3. Punktmechanik

8. Okt. 2018

Bewegung als Folge von Krafteinwirkung

- Welche grundlegenden Arten von Kräften betrachten wir?
- Inwiefern sind die Kräfte abstands- oder positionsabhängig?
- **Wo greifen Kräfte an Körpern an?**
- Was bewirkt die Überlagerung von Kräften?

Bewegungsbeschreibung

Punktmechanik

Vereinbarung

Wir lassen die Kräfte am Schwerpunkt angreifen.

Der Schwerpunkt eines beliebigen Körpers bewegt sich so, als sei

- **die Gesamtmasse *m* des Körpers im Schwerpunkt vereinigt und**
- **als griffen die äusseren Kräfte im Schwerpunkt an**

Punktmechanik

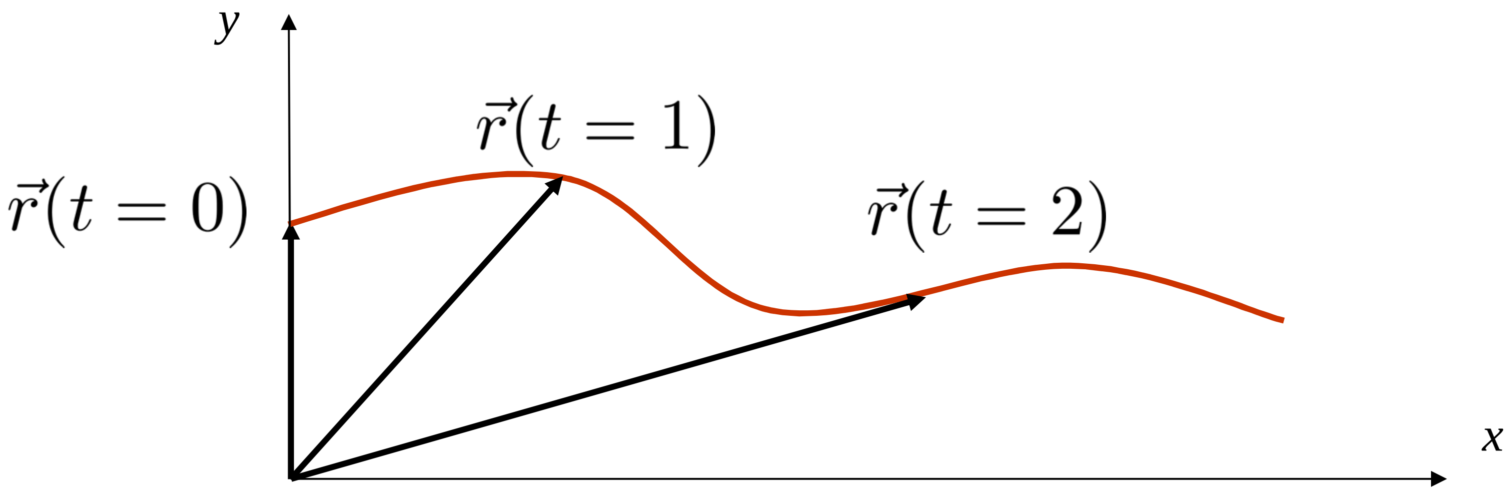
Ort	Geschwindigkeit	Beschleunigung	Kraft

$$\vec{r} \Longleftrightarrow \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{a} \Longleftrightarrow \vec{F}$$

