8

Arbeit & Energie

Oktober 28, 2018

Arbeit + Energie

- Wie können wir das Integral der Arbeit berechnen?
- Wie definiert man „Leistung“?
- Was versteht man unter Energie?
- Was versteht man unter potentieller Energie und wie kann man diese ändern?

Arbeit

$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$\boxed{W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz}$$

Benötigte Arbeit um ein Elektron zu bewegen

Welche Arbeit wird benötigt, um ein Elektron von der Position

$$\vec{r}_1 = 2\hat{x} + 4\hat{y} + 6\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

zur Position

$$\vec{r}_2 = -4\hat{x} + 8\hat{y} + 3\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

in einem elektrischen Feld

$$\vec{E} = -6x\hat{x} - 9\hat{y} - 9z^2\hat{z} \quad [\mathrm{V/m}] \text{ zu bewegen?}$$

Die Kraft auf das Elektron lautet $-e\vec{E}$, wobei $-e = -1.6022 \times 10^{-19}$ C die Ladung des Elektrons ist.

$W =$ [J] Lösung

Im Allgemeinen ist die Arbeit das Integral des inneren Produktes (Skalarproduktes) aus der Kraft und der zurückgelegten Entfernung:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{2}^{-4} 6ex dx - \int_{4}^{8} 9e dy - \int_{6}^{3} 9ez^2 dz.$$

$$W = -\left.\frac{6ex^2}{2}\right|_2^{-4} - 9ey|_4^8 - \left.\frac{9ez^3}{3}\right|_6^3.$$

$$W = 7.93 \times 10^{-17} \text{ [J]}.$$

Die Arbeit ist positiv, wenn sich das Elektron gegen die elektrostatische Kraft bewegt. Die Arbeit ist negativ, wenn es sich in die Richtung der elektrostatischen Kraft bewegt. Überprüfen Sie die Vorzeichen Ihrer Antwort.

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (2)$$

$\vec{F}(t),\ \vec{r}(t)$ ist bekannt

$$W = \int F_x(t) v_x(t) dt + \int F_y(t) v_y(t) dt + \int F_z(t) v_z(t) dt$$

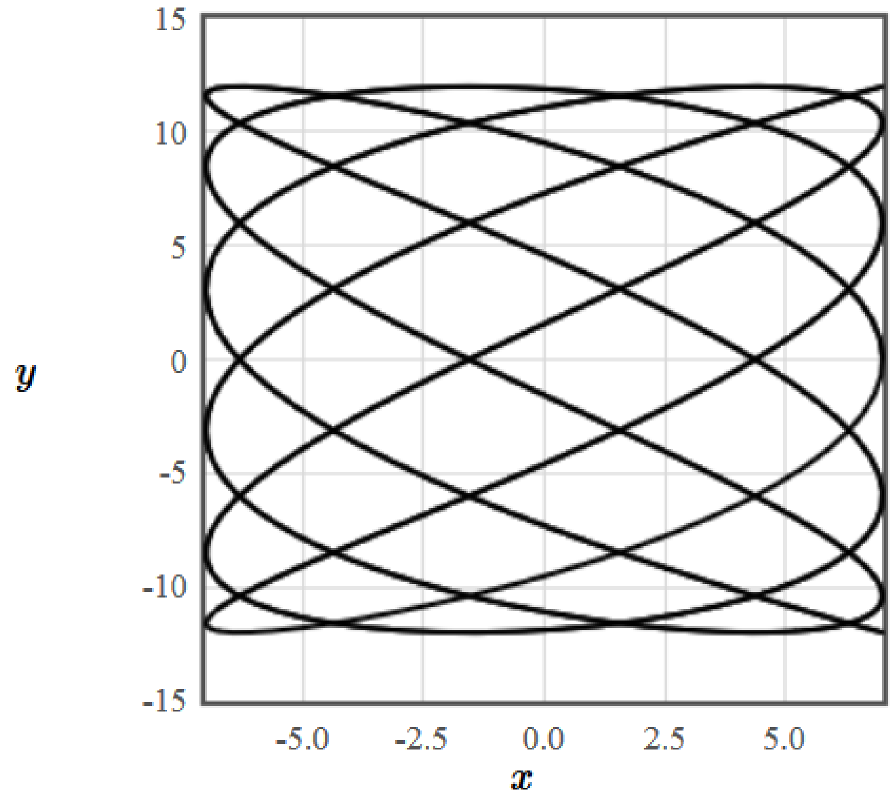
z.B.

