17. Magnetismus / Schwingungen

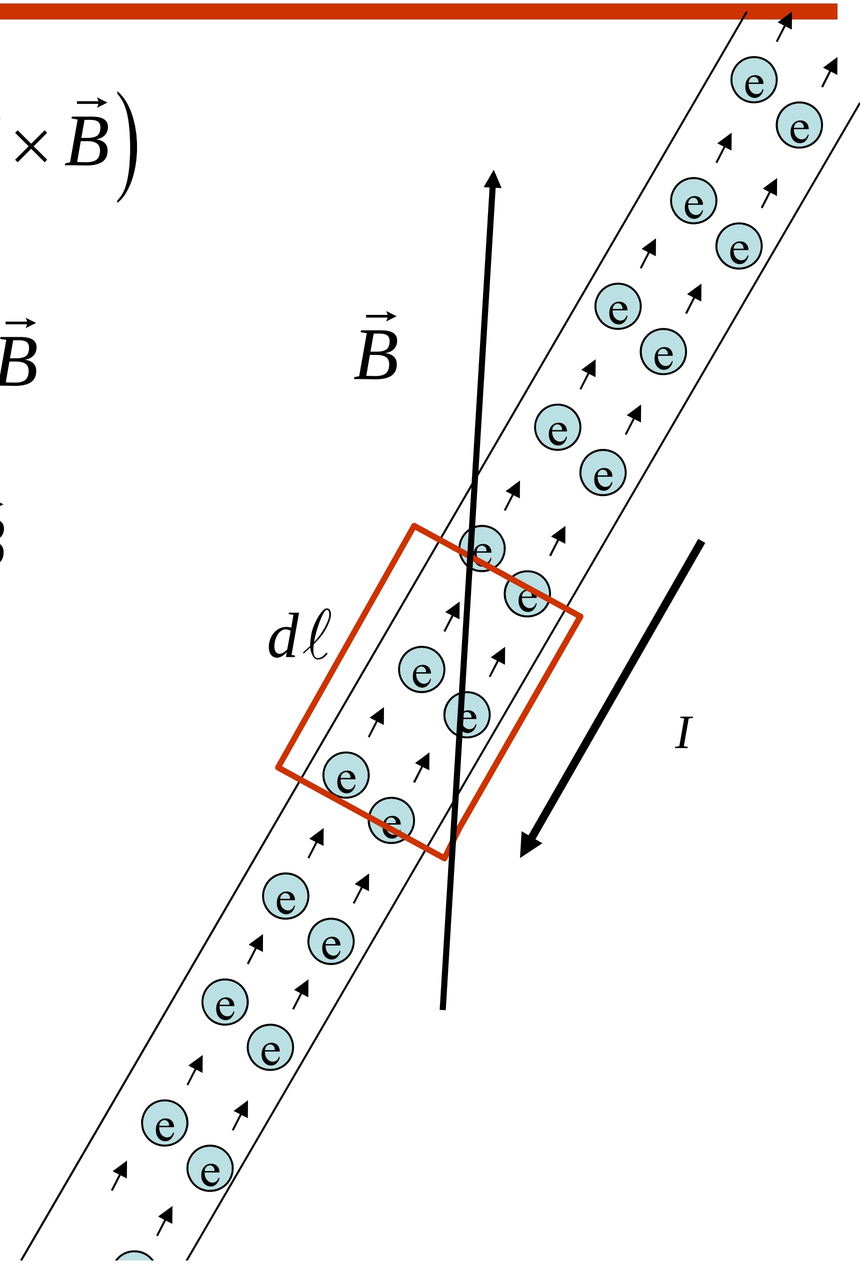
02 Dez. 2019

Lorentzkraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$$\vec{E} = 0: \qquad \vec{F} = \sum_i q_i \vec{v}_i \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$$



Lorentzkraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$\vec{E} = 0:$

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{v}_i \times \vec{B}$$

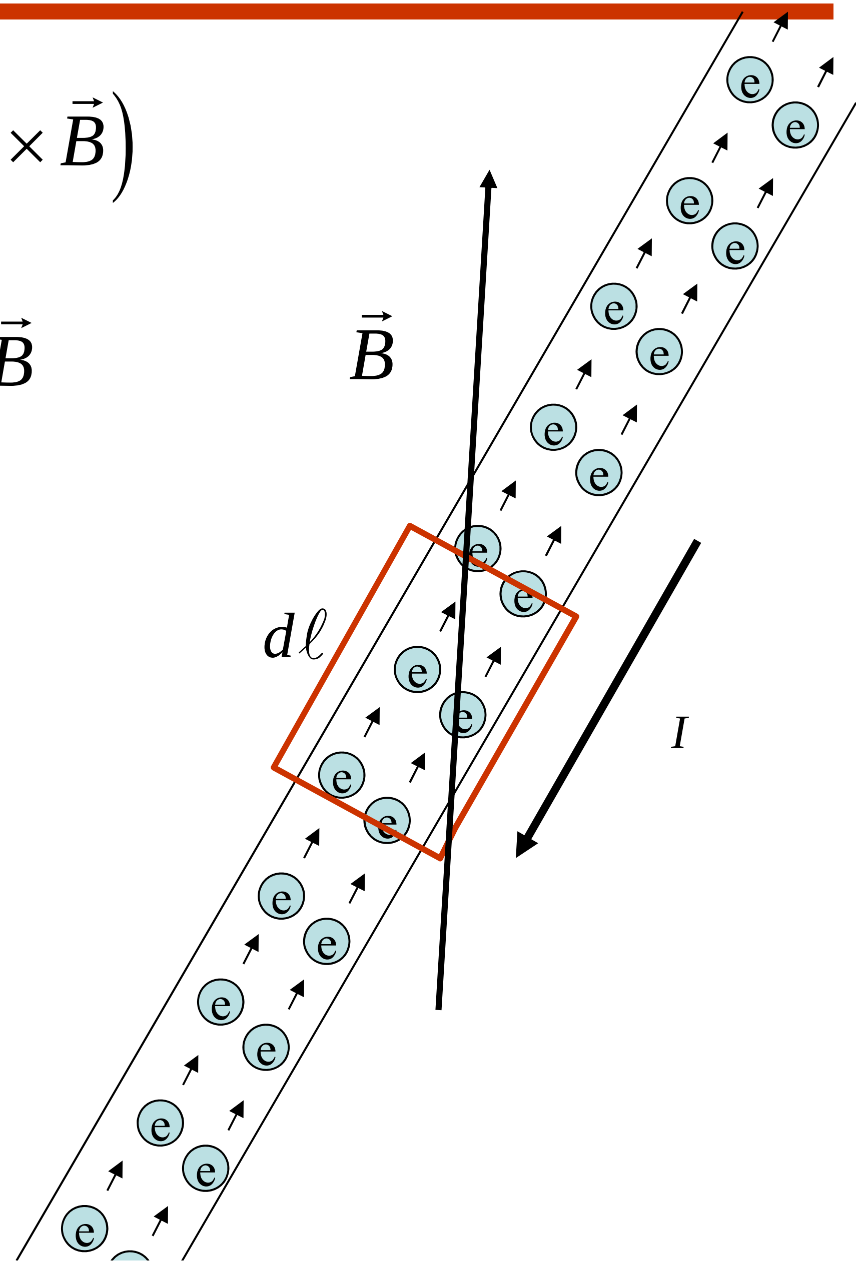
$$\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$$

$$I = \frac{Nqv}{d\ell}$$

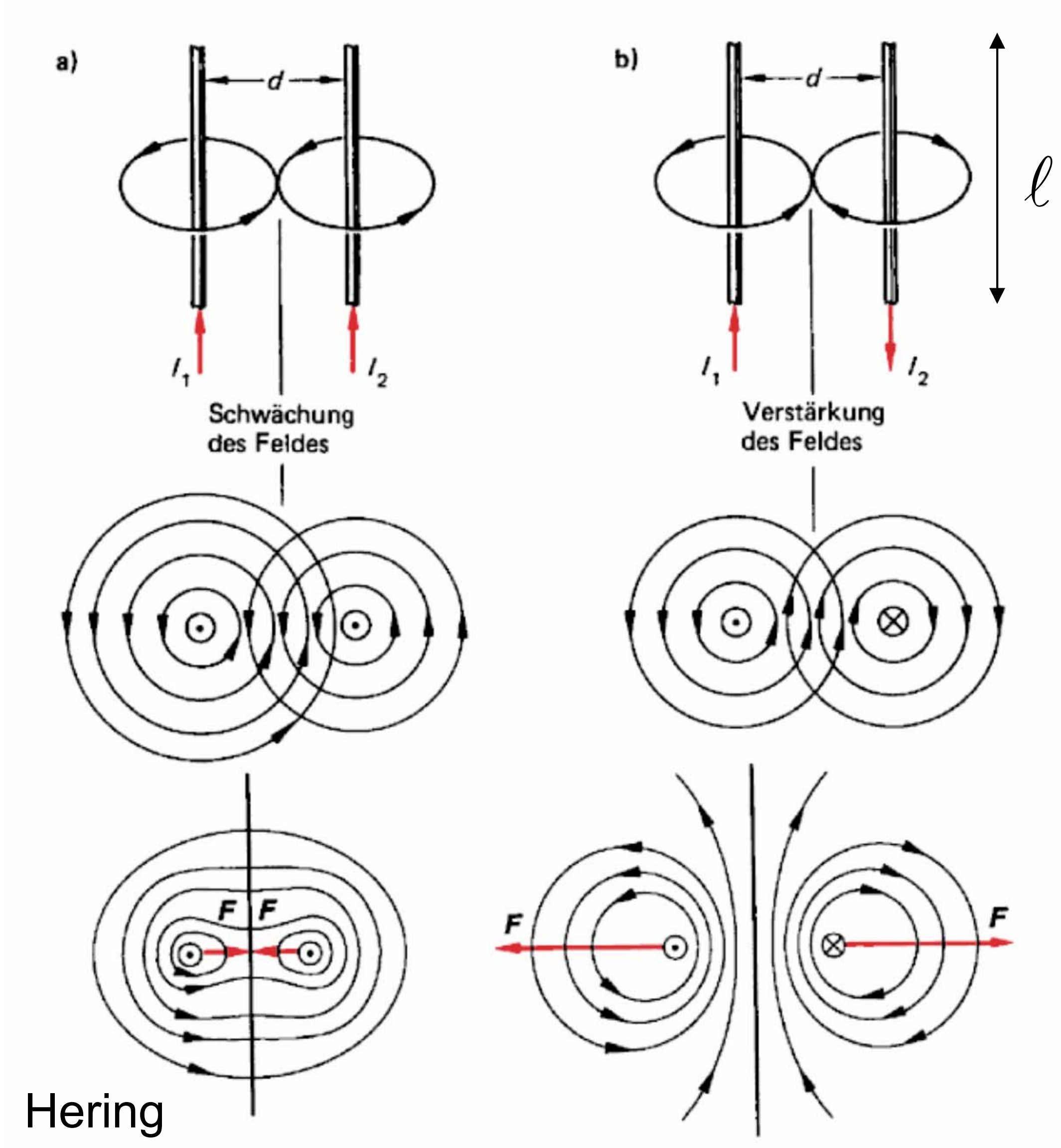
$$d\vec{F} = I(d\vec{\ell} \times \vec{B}) \qquad (4.193)$$