Bewegungsbeschreibung

Newtonsche Axiome

Ortsvektor $\vec{r}$

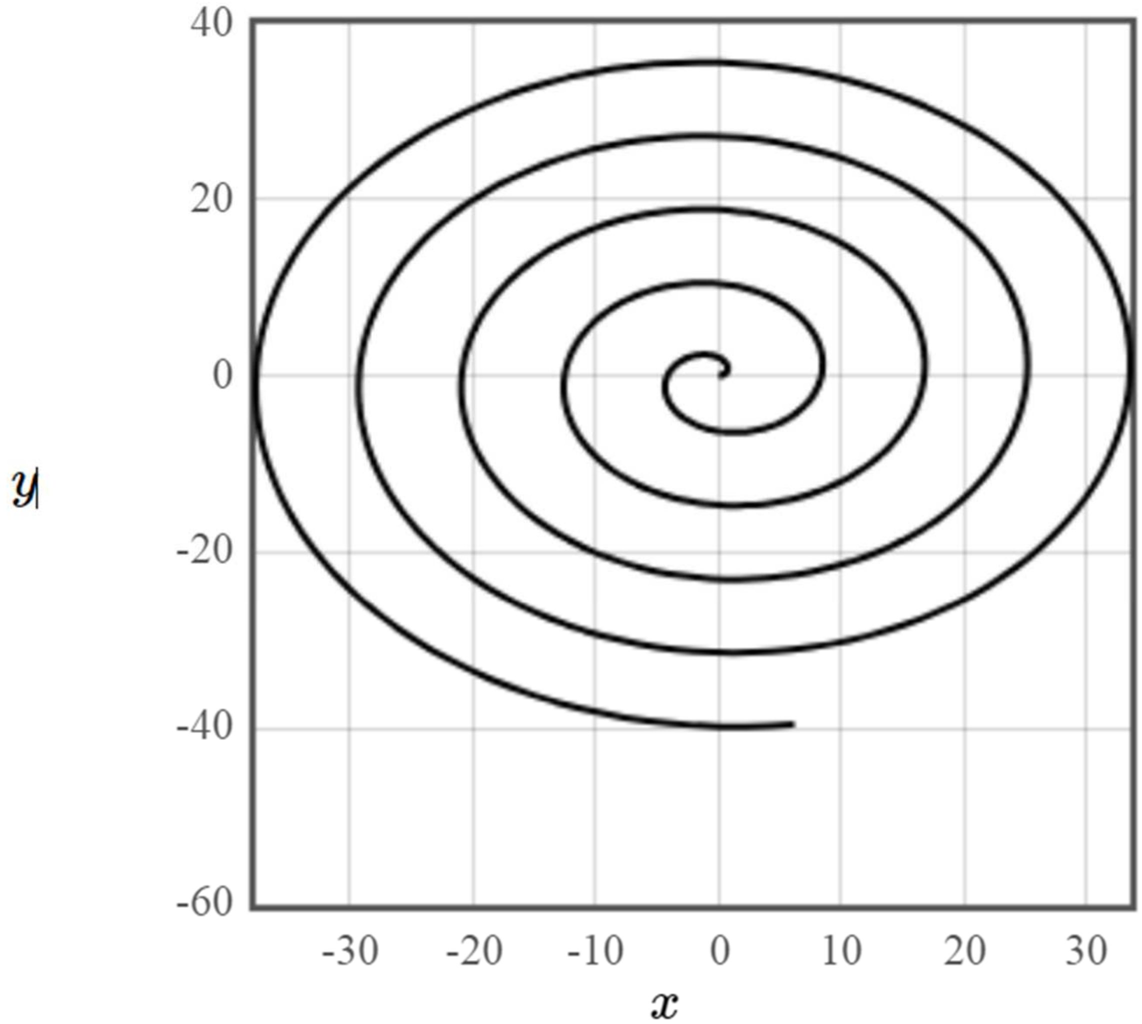


$$\vec{r}(t) = r_x(t)\hat{x} + r_y(t)\hat{y} + r_z(t)\hat{z} \qquad [m]$$

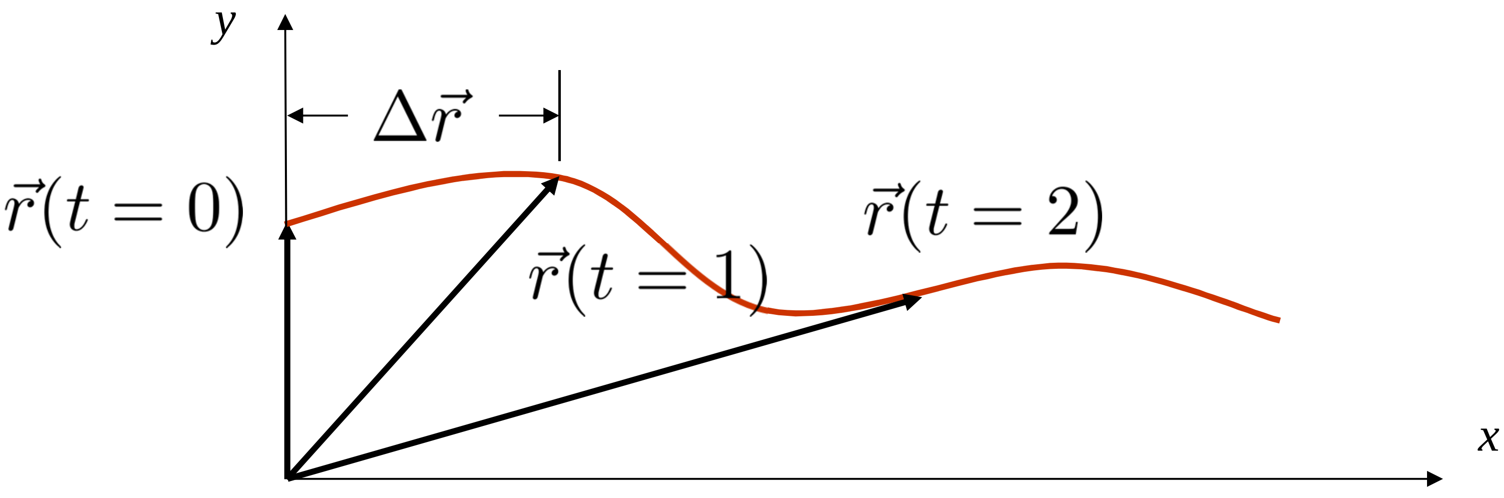
Position des Körpers: per Vereinbarung die Position des Schwerpunkts

Ein Käfer krabbelt spiralförmig entlang des Ortsvektors $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = 4t\cos(3t)\hat{x} + 4t\sin(3t)\hat{y} \quad [\mathrm{m}]$$

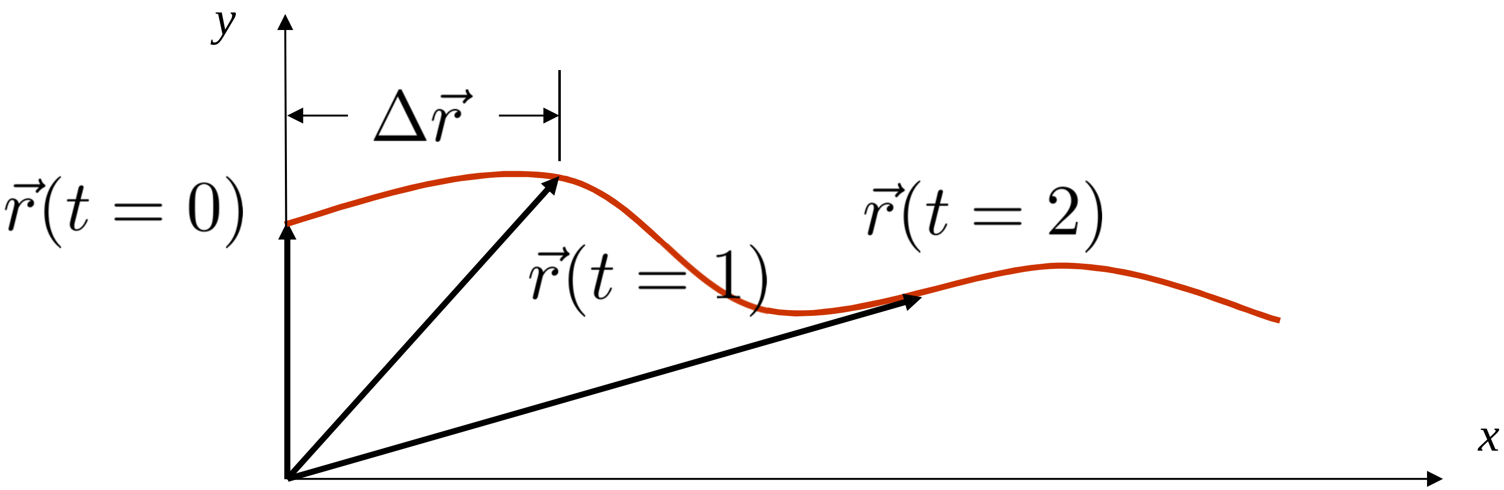


Geschwindigkeit $\vec{v}$



$$\vec{v} \approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \Delta r_x/\Delta t \\ \Delta r_y/\Delta t \\ \Delta r_z/\Delta t \end{pmatrix} \qquad [m/s]$$

Geschwindigkeit $\vec{v}$



$$\vec{v} \approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad [m/s]$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad [m/s]$$

Ableitung (Schreibweise)

Leibniz: $\frac{df}{dx}$ $\frac{dg}{dt}$ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dx}{dt}$ $\frac{dy}{dt}$ $\frac{dz}{dt}$

Lagrange: f' g'

Euler: $D_x f$ $D_t y$

Newton: $\dot{x}$ $\dot{y}$ **ausschliesslich bezüglich der Zeit**

Ableitung (Schreibweise)

Beispiel:

$$f(x) = x^2 \qquad \frac{df}{dx} = 2x$$

$$v(x, a) = ax^3$$

$$\frac{dv}{da} =$$

Ableitung (Schreibweise)

Vektoren: **komponentenweise ableiten**

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} \qquad \frac{d\vec{\phi}}{dp} = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_x}{dp} \\ \frac{d\phi_y}{dp} \\ \frac{d\phi_z}{dp} \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit $\vec{v}$

Ableitung des Ortes bezüglich jeder Komponente:

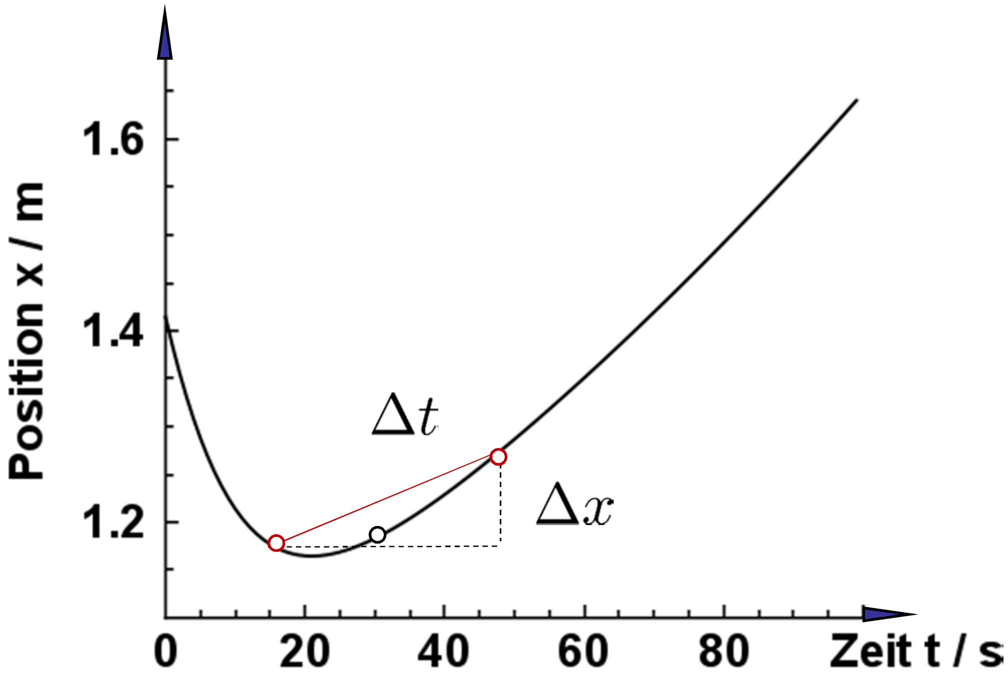
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dr_x}{dt} \\ \frac{dr_y}{dt} \\ \frac{dr_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{pmatrix}$$

Leibniz *für Zeitableitung: Newton*

Geschwindigkeit =
Steigung in einem Ort-Zeit Diagramm

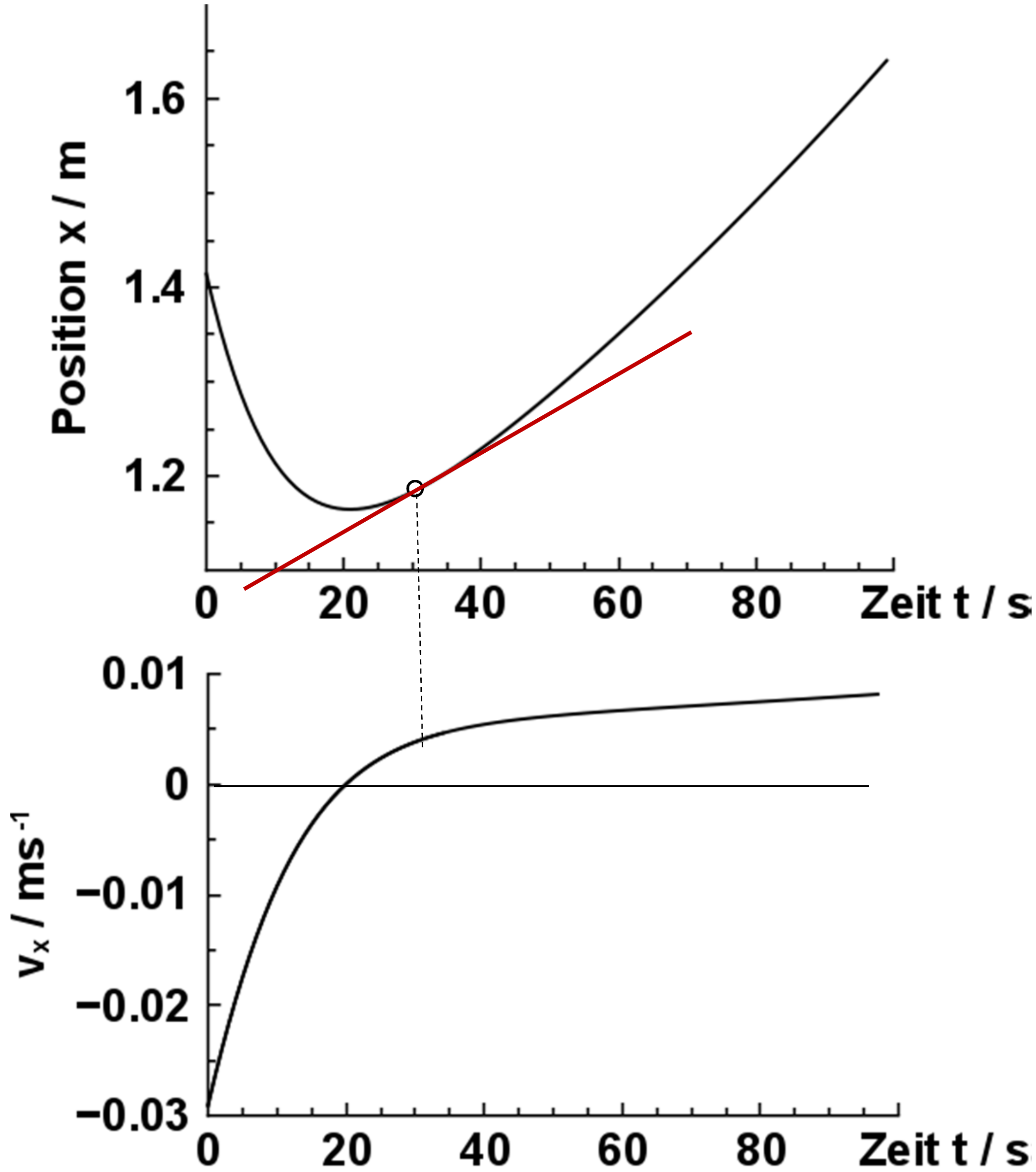
$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