- **Arbeit gegen eine Reibungskraft**
- **Arbeit gegen die Trägheitskraft**

Arbeit gegen eine Reibungskraft(2)

Der Ortsvektor eines Teilchens ist gegeben durch:

$$\vec{r}(t) = 7\cos(12t)\hat{x} + 12\sin(7t)\hat{y} \quad [\mathrm{m}]$$



Mit t der Zeit in Sekunden. Das Teilchen bewegt sich durch eine viskose Flüssigkeit entgegen einer Reibungskraft $\vec{F} = -|\vec{v}|\vec{v}$. Wie groß ist die benötigte Arbeit um das Teilchen zwischen der Zeit $t = 0$ Sekunden und $t = 6$ Sekunden zu bewegen?

$W =$ [J] Lösung

$$\vec{r}(t) = 7\cos(12t)\hat{x} + 12\sin(7t)\hat{y}$$

$$7 \cdot 12 = 84$$

$$\vec{v}(t) =$$

$$\vec{F} = \left|\vec{v}(t)\right|\vec{v}(t) =$$

Die Arbeit ist,

$$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int F_x dx+\int F_y dy.$$

Das Teilchen muss in die der Reibungskraft entgegengesetzten Richtung bewegt werden,

$$W=\int v_x\sqrt{v_x^2+v_y^2}dx+\int v_y\sqrt{v_x^2+v_y^2}dy.$$

Das Integral wird in ein Integral über die Zeit umgewandelt, $dx=\frac{dx}{dt}dt=v_x dt$ and $dy=\frac{dy}{dt}dt=v_y dt$,

$$W=\int_0^6 v_x^2\sqrt{v_x^2+v_y^2}dt+\int_0^6 v_y^2\sqrt{v_x^2+v_y^2}dt.$$

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Ortes,

$$v_x=-84\sin(12t)\qquad v_y=84\cos(7t).$$

$$W=(84)^3\int_0^6\left(\sin^2(12t)\sqrt{\sin^2(12t)+\cos^2(7t)}+\cos^2(7t)\sqrt{\sin^2(12t)+\cos^2(7t)}\right)dt.$$

Dieses Integral kann numerisch ausgewertet werden,

$$W=3934871\text{ [J]}$$

TU Graz

511.015 Physik M

en

- Lehrplan
- Bücher
- Formel Sammlung
- Fähigkeiten
- Apps
- Testfragen
- Vorlesungen

