5. Punktmechanik

15. Okt. 2018

Punktmechanik

Kraft **Ort**

$$\vec{F} \Longrightarrow \vec{r}$$

Masse

spezielle Bewegungen

Integrieren + Differentialgleichungen

- **Welche Rolle spielt die Masse eines Körpers für seine Bewegung?**
- **Was ist für spezielle Bewegungen charakteristisch?**
  - **Einwirkung konstanter Kraft**
  - **Kreisbewegung**

Aktionsprinzip (2. Axiom)

„Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.“

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Für den häufigen Fall einer konstanten Masse m wird daraus:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Wechselwirkungsgesetz (3. Axiom) ***actio = reactio***

„Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio).“

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

Es gibt keine einzelne, isolierte Kraft !

http://de.wikipedia.org/wiki/Actio_und_Reactio

Masse und Trägheit

- **Trägheit ist der Widerstand eines Körpers gegen eine Änderung seines Bewegungszustandes.**
- **Das Maß für die Trägheit ist die Masse des Körpers, m.**
- **m ist vom Bewegungszustand unabhängig (klassischen Mechanik)**

- **Die Masse ist im SI System eine Grundgröße.**
- **SI Einheit: 1 kg (durch Eichkörper festgelegt)**

Masse und Trägheit

Dynamischer Vergleich von Massen (vgl. Aktionsprinzip)

Zwei Körper verschiedener Masse:

Für gleiche einwirkende Kraft gilt:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Superpositions-prinzip von Kräften

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

Aktionsprinzip (2. Axiom)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

4 Konsequenzen

Konsequenz 1

Ort | Geschwindigkeit | **Beschleunigung** | **Kraft**

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{r} \Longleftrightarrow \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{a} \Longleftrightarrow \vec{F}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Konsequenz 2

im statischen Kräftegleichgewicht:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \stackrel{!}{=} 0$$

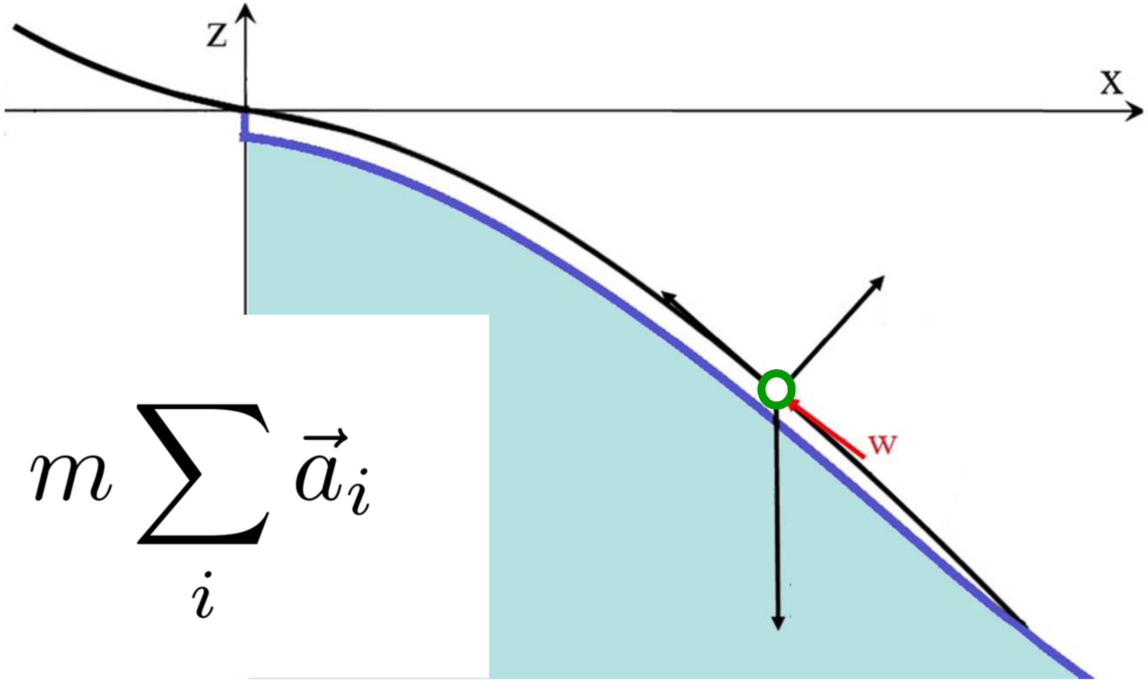
Dann: keine Änderung des Bewegungszustandes (cf., 1. Newtonsche Axiom)