Geschwindigkeit =
Steigung in einem Ort-Zeit Diagramm

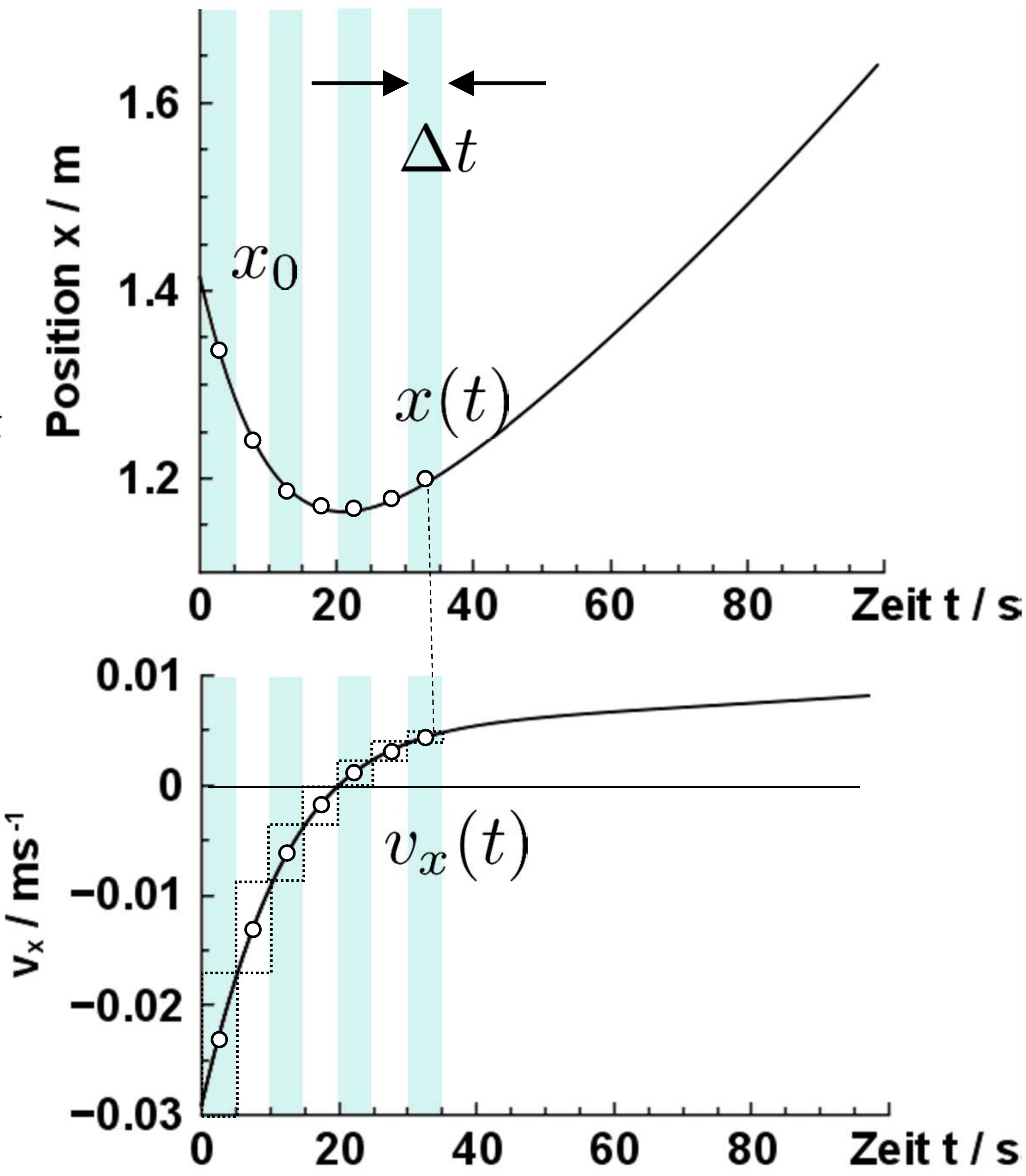
$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$v_x(t)$ an $t = 32s$



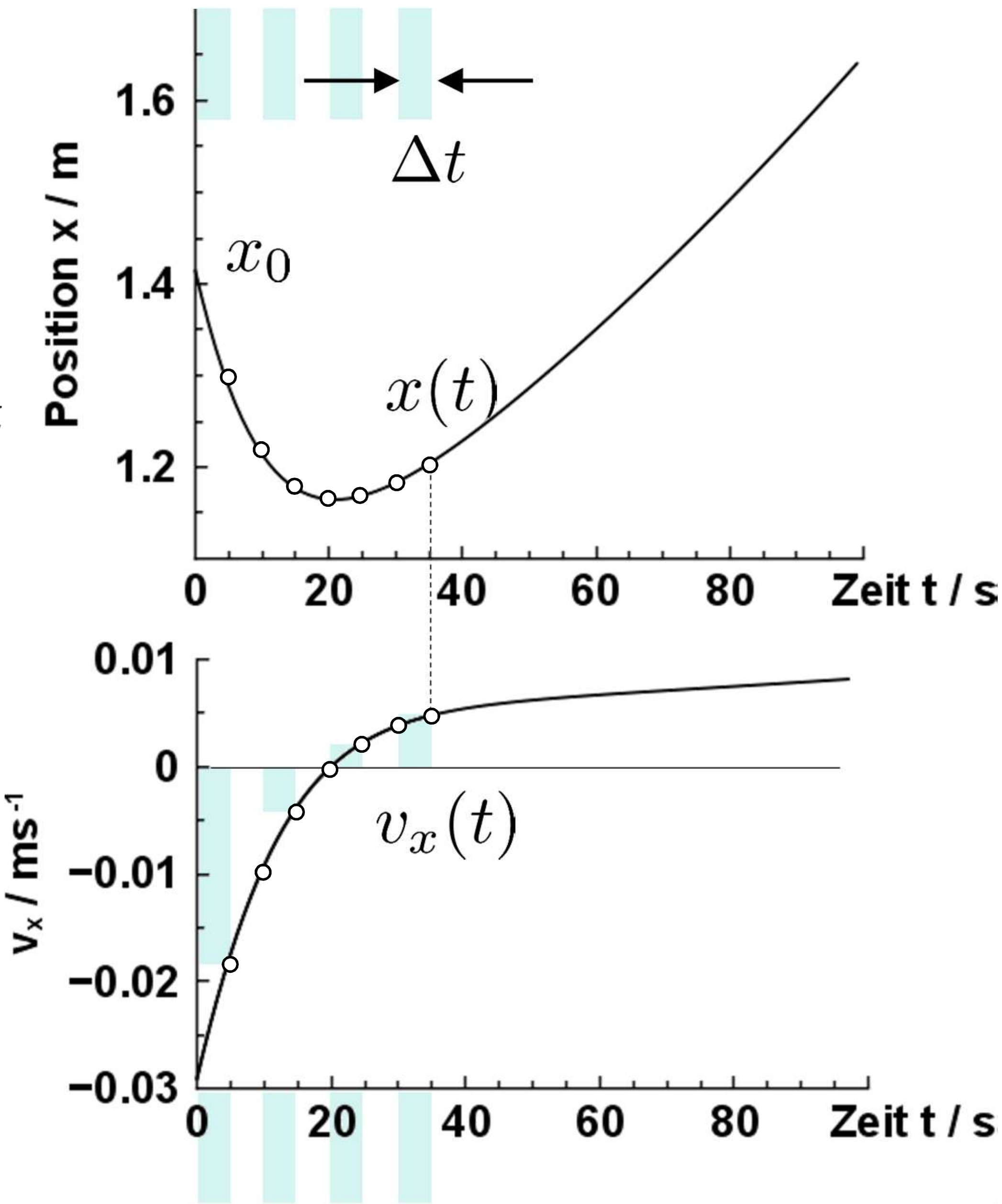
Geschwindigkeit =
Steigung in einem Ort-Zeit Diagramm