Numerische Integration und Differentiation

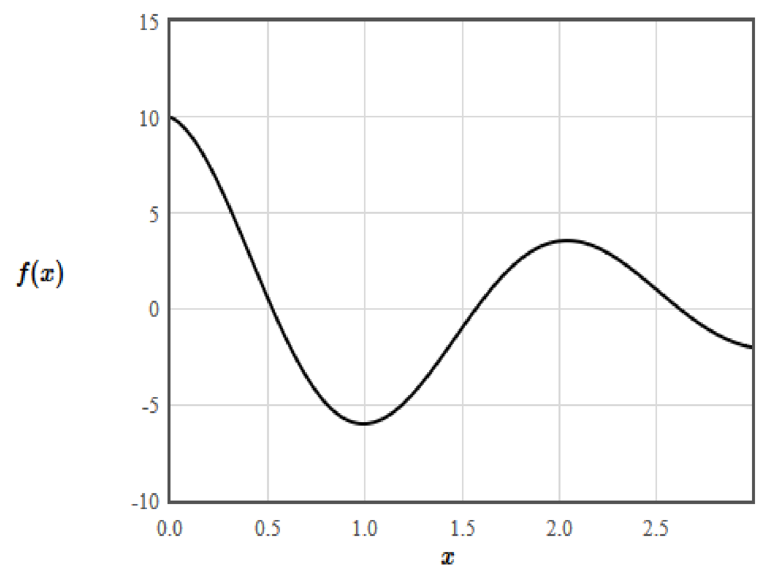
Diese Seite enthält einige Funktionen zur numerischen Integration und Differentiation. Ein Funktion $f(x)$ kann spezifiziert werden durch (i) Eingabe eines Ausdrucks in das obige Feld oder durch (ii) Einfügen zweier Datenspalten in die Textbox oben links.
Bei Click auf den "Fill table" Button wird der eingegebene Ausdruck benutzt, um die Tabelle mit 300 Werten $f(x)$ für äquidistante Argumente zwischen x_1 and x_2 zu befüllen.
Bei Click auf den "calculate from table" Button werden die Daten in einem Graph dargestellt (rechts).
Unter den Werten und dem Graphen von $f(x)$ werden die Werte der ersten, $\frac{df}{dx}$, und der zweiten Ableitung $\frac{d^2f}{dx^2}$ tabulliert und graphisch dargestellt. Unterhalb der Ableitungen wird das Integral von $f(x)$ sowie das Integral letzteren Integrals gezeigt. Die Routine zur Integration geht davon aus, daß die Meßdaten im Intervall Δx äquidistant sind.

$f(x) =$ 3*sin(pi*x) ?

Fill table from $x_1 =$ 0 to $x_2 =$ 1.

x	$f(x)$
0	10
0.01	9.945647572
0.02	9.882682786
0.03	9.811249286
0.04	9.731497077
0.05	9.64358233
0.06	9.547667174
0.07	9.443919485
0.08	9.332512681
0.09	9.2136255
0.1	9.087441788

calculate from table   Punkt ↔ Komma

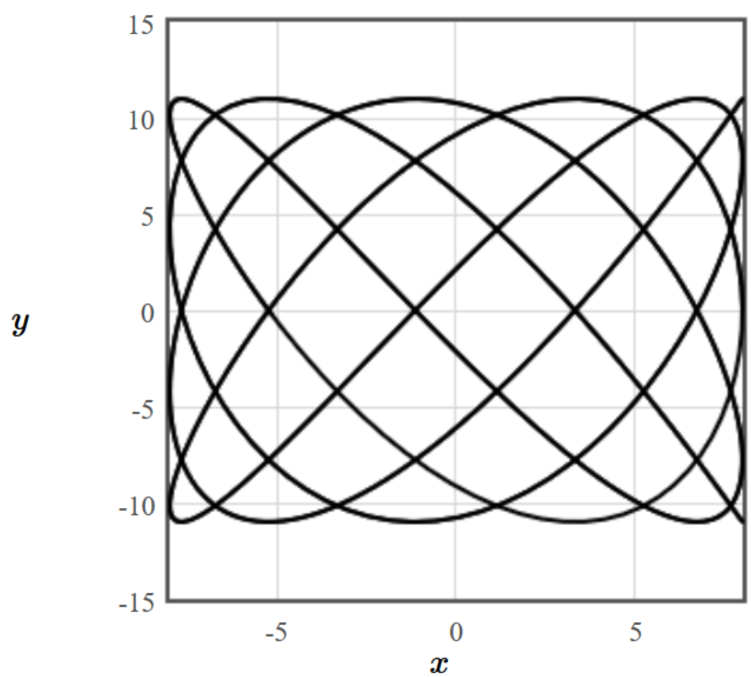


Kurvenintegral

Zurückgelegter Weg

Ein Käfer krabbelt entlang einer Lissajous-Kurve. Der Ortsvektor in Abhängigkeit der Zeit ist gegeben durch:

$$\vec{r}(t) = 8\cos(8t)\hat{x} + 11\sin(11t)\hat{y} \quad [\mathrm{m}]$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -64\sin(8t)\hat{x} + 121\cos(11t)\hat{y}.$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-64\sin(8t))^2 + (121\cos(11t))^2}$$

$$d = \int_0^6 |\vec{v}|dt.$$

mit t der Zeit in Sekunden. Berechnen Sie die Entfernung die der Käfer zwischen $t = 0$ und $t = 6$ s zurückgelegt hat.