$$m\vec{v} = const.$$

Konsequenz 3

Überlagerung von Bewegungen

***Beispiel*: Bewegung eines Skispringers ist die Überlagerung einer <u>getrennt beschreibbaren</u>**



$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m \sum_i \vec{a}_i$$

senkrechten Bewegung und einer horizontalen Bewegung

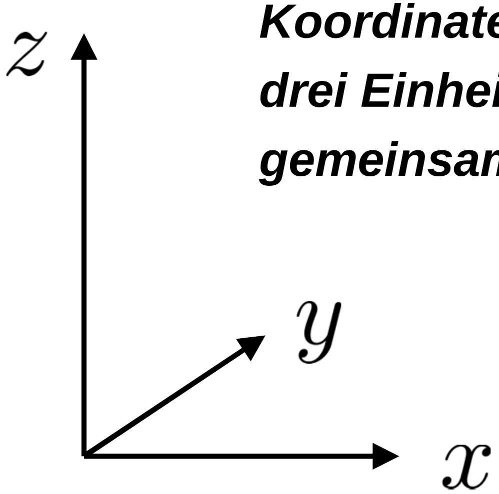
Konsequenz 4

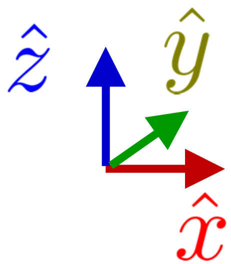
sinnvolle Zerlegung in Vektorkomponenten ?

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m \sum_i \vec{a}_i$$

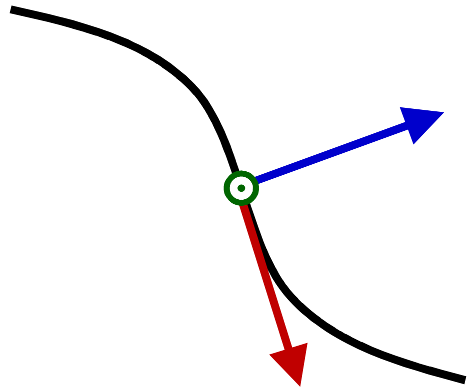
entlang der Einheitsvektoren

Koordinatensystem:
drei Einheitsvektoren +
gemeinsamer Urspung





entlang bzw. normal zur Bewegungsrichtung



Im Fokus

Ort	Geschwindigkeit	Beschleunigung	Kraft
$\vec{r}$	$\vec{v}$	$\vec{a}$	$\vec{F}$

konstante Kraft

$$\vec{v}_0 = v_0 \hat{z} \quad \vec{r}_0 = 0$$

$$\vec{F} = -mg\hat{z} \quad \Rightarrow$$

konstante Kraft

$\vec{v}_0 = v_{z0}\hat{z}$ $\qquad$ $\vec{r}_0 = 0$

$$\vec{F} = -mg\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -g\hat{z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = (-gt + v_{z0})\hat{z}$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t')dt' + \vec{r}_0$$