$$\boxed{\vec{F} = I\,\vec{l} \times \vec{B}}$$

gerader Draht und konstantes Magnetfeld



Kraft zwischen zwei Leitern



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

$$\vec{F} = I\ \vec{r} \times \vec{B}$$

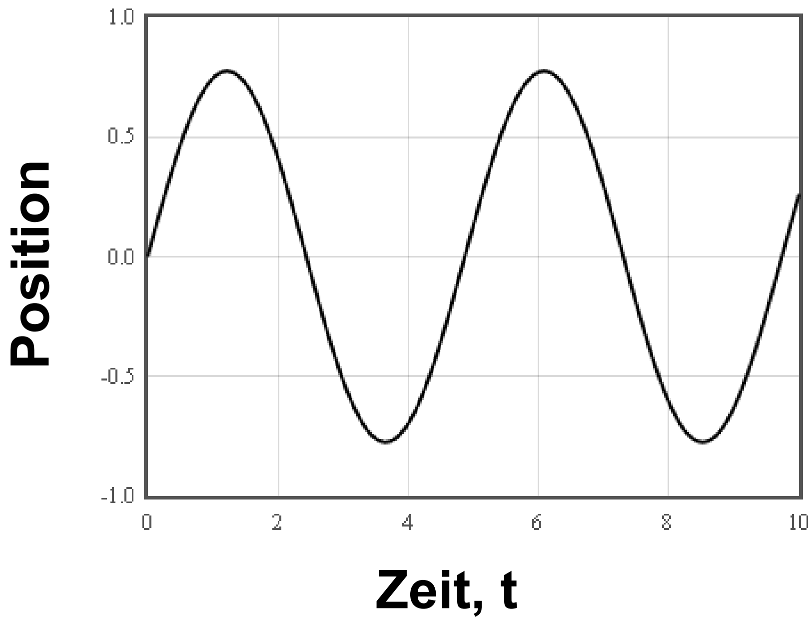
$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi d}$$

Motors, generators, speakers, microphone

Elektromotor

Schwingungen

Harmonische Schwingung



sinusförmig = harmonisch

Frequenz

$$f = \frac{1}{T}$$

Periodendauer

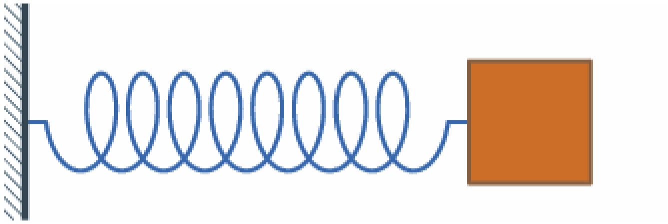
$$\sin(\omega t)$$

Radiant

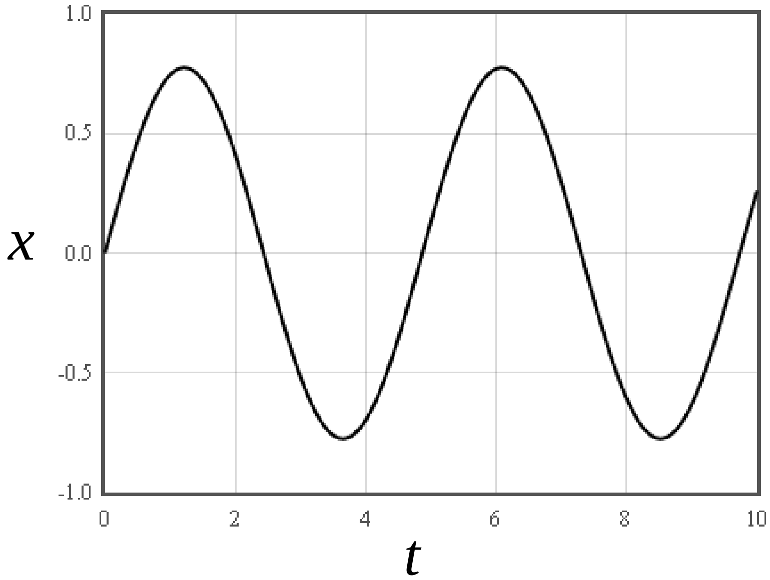
Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ rad/s