$$x(t) \approx x_0 + \sum_i v_x(t)\Delta t$$



Geschwindigkeit =
Steigung in einem
Ort-Zeit Diagramm

$$x(t) \approx x_0 + \sum_i v_x(t)\Delta t$$

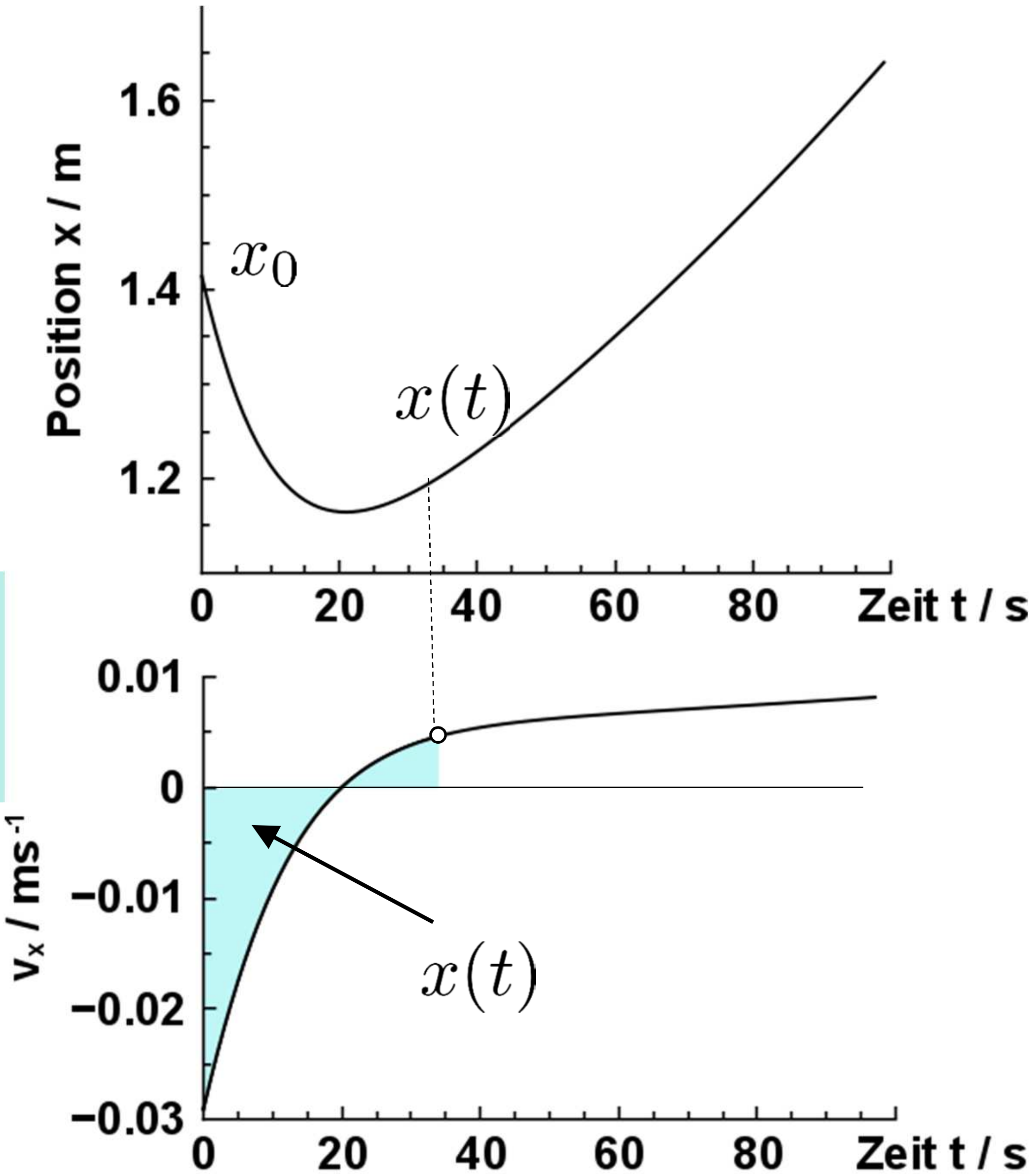


Geschwindigkeit =
Steigung in einem
Ort-Zeit Diagramm

$$x(t) \approx x_0 + \sum_i v_x(t)\Delta t$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(\tau)d\tau$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\tau)d\tau}$$



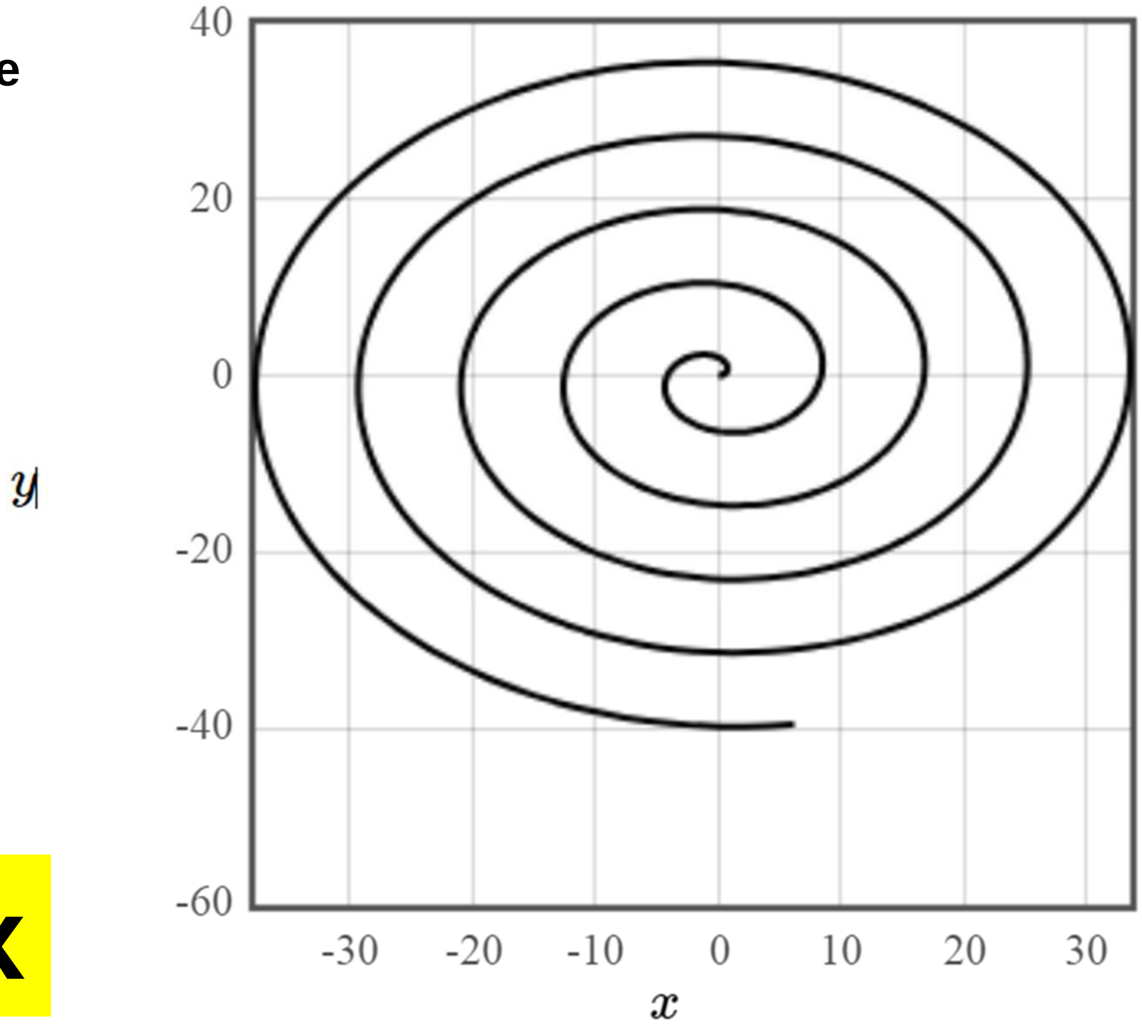
Ein Käfer krabbelt spiralförmig entlang des Ortsvektors $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = 4t\cos(3t)\hat{x} + 4t\sin(3t)\hat{y} \quad [\mathrm{m}]$$