$d =$ ______ [m] Lösung

Arbeit der Trägheitskraft

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$W_{12} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$$

Arbeit der Trägheitskraft

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

$$\boxed{W_{12} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}}$$

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dW = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1(\vec{r}_1)}^{t_2(\vec{r}_2)} m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

$$= \int_{v_1(\vec{r}_1)}^{v_2(\vec{r}_2)} m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Arbeit der Trägheitskraft

$$W_{12} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$$

Beschleunigung parallel zur Geschwindigkeit

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dW = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1(\vec{r}_1)}^{t_2(\vec{r}_2)} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

$$= \int_{v_1(\vec{r}_1)}^{v_2(\vec{r}_2)} m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

gleichförmige Kreisbewegung:

$$d\vec{v} \perp \vec{v}$$

$$W_{12} = 0$$

Leistung

Maß dafür, in welcher Zeitspanne Arbeit verrichtet wird.

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

bzw:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

SI-Einheit: 1 kg m^2 s^{-3} = 1 Js^{-1} = 1 W (Watt)

Energie

Durch Zufuhr oder Abgabe von Arbeit ändert sich die Energie eines Körpers (die Gesamtenergie eines Systems).

SI-Einheit und Dimension wie Arbeit

$$\boxed{\Delta E = E_{nachher} - E_{vorher} = \Delta W}$$

Energie

Man kann zwischen Energiearten unterscheiden:

- potentielle Energie
- kinetische Energie
- Wärme
- ….

kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{m|\vec{v}|^2}{2}$$

$$\Delta E_{kin} = \frac{m(|\vec{v}_{\mathsf{nachher}}|^2 - |\vec{v}_{\mathsf{vorher}}|^2)}{2}$$

Potentielle Energie

Konservative Kraft

Konservative Kraft: Arbeit entlang eines beliebigen Weges ist nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig.

$$\oint_C \vec{F}_{konservative} \cdot d\vec{r} = 0$$

konservative Kräfte: Schwerkraft, Coulombkraft, elastische Kraft

nicht konservative Kräfte: Reibungskräfte, dissipative Kräfte

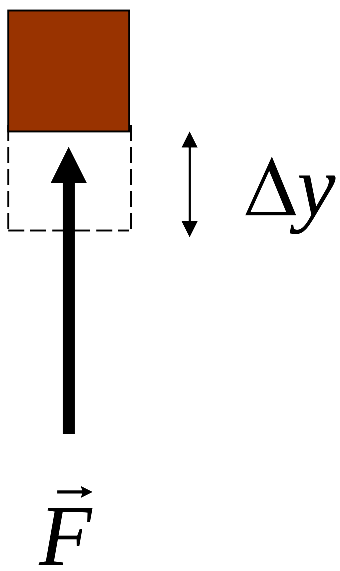
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \geq 0$$

konservative Kraft $\rightarrow$ Potentielle energie

$$\Delta E_{pot}(x, y, z) = -W$$

Potentielle Energie der Gewichtskraft

Arbeit :