Freie Schwingung

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx}$$



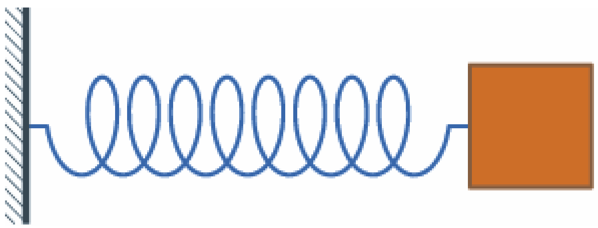
Lösung: $x(t) = C_1 \sin\left(\omega_0 t\right) + C_2 \cos\left(\omega_0 t\right)$



$$\omega_0 = ?$$

Freie Schwingung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$



$$x(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$$

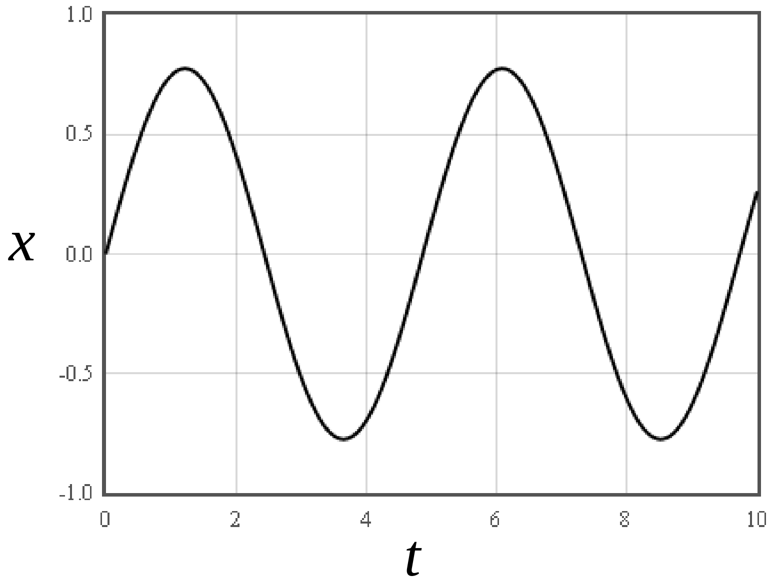
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 C_1 \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$-m\omega_0^2 \cancel{\left(C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)\right)} = -k \cancel{\left(C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)\right)}$$

$$m\omega_0^2 = k$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Freie Schwingung



$$x(t=0)=0 \qquad \frac{dx}{dt}(t=0)=1$$

$$x(t)=C_1\sin\left(\omega_0 t\right)+C_2\cos\left(\omega_0 t\right)$$

$$\frac{dx}{dt}=\omega_0 C_1\cos\left(\omega_0 t\right)-\omega_0 C_2\sin\left(\omega_0 t\right)$$

