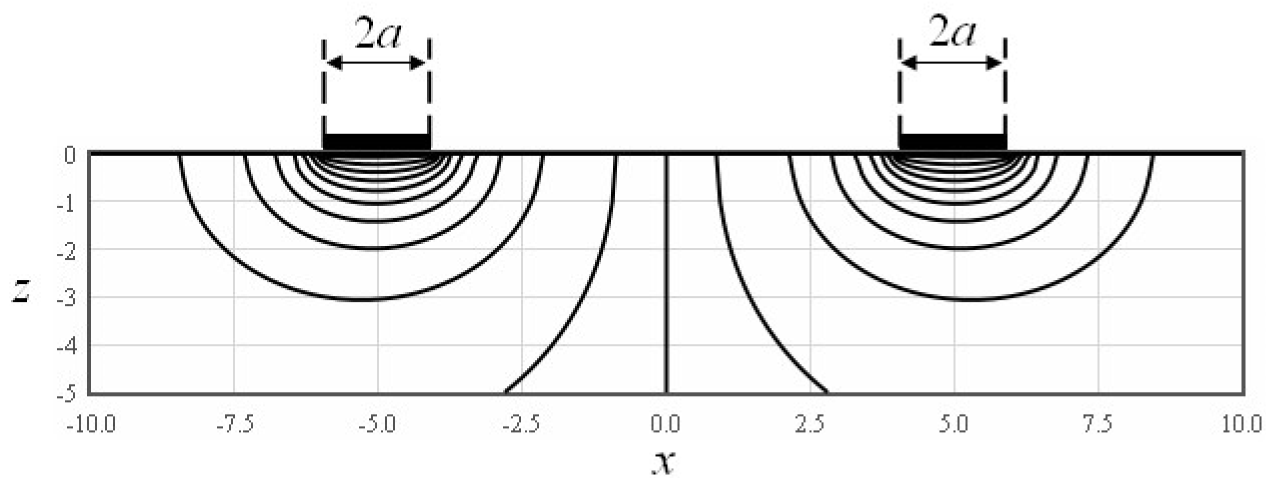


Abb. 4.55 Äquipotentiallinien und elektrische Feldlinien an einer metallischen Spitze

Hering

Äquipotentialfläche - Feldlinien





Elektrostatik

q_i

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}$$

$\vec{E}$

$$\varphi = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r} + \varphi_0$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

φ

Ladungsdichte

für viele elektrische Ladungen

$$\sum_i q_i \quad \Rightarrow \quad \rho(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{vol} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} (\vec{r} - \vec{r}\,') dx' dy' dz'$$

Elektrostatik

$$\rho$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')d^3r'$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}$$

$$\varphi = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r} + \varphi_0$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\varphi$$

Gaußsches Gesetz

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

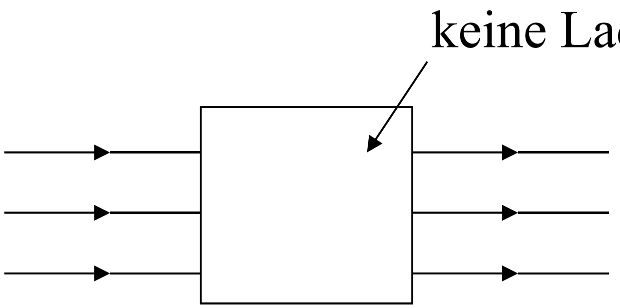
Divergenz

elektrische Feldkonstante

$8.854187817 \times 10^{-12} \quad \frac{\mathrm{A\ s}^4}{\mathrm{kg\ m}^3}$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Divergenz

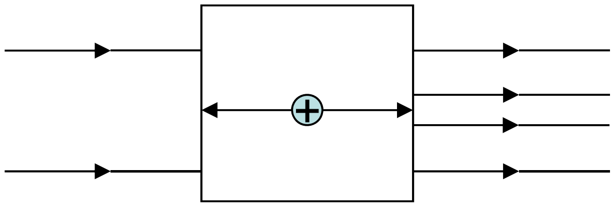


$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{dE_x}{dx} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Divergenz