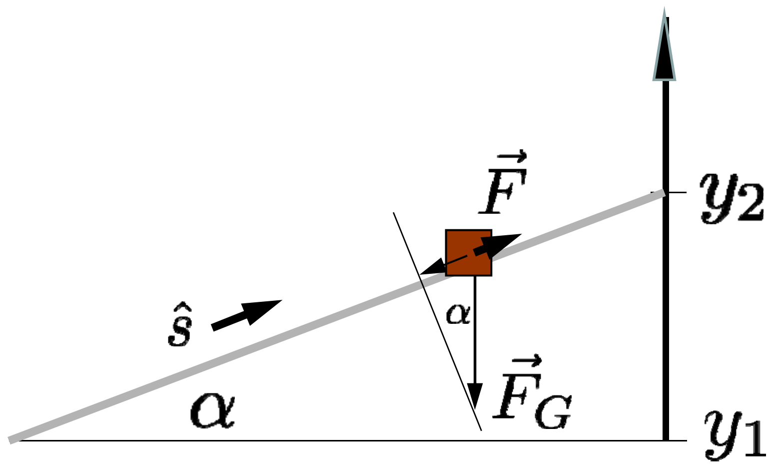


$$\vec{F}_G = -mg\hat{y}$$

$$\Delta E_{pot} = -W$$

Potentielle Energie: $\Delta E_{pot}(x, y, z) = mg\Delta y$

Hubarbeit gegen Gewichtskraft auf schiefer Ebene



$$\vec{F}_G = -mg\hat{y}$$

Notwendige Kraftkomponente um Körper entgegen der Gewichtskraft anzuheben:

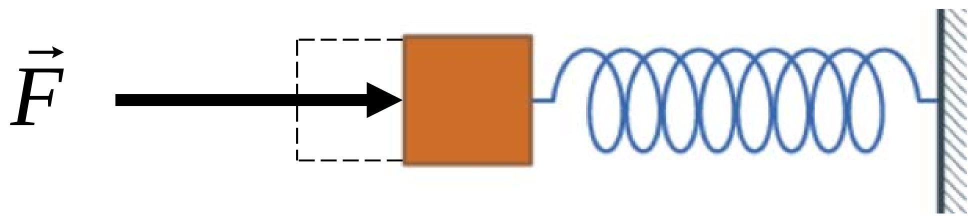
$$\vec{F}_s = |\vec{F}_G| \sin(\alpha)\hat{s}$$

$$\vec{s} = \frac{y_2 - y_1}{\sin\alpha}\hat{s} = \frac{\Delta y}{\sin\alpha}\hat{s}$$

$$W_{12} = \vec{F}_s\vec{s} = (|\vec{F}_G| \sin\alpha\hat{s})(\frac{\Delta y}{\sin\alpha}\ \hat{s})$$

$$= (mg\Delta y\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha})(\hat{s}\cdot\hat{s}) = mg\Delta y$$

Feder



Hookesches Gesetz: $F(x) = -kx$

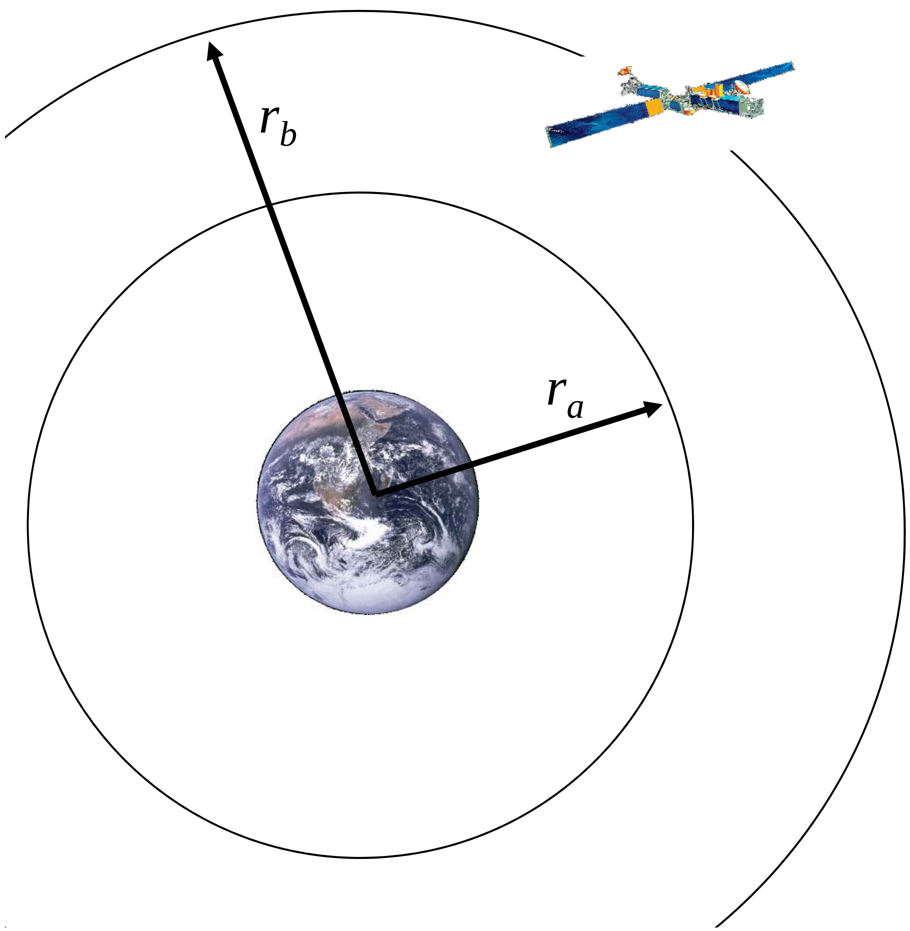
$$W = -\int_0^{x_e} kx\,dx = -\tfrac{1}{2}kx_e^2 \quad [\mathrm{J}]$$