$$x(t=0)=0=C_2$$

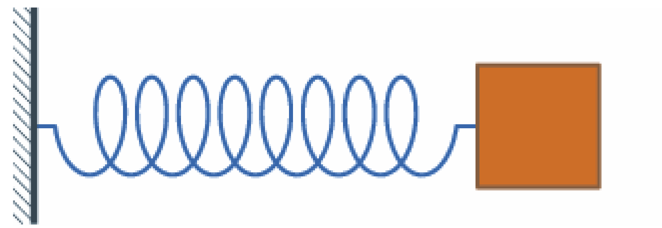
$$C_2=0$$

$$\frac{dx}{dt}(t=0)=1=\omega_0 C_1$$

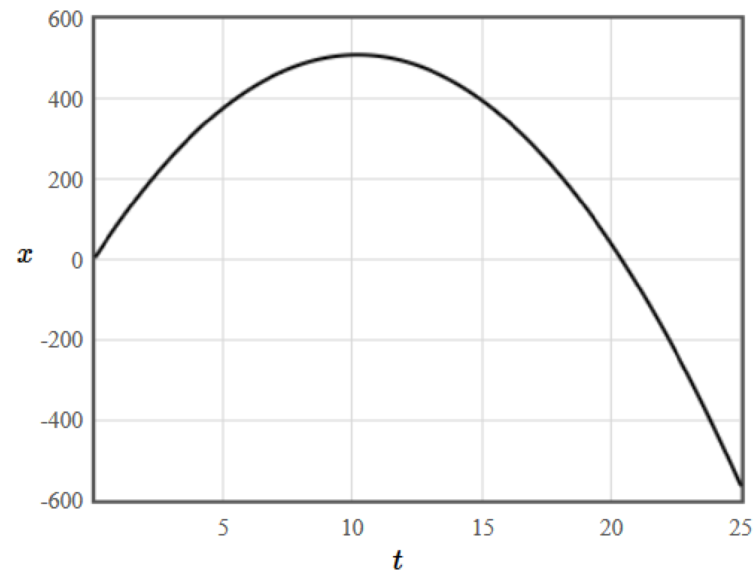
$$C_1=\frac{1}{\omega_0}$$

falsche Lösung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$



$$x = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$



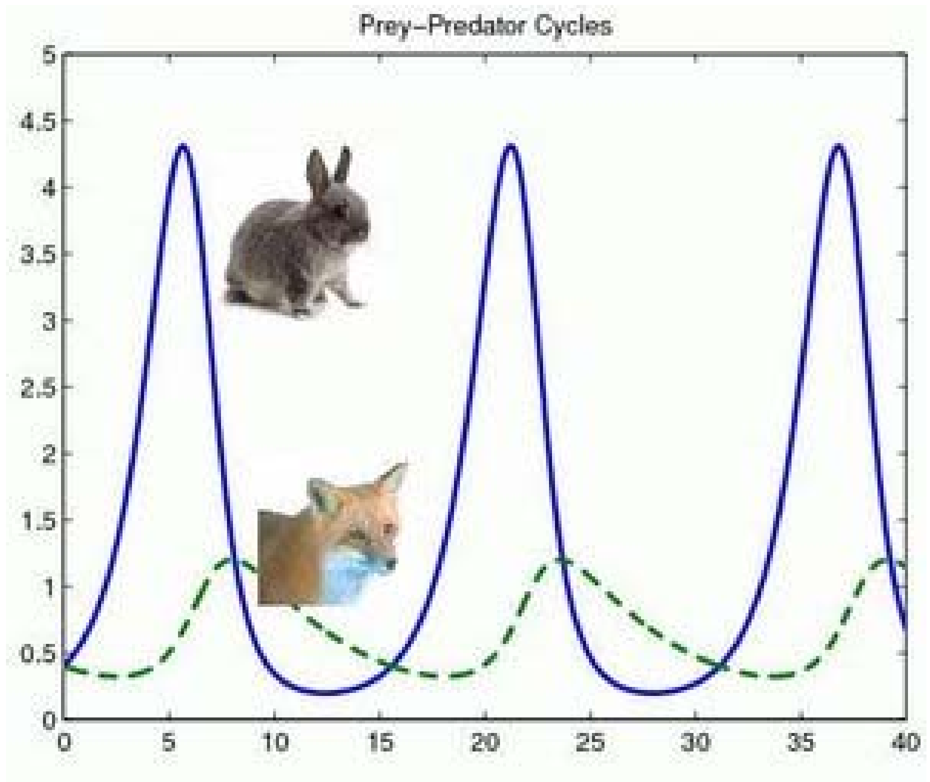
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

$$-mg = -k(v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2)$$

Räuber-Beute-Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = (b - py)\,x$$

$$\frac{dy}{dt} = (ry - d)\,y$$



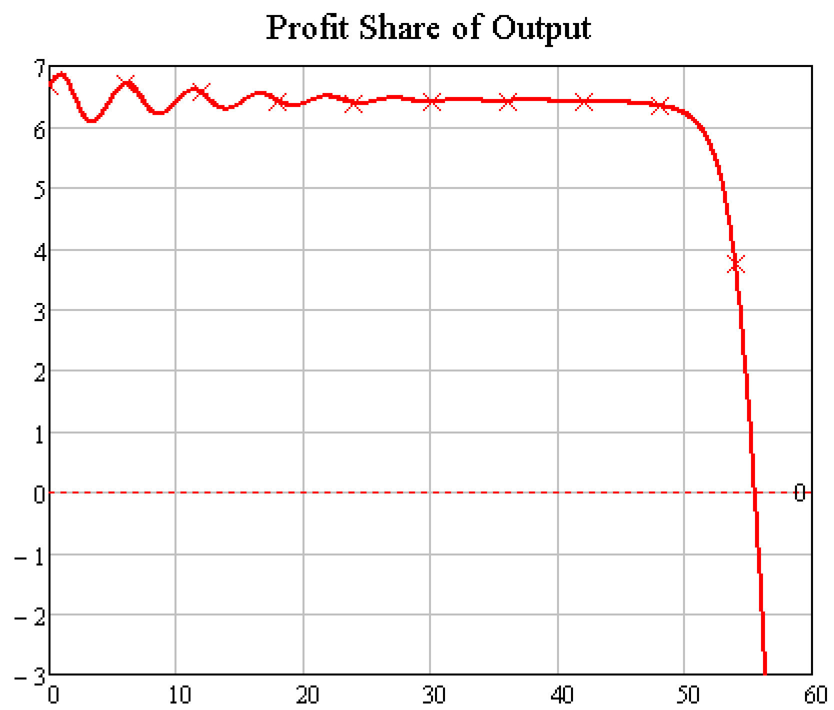
http://www.scholarpedia.org/article/Predator-prey_model

Konjunkturzyklen

$$\frac{d}{dt}\lambda = \lambda \cdot \left(\frac{Inv_{fn}(\pi_r)}{v} - (a + \beta + \gamma) \right)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \omega \cdot \left(\mathrm{Wage}_{\mathrm{fn}}(\lambda) - \alpha \right)$$

$$\frac{d}{dt}d = Inv_{fn}(\pi_r) - \pi_r - d \cdot \left(\frac{Inv_{fn}(\pi_r)}{v} - \gamma \right)$$