Wird der Käfer im Verlaufe der Zeit entweder:

- ❑ **schneller,**
- ❑ **langsamer, oder**
- ❑ **mit konstanter Geschwindigkeit**

krabbeln?



fbr.io/cytjx

Ein Käfer krabbelt spiralförmig entlang des Ortsvektors $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = 4t\cos(3t)\hat{x} + 4t\sin(3t)\hat{y} \quad [\mathrm{m}]$$

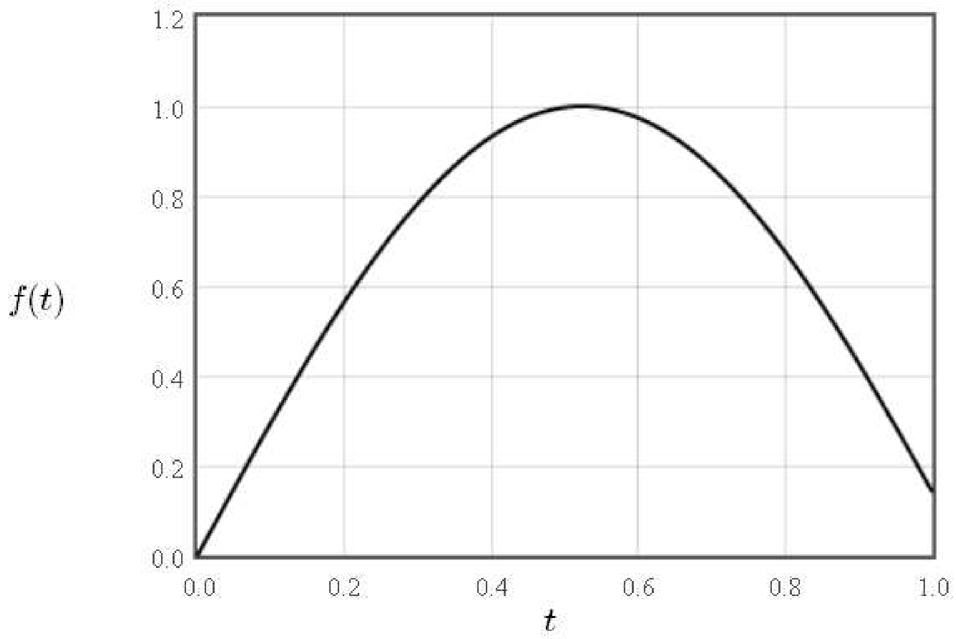
Numerische Integration and Differentiation

$f(t) =$ sin(3*t) ?

Fill table from $t_1 =$ 0 to $t_2 =$ 1.

t	$f(t)$
0.02000	0.05996
0.02333	0.06994
0.02667	0.07991
0.03000	0.08988
0.03333	0.09983
0.03667	0.1098
0.04000	0.1197
0.04333	0.1296
0.04667	0.1395
0.05000	0.1494
0.05333	0.1593

calculate from table



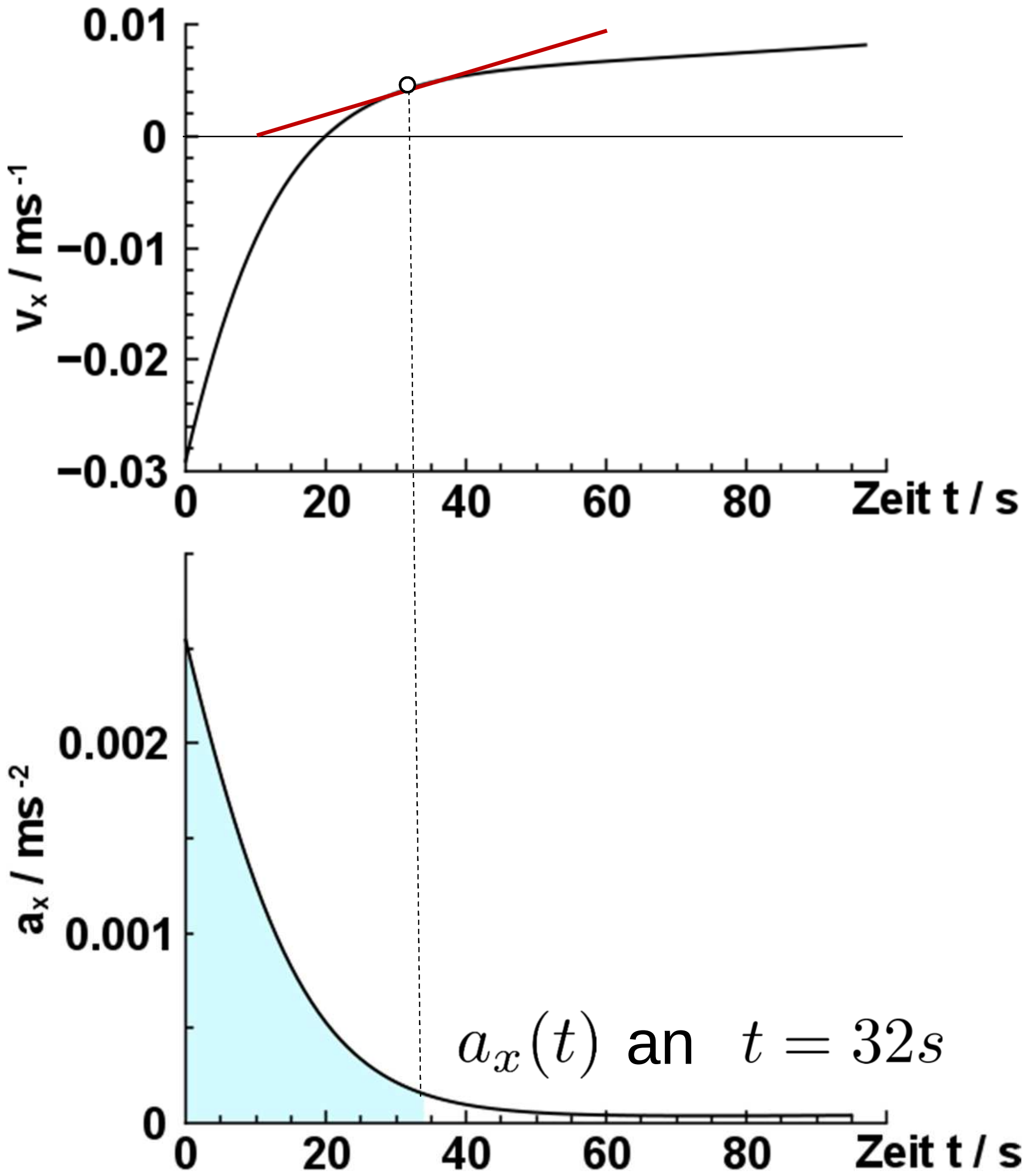
Die 1. Ableitung
Die Ableitung von $f(t)$ wird berechnet aus