$$\vec{r}(t) = \left(-\frac{g}{2}t^2 + v_{z0}t\right)\hat{z}$$

Ball ohne Reibung werfen

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} = \text{-9.81}$$

Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 0 $\qquad \Delta t =$ 0.05

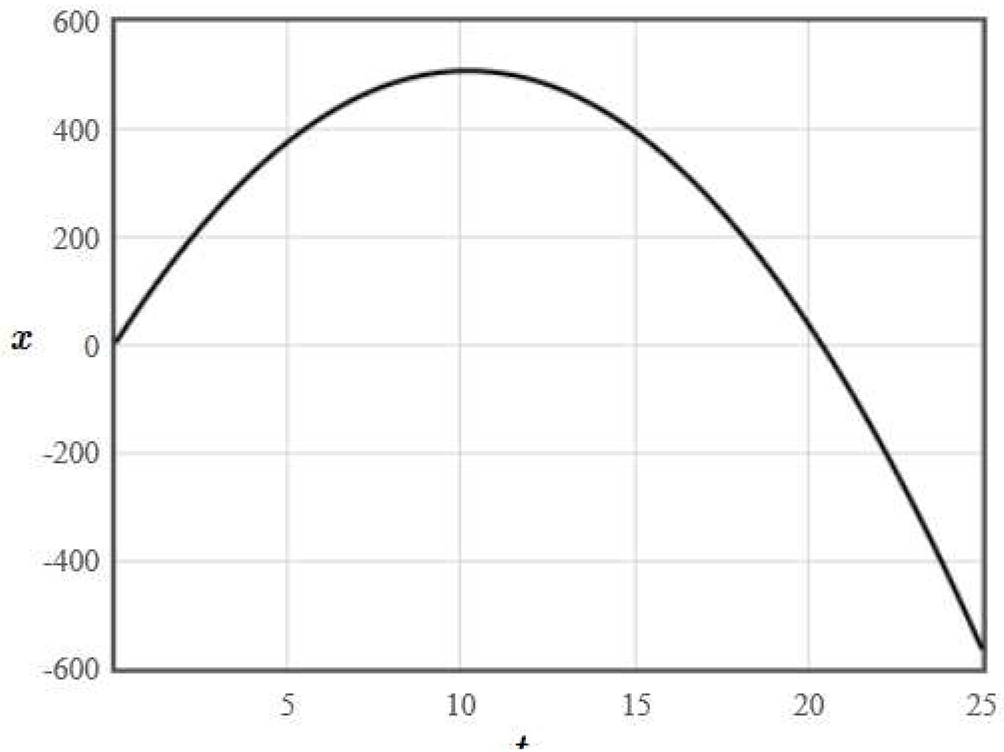
$v_x(t_0) =$ 100 $\qquad N_{steps}$ 500

$t_0 =$ 0 $\qquad$ Graphische Darstellung: x vs. t

Absenden

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$



Ball werfen mit Reibung

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$\frac{dx}{dt} =$ vx

$\frac{dv_x}{dt} =$ -9.81-0.01*vx-0.03*vx*abs(vx)

Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 0 | $\Delta t =$ 0.05

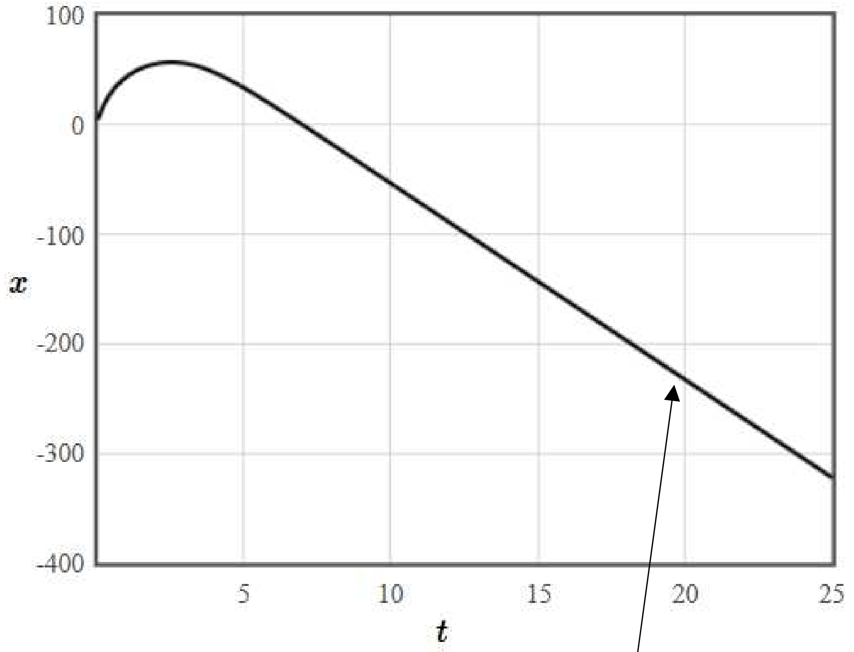
$v_x(t_0) =$ 100 | N_{steps} 500

$t_0 =$ 0 | Graphische Darstellung: x vs. t

Absenden

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - av_x - bv_x\,|v_x|$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g - \frac{a}{m}v_x - \frac{b}{m}v_x\,|v_x|$$