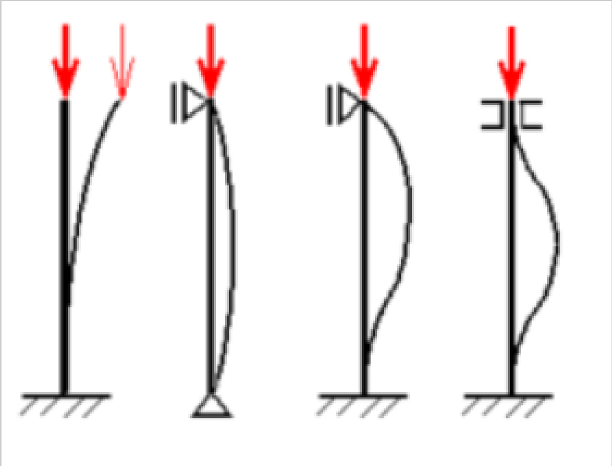


http://debunkingeconomics.com/2013/04/economics-and-the-powerful-faulty-analysis-economic-advice-and-the-imperatives-of-power/

Knicken

Eulersche Knickfälle (Biegeknicken) [Bearbeiten]

Nach Leonhard Euler, der das Knicken schlanker Stäbe als erster behandelt hat, sind vier Fälle für das Knicken des elastischen Stabes mit mittig wirkender Druckkraft und speziellen Randbedingungen benannt. Euler untersuchte das Gleichgewicht der Spannungen an bereits durch die eigentliche Belastung verformten Stäben, dieser Lösungsansatz war für seine Zeit neu und führte zu umfangreichen Erkenntnissen innerhalb der Stabilitätstheorie. In die Rechnung zum Nachweis der Knicksicherheit gehen sämtliche geometrischen, mechanischen und werkstoffseitigen Parameter des belasteten Bauteiles ein.



Die vier Eulerfälle mit folgenden Randbedingungen (v.l.n.r.):
(1) eingespannt/frei, (2) gelenkig/gelenkig,
(3) eingespannt/gelenkig,
(4) eingespannt/eingespannt

Die Knickkraft, zuweilen auch als *Eulerkraft* bezeichnet, kann für den elastischen Bereich durch eine einzige Formel dargestellt werden:

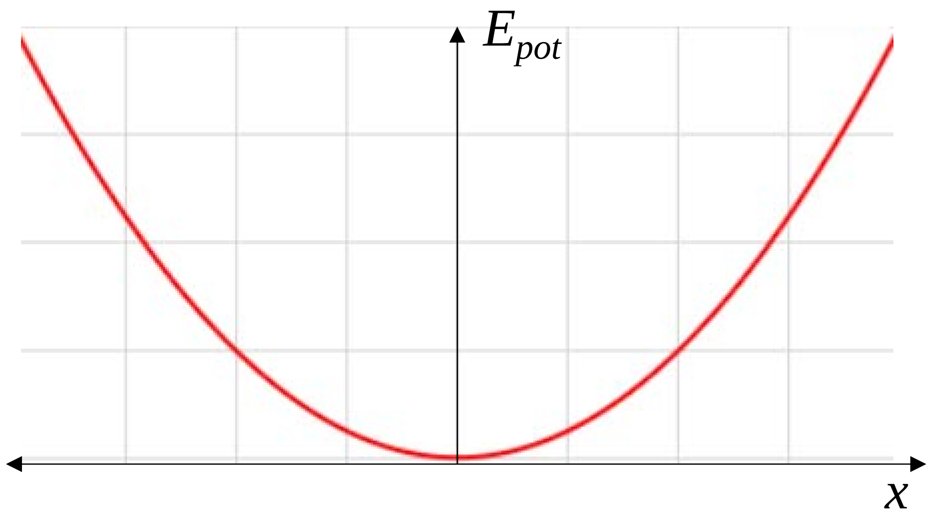
$$F_{\mathrm{k}} = \frac{\pi^2 EI}{s^2}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right) v = 0$$