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Beschleunigung =
Steigung in einem Geschwindigkeit-Zeit Diagramm

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad [m/s^2]$$

$$= \frac{dv_x}{dt}$$



$a_x(t)$ an $t = 32s$

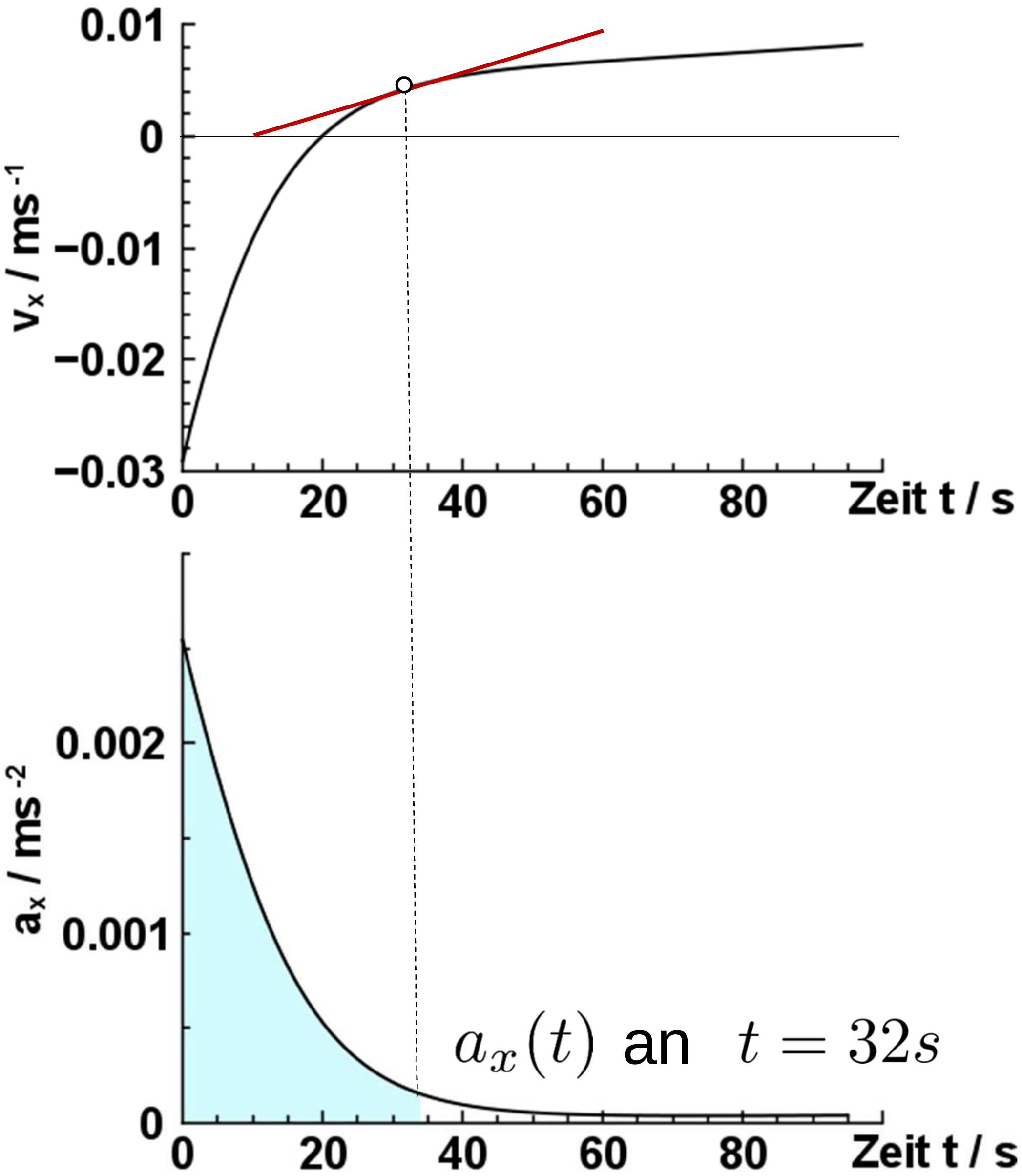
Beschleunigung =
Steigung in einem Geschwindigkeit-Zeit Diagramm