Potentielle Energie: $$\Delta E_{pot} = \frac{kx^2}{2}$$

Gravitation

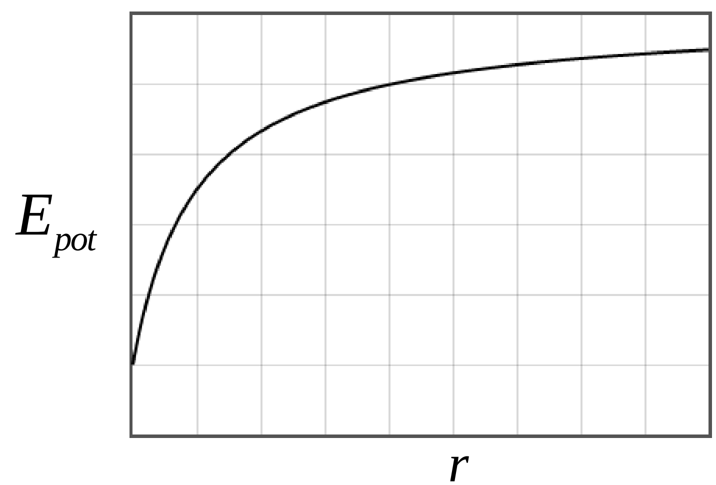
$$\Delta E_{pot}\left(\vec{r}\right) = -W$$

$$-W = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{-Gm_1m_2}{r^2}dr = \frac{-Gm_1m_2}{r_b} - \frac{-Gm_1m_2}{r_a}$$