http://de.wikipedia.org/wiki/Knicken

andere Schwingungssysteme

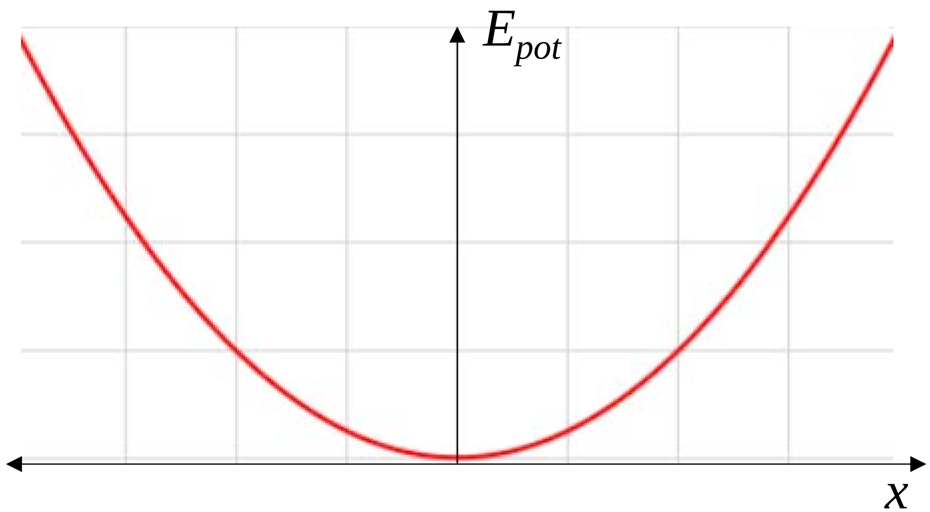
E_{pot} hat ein Minimum bei dem Gleichgewichtspunkt



$$F_x = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dx}$$

Federschwingung ?

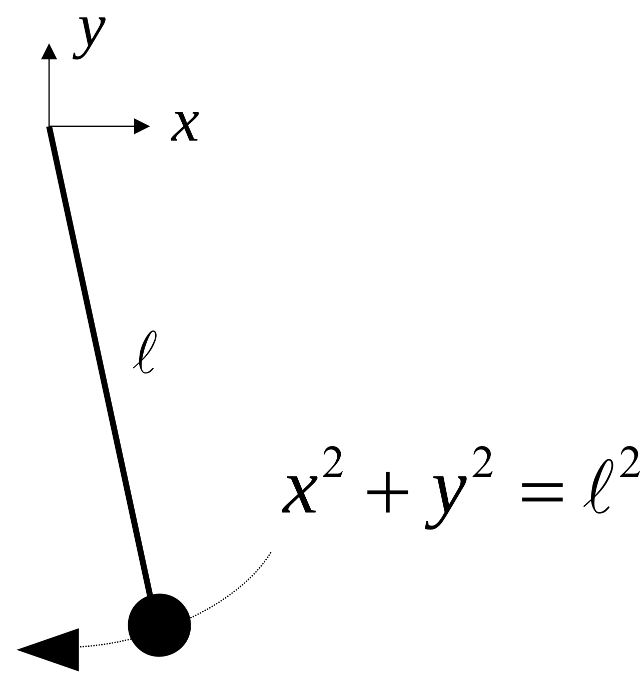
E_{pot} hat ein Minimum bei dem Gleichgewichtspunkt



$$E_{\text{pot}}(x) = \frac{k}{2}x^2 \quad \Longrightarrow \quad F_x = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dx} = -kx$$

Pendel

$$E_{pot} = -mgy = -mg\sqrt{\ell^2 - x^2}$$



$$F_x = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{mg\left(-2x\right)}{\sqrt{\ell^2 - x^2}}$$

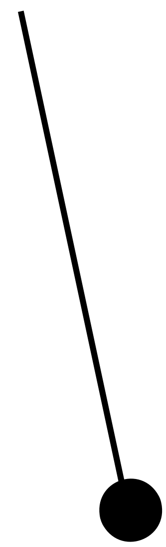
für kleine Auslenkungen $x \ll y \approx \ell$