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad [m/s^2]$$

$$= \frac{dv_x}{dt}$$

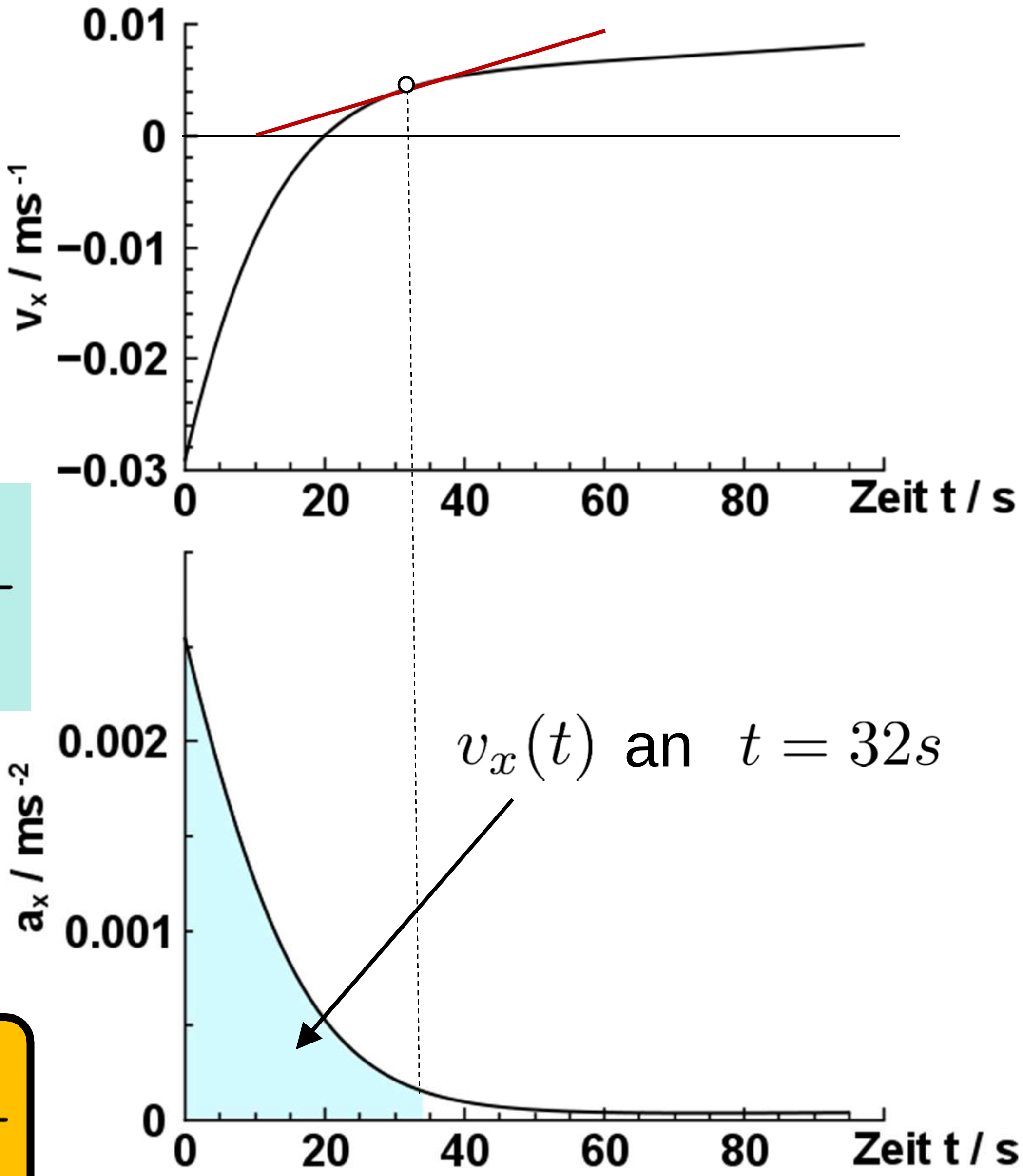
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad [m/s^2]}$$



Beschleunigung =
Steigung in einem Geschwindigkeit-Zeit Diagramm

$$v_x(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_x(\tau)d\tau$$



$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(\tau)d\tau}$$

Was ist ... $|\vec{r}_0| + \int_{t_0}^{t} |\vec{v}(\tau)| d\tau$?

zurückgelegter Weg s

Weg in kleinem Zeitintervall dt

$$ds = |\vec{v}(t)|dt$$

$$s(t) = |\vec{r}_0| + \int_{t_0}^{t} |\vec{v}(\tau)|d\tau \quad [m]$$

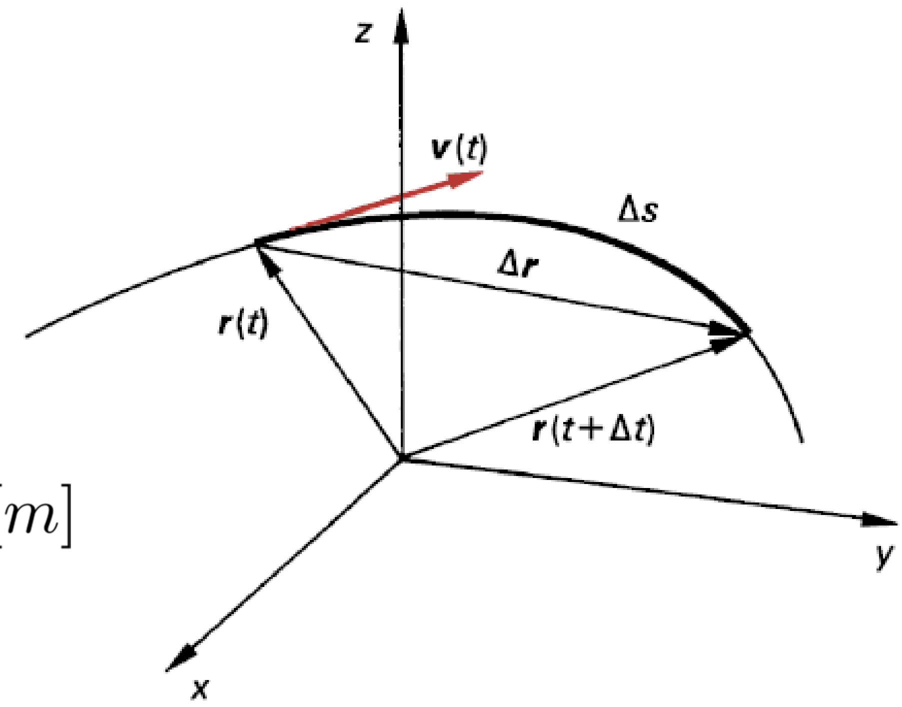


Abb. 2.9 Zur Definition des Geschwindigkeitsvektors v. x, y, z Raumkoordinaten, t Zeit, s Weg, r Ortsvektor

Aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure"

Fähigkeiten

Integrieren und Differenzieren

Sie müssen wissen:

- wie man die Funktionen $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, und Polynome x^n, $1/x^n$ integriert und ableitet;
- die Produktregel für Ableitungen;
- die Quotientenregel für Ableitungen;
- die Kettenregel für Ableitungen.

Sie können Ihre Arbeit mit der App für numerische Integration und Differentiation überprüfen.

Mathematica, Wolfram Alpha

Punktmechanik

Ort | **Geschwindigkeit** | **Beschleunigung** | **Kraft**

$$\vec{r} \Leftrightarrow \vec{v} \Leftrightarrow \vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}$$

?

?

Bewegungsbeschreibung

Newtonsche Axiome

Newtonsche Axiome

Trägheitsgesetz (1. Axiom)

Jeder Körper behält seine Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) bei, solange keine äußeren Kräfte auf ihn wirken.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \stackrel{!}{=} 0$$

Definiert Begriff des Inertialsystems:
= Bezugssystem, bzw., Beobachtungssystem in dem das gilt)

Aktionsprinzip (2. Axiom)

„Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.“

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Für den häufigen Fall einer konstanten Masse m wird daraus:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$