Endgeschwindigkeit

Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{dv_x}{dt} = F_x(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)/m$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \qquad \frac{dv_y}{dt} = F_y(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)/m$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \qquad \frac{dv_z}{dt} = F_z(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)/m$$

Ein Ball wird in den Wind geworfen

$$\vec{F} = -a(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}}) - b(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})|(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})| - mg\hat{z}$$

Numerical 6th order differential equation solver

$\frac{dx}{dt} = v_x$

$\frac{dv_x}{dt} =$
```
(-0.01*(vx-(1))-0.03*(vx-(1))*sqrt((vx-(1))*(vx-(1))+(vy-(7*exp(-x*x)))*(vy-(7*exp(-x*x)))+(vz-(-3*exp(-t*t)))*(vz-(-3*exp(-t*t)))))/0.1
```

$\frac{dy}{dt} = v_y$

$\frac{dv_y}{dt} =$
```
(-0.01*(vy-(7*exp(-x*x)))-0.03*(vy-(7*exp(-x*x)))*sqrt((vx-(1))*(vx-(1))+(vy-(7*exp(-x*x)))*(vy-(7*exp(-x*x)))+(vz-(-3*exp(-t*t)))*(vz-(-3*exp(-t*t)))))/0.1
```

$\frac{dz}{dt} = v_z$

$\frac{dv_z}{dt} =$
```
(-0.01*(vz-(-3*exp(-t*t)))-0.03*(vz-(-3*exp(-t*t)))*sqrt((vx-(1))*(vx-(1))+(vy-(7*exp(-x*x)))*(vy-(7*exp(-x*x)))+(vz-(-3*exp(-t*t)))*(vz-(-3*exp(-t*t)))))/0.1-9.81
```

Initial conditions:

$t_0 =$ 0

$x(t_0) =$ 0

$v_x(t_0) =$ -7

$y(t_0) =$ 0

$v_y(t_0) =$ 5

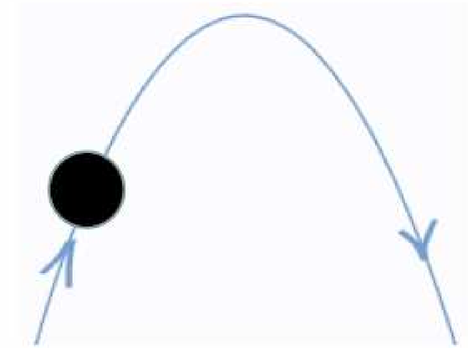
$z(t_0) =$ 0

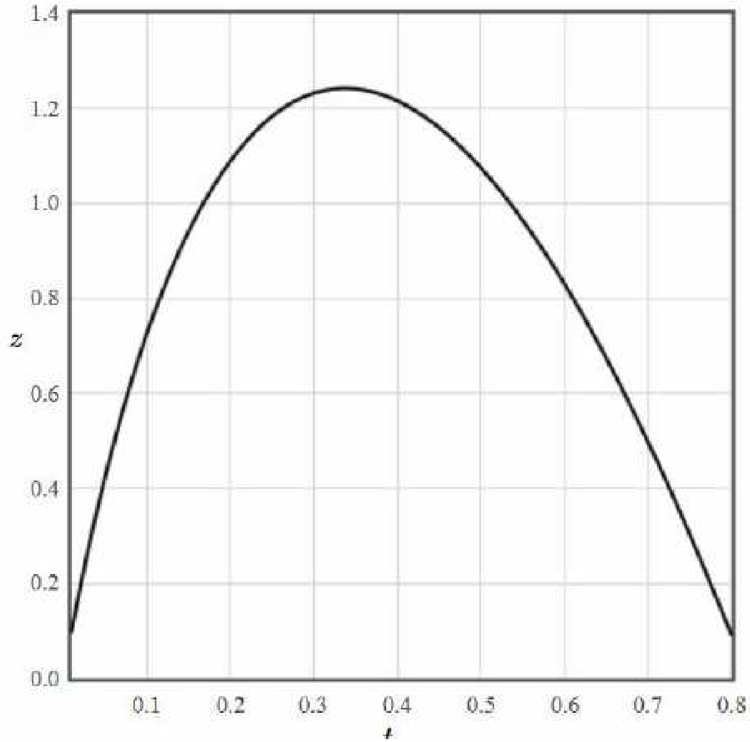
$v_z(t_0) =$ 10

$\Delta t =$ 0.01

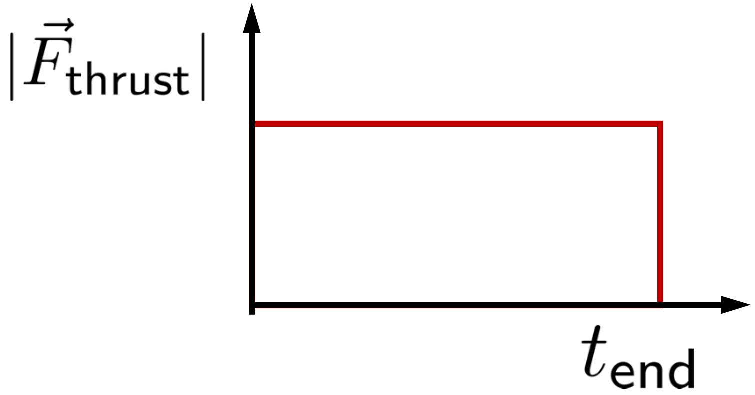
N_{steps} 80

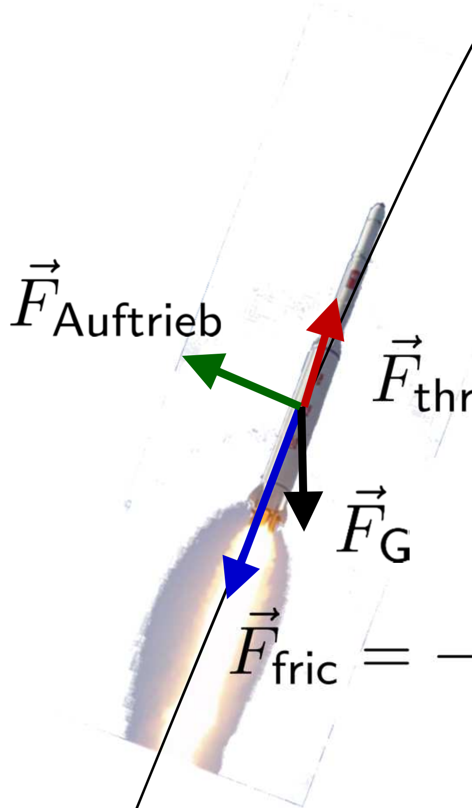
Plot: z vs. t





Rocket launch





$$\vec{F}_{\text{thrust}} = F_{\text{thrust}} H(t_{\text{end}} - t)\hat{f}_{\text{thrust}}$$

$$\vec{F}_{\text{fric}} = -a(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}}) - b(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})|\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}}|$$

$$m = m_0 \left(2 - H(t_{\text{end}} - t)\frac{t}{t_{\text{end}}} - H(t - t_{\text{end}})\right)$$

Rocket launch

$$\vec{F}_{fric} = -a(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}}) - b(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})|(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})|,$$

Numerical 6th order differential equation solver

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} =$$

```
(-0.01*(vx-(0.2*exp(-t*t/50)))-0.03*(vx-
(0.2*exp(-t*t/50)))*sqrt((vx-(0.2*exp(-t*t/50)))*
(vx-(0.2*exp(-t*t/50)))+(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))*
(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))+(vz-(0))*(vz-(0))))/(0.1*
(2-H(3-t)*t/3-H(t-3)))
```