$$F_x \approx -\frac{mg}{\ell}\, x$$

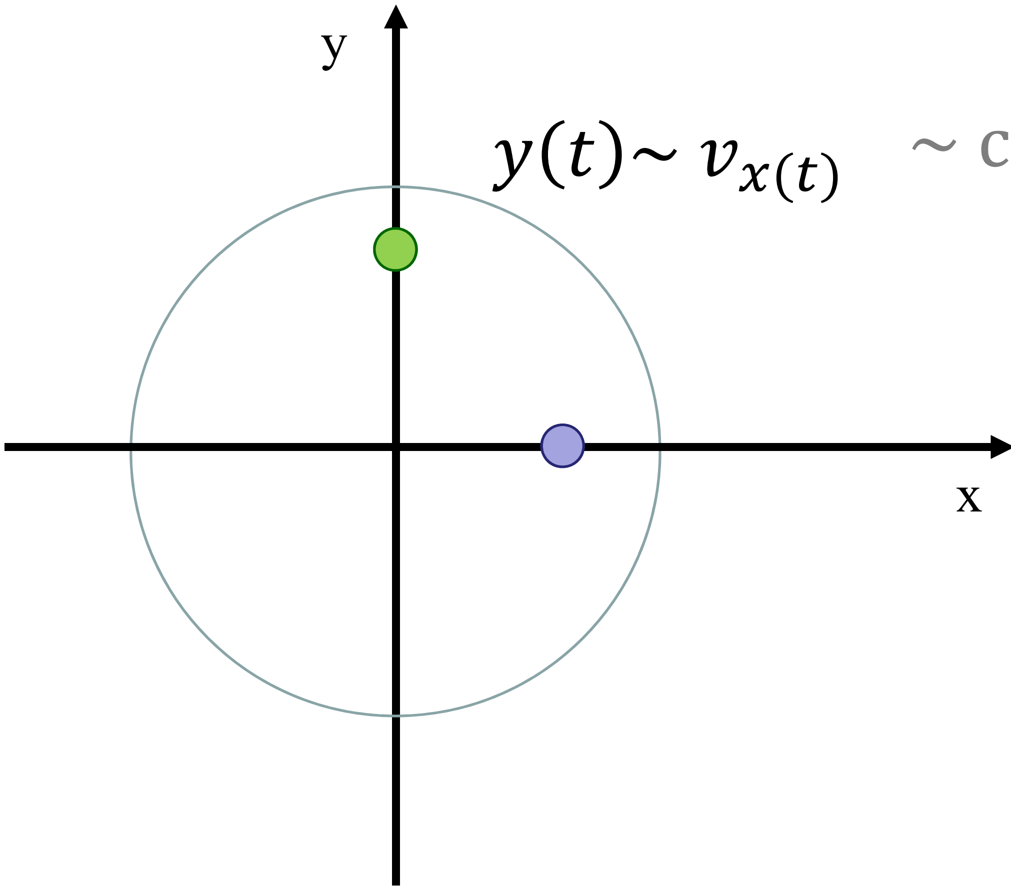
Pendel

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\frac{mg}{\ell}x$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$



Komplexe Zahlen



$$y(t) \sim v_{x(t)} \quad \sim \cos(\omega_0 t)$$

$$x(t) \sim \sin(\omega_0 t)$$

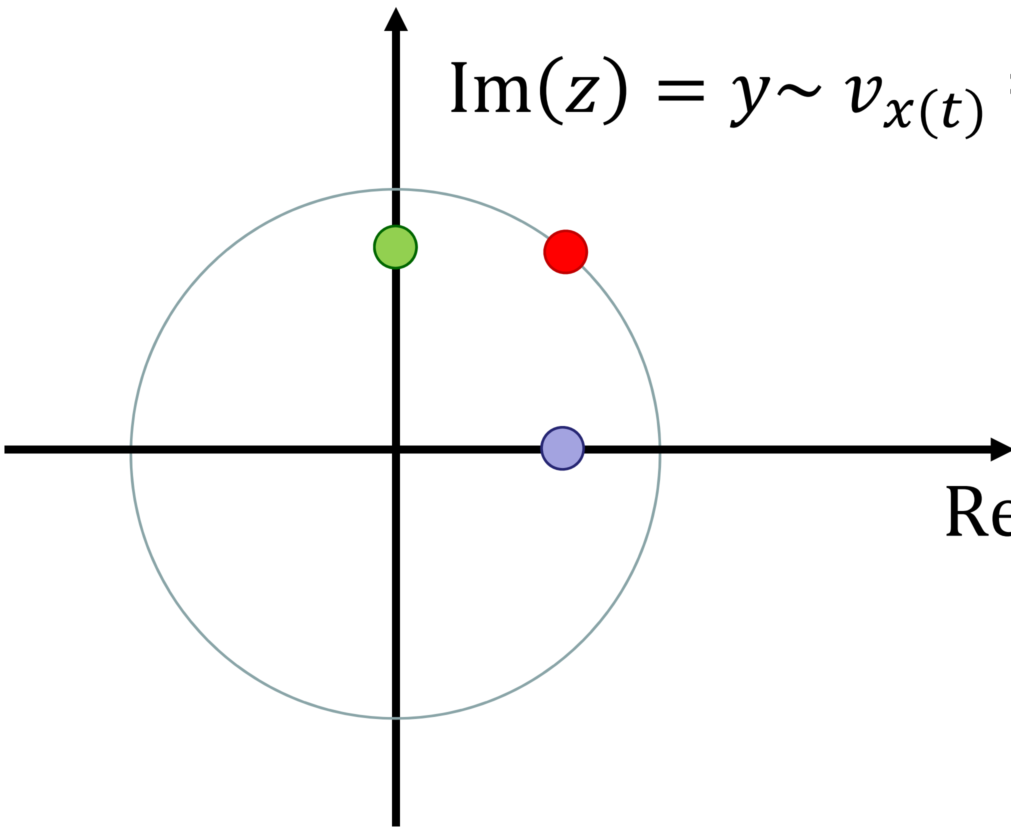
Zahlenpaar: 1. reelle Zahl = Messgrösse
2. reeller Zahl = "Zusatz-Information"
hier: Orientierung der Auslenkungsänderung

Komplexe Zahlen

Zahlenpaar: $z = x + \mathrm{i}y = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$

$$i^2 = -1 = j^2$$

$$\mathrm{Im}(z) = y \sim v_{x(t)} = \cos(\omega_0 t)$$



$$\mathrm{Re}(z) = x \sim \sin(\omega_0 t)$$

Komplexe Zahlen

Rechnen: analog zu reellen Zahlen unter Berücksichtigung

- **Faktor:** i $\qquad i^2 = -1$

- **Jede komplexe Zahl, die aus einer Operation hervorgeht, muss sich als Real- und Imaginärteil schreiben lassen**

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$$

physikalische Messgrösse $\qquad$ **Zusatzinformation**

Komplexe Zahlen

$z = x + iy$ $\qquad\qquad$ $z' = a + ib$