üblicherweise $E_{pot}\left(r_a = \infty\right) = 0$

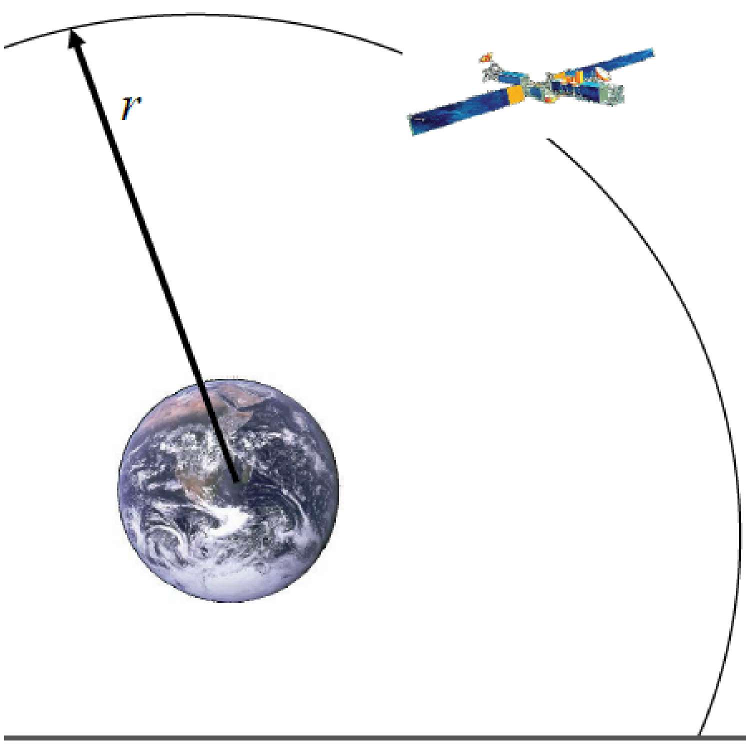
$$E_{pot}\left(\vec{r}\right) = \frac{-Gm_1m_2}{\left|\vec{r}\right|}$$



Satellitenbahnen

$$\vec{F} = \frac{-Gm_{erde}m_{sat}}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{-Gm_{erde}m_{sat}x}{m_{sat}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$



Numerical 6th order differential equation solver

$\frac{dx}{dt} = v_x$

$\frac{dv_x}{dt} =$ -x*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

$\frac{dy}{dt} = v_y$

$\frac{dv_y}{dt} =$ -y*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

$\frac{dz}{dt} = v_z$

$\frac{dv_z}{dt} =$ -z*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

Initial conditions:

$t_0 =$	0	$\Delta t =$	60
$x(t_0) =$	0	N_{steps}	1500
$v_x(t_0) =$	7900	Plot:	y vs. x
$y(t_0) =$	6371000		
$v_y(t_0) =$	0		
$z(t_0) =$	0		
$v_z(t_0) =$	0		

konservative Kraft → Potentielle Energie

$$E_{pot}(x, y, z) = -W$$

	Kraft	Potentielle energie
Schwerkraft	$\vec{F} = -mg\ \hat{y}$	$E_{pot}(x, y, z) = mgy$
Feder	$\vec{F} = -kx\ \hat{x}$	$E_{pot}(x, y, z) = \frac{kx^2}{2}$
Gravitation	$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\ \hat{r}$	$E_{pot}(x, y, z) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
Coulomb	$\vec{F} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$	$E_{pot}(x, y, z) = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Energieerhaltungssatz

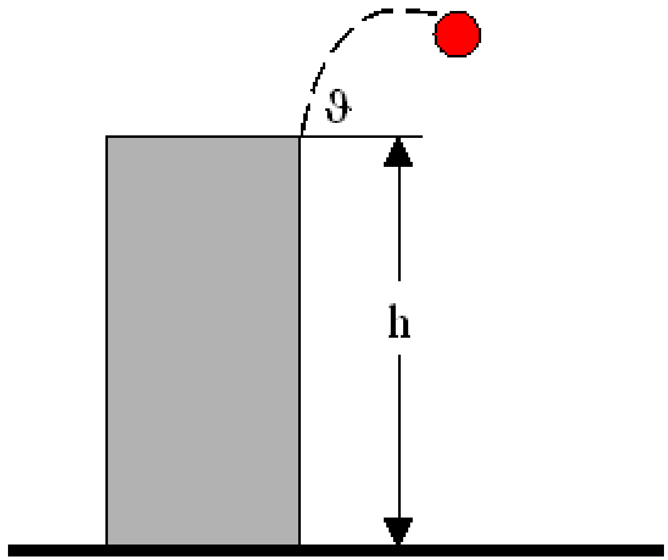
$$\Delta E = 0$$

$$E_{kin,nachher} - E_{kin,vorher} + W = 0$$

konservative Kräfte:

$$E_{pot,nachher} - E_{pot,vorher} + E_{kin,nachher} - E_{kin,vorher} = 0$$

Energieerhaltungssatz



$$|\vec{v}(y=0)|?$$