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} =$$

```
(-0.01*(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))-0.03*(vy-
(-0.3*exp(-t*t/50)))*sqrt((vx-(0.2*exp(-t*t/50)))*
(vx-(0.2*exp(-t*t/50)))+(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))*
(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))+(vz-(0))*(vz-(0))))/(0.1*
(2-H(3-t)*t/3-H(t-3)))
```

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_z}{dt} =$$

```
(-0.01*(vz-(0))-0.03*(vz-(0))*sqrt((vx-
(0.2*exp(-t*t/50)))*(vx-(0.2*exp(-t*t/50)))+
(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))*(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))+
(vz-(0))*(vz-(0))))/(0.1*(2-H(3-t)*t/3-H(t-3)))-
9.81+5*H(3-t)/(0.1*(2-H(3-t)*t/3-H(t-3)))
```

Initial conditions:

$t_0 =$ 0

$x(t_0) =$ 0

$v_x(t_0) =$ 0

$y(t_0) =$ 0

$v_y(t_0) =$ 0

$z(t_0) =$ 0

$v_z(t_0) =$ 0

$\Delta t =$ 0.02

N_{steps} 500

Plot: z vs. t

submit

Fähigkeiten

Differenzialgleichungen

Viele Systeme die sich mit der Zeit verändern, lassen sich als Differenzialgleichungen darstellen. Dies beinhaltet Aktienkurse, Tierpopulationen, Maschinenvibrationen und die Bewegungen eines Teilchens. Dieser Kurs wird sich darauf beschränken die Bewegung von Teilchen in 1, 2 und 3 Dimensionen zu behandeln. Die Kraft eines solchen Teilchens, welches in einer Dimension bewegt ist, lässt sich durch seinen Ort x, seine Geschwindigkeit v_x, und die Zeit t beschreiben. Ist die Kraft eines Teilchens bekannt, lässt sich das Gesetz von Newton als Differenzialgleichung schreiben:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(v_x, x, t).$$

Mit F der Kraft und m der Masse. Dies lässt sich ebenfalls als zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung darstellen,

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \text{und} \quad \frac{dv_x}{dt} = F(x, v_x, t)/m.$$