$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{dE_x}{dx} \neq 0$$

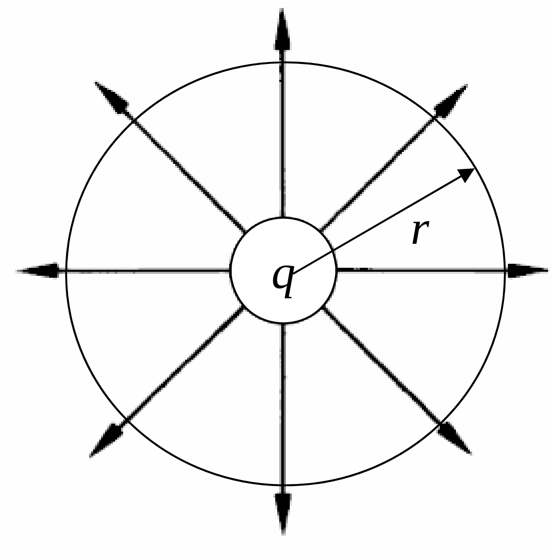
$$\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \neq 0$$

$$\boxed{\iiint_{vol} \nabla \cdot \vec{E}\ dxdydz = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Gaußsches Gesetz

Gaußsches Gesetz

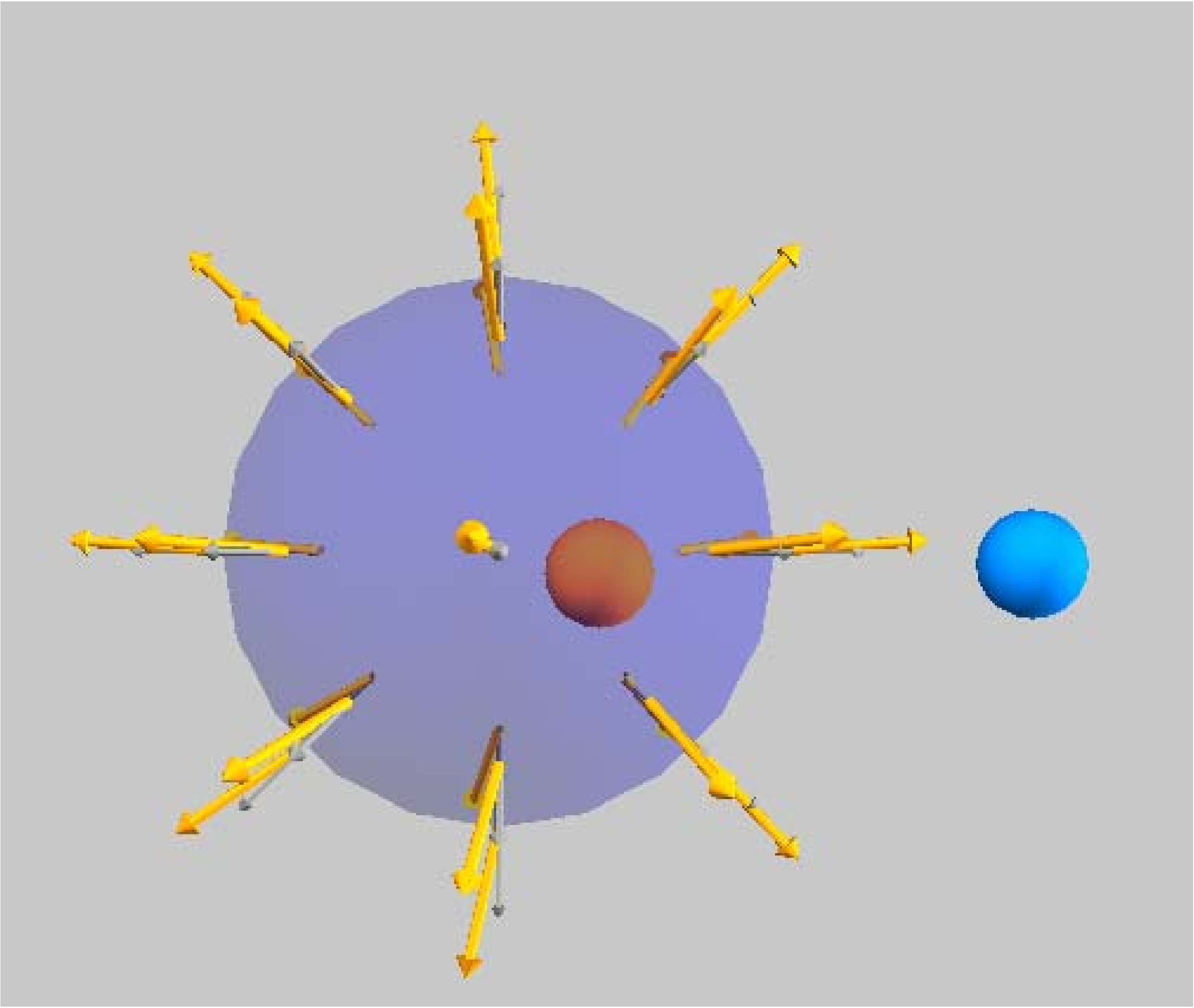
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



Elektrisches Feld × Oberfläche = $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Gaußsches Gesetz



http://public.mitx.mit.edu/gwt-teal/GaussLawFlux.html