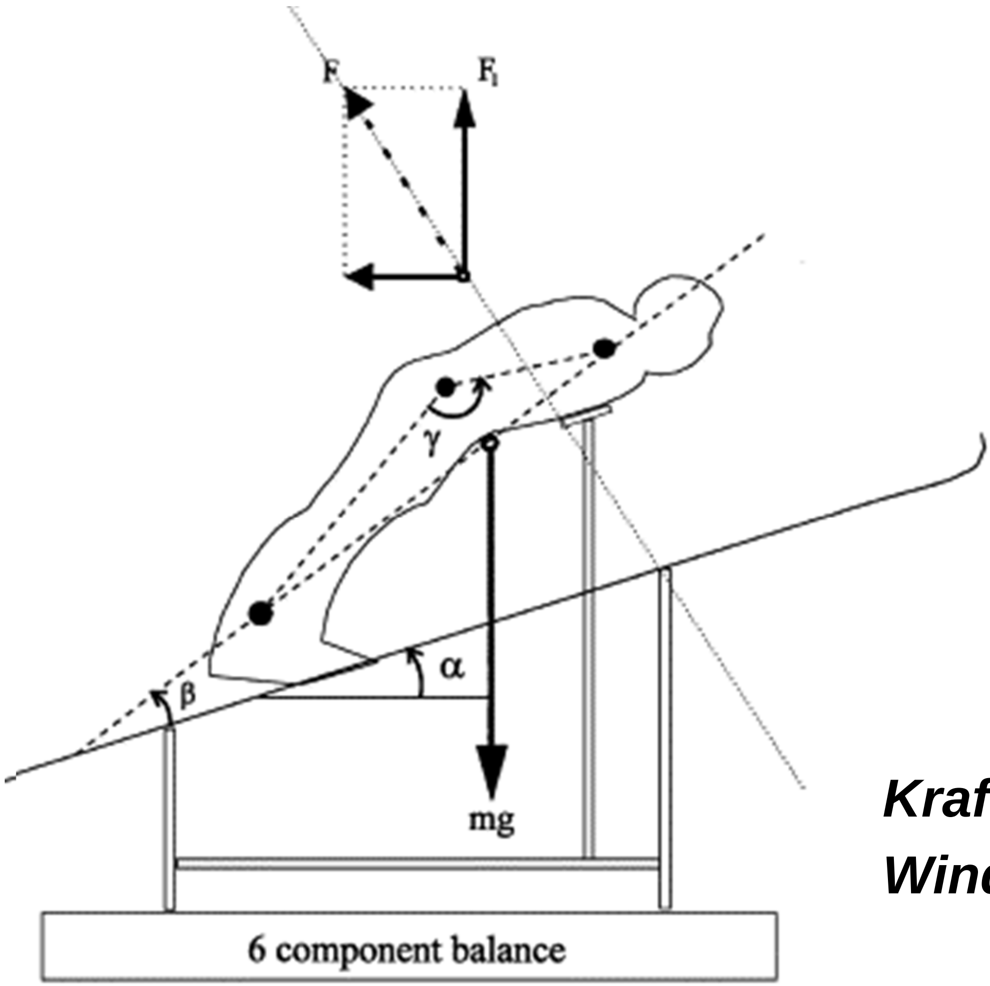
Arbeiten mit Daten

Manchmal erhält man Daten in Form von Textspalten. Sie sollten in der Lage sein:

- Erwartungswert und Standardabweichung jeder Spalte zu berechnen;
- alle Werte einer Spalte mit einem Wert zu multiplizieren (z.B. könnte eine Spalte die Beschleunigung eines Teilchens zu verschiedenen Zeiten repräsentieren. Multipliziert mit der Masse liefert das die jeweilige Kraft);
- die Daten einer Spalte zu plotten;
- die Daten einer Spalte numerisch zu integrieren;
- die Daten einer Spalte numerisch zu differenzieren;
- die Daten von einem Format, welches '.' als Dezimaltrennzeichen nutzt in ein Format, welches ',' als Dezimaltrennzeichen nutzt umzuwandeln.

Apps: Erwartungswert und Standardabweichung, Numerische Integration und Differentiation von Funktionen in Abhängigkeit von t, Numerische Integration und Differentiation von Funktionen in Abhängigkeit von x, Dezimal Punkt $\leftrightarrow$ Beistrich.

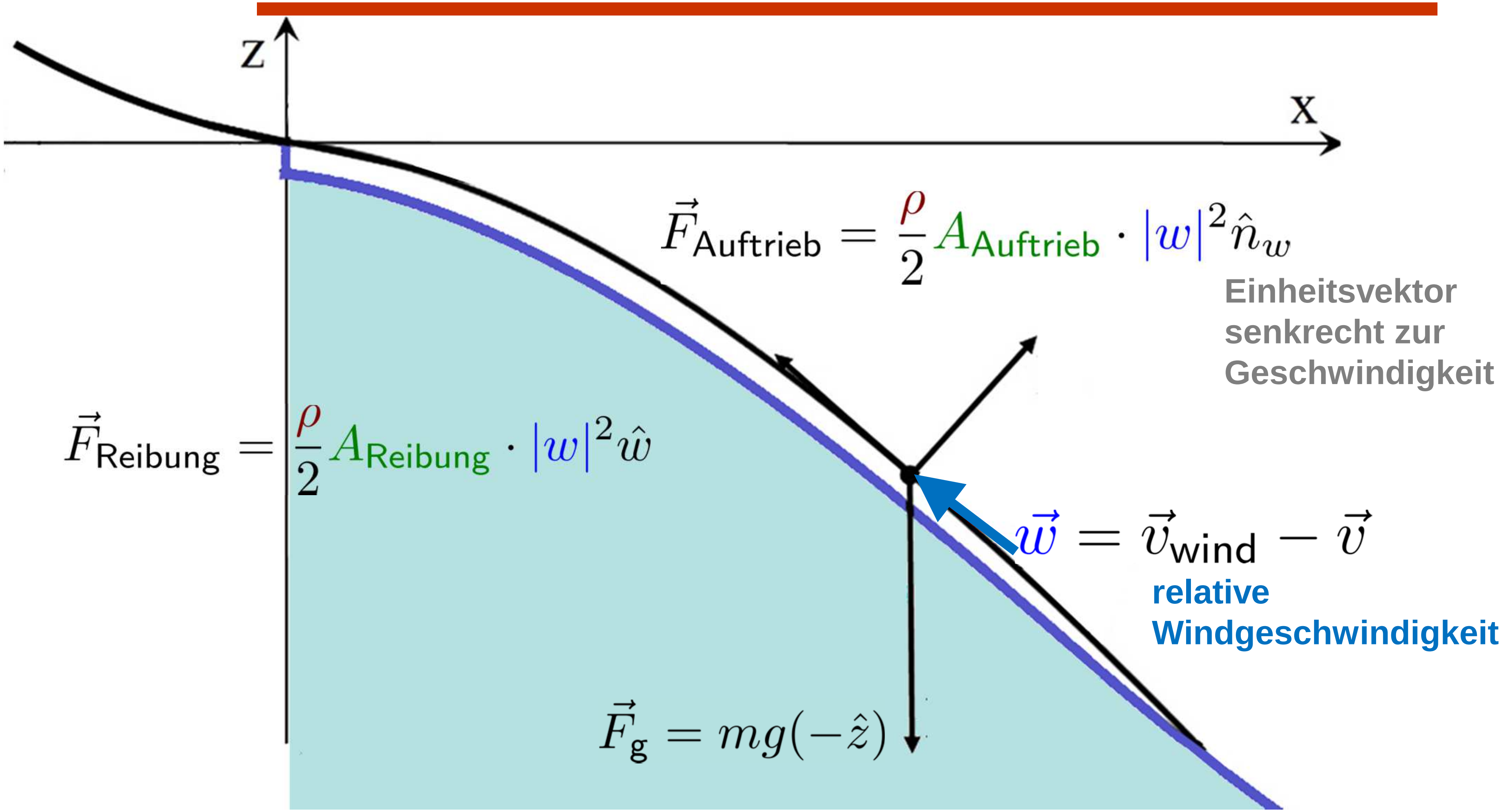
Skispringer



Kraftmessung im Windkanal

B.Schmölzer, W.Müller, J. Biomechanics 35 (2002) 1059-1069

Skispringer: Rein numerisch *F*(*t*) integrieren

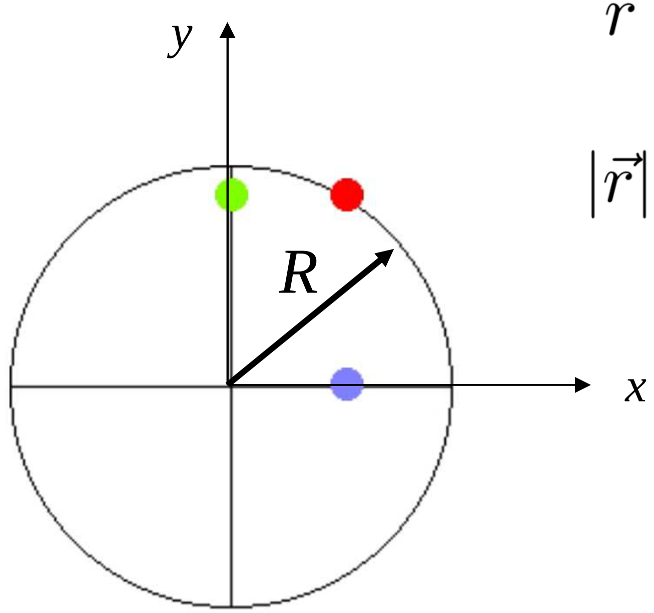


A .. auftrieb-bzw. reibungswirksame Fläche

ρ **.. Luftdichte**

A.Jung et al., J.Biomechanics, 47 (2014) 716-722

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\hat{x} + R\sin(\omega t)\hat{y}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{R^2\cos^2(\omega t) + R^2\sin^2(\omega t)} = R$$

$$\omega = 2\pi f$$

Frequenz [1/s] = [Hz]

Winkelgeschwindigkeit [rad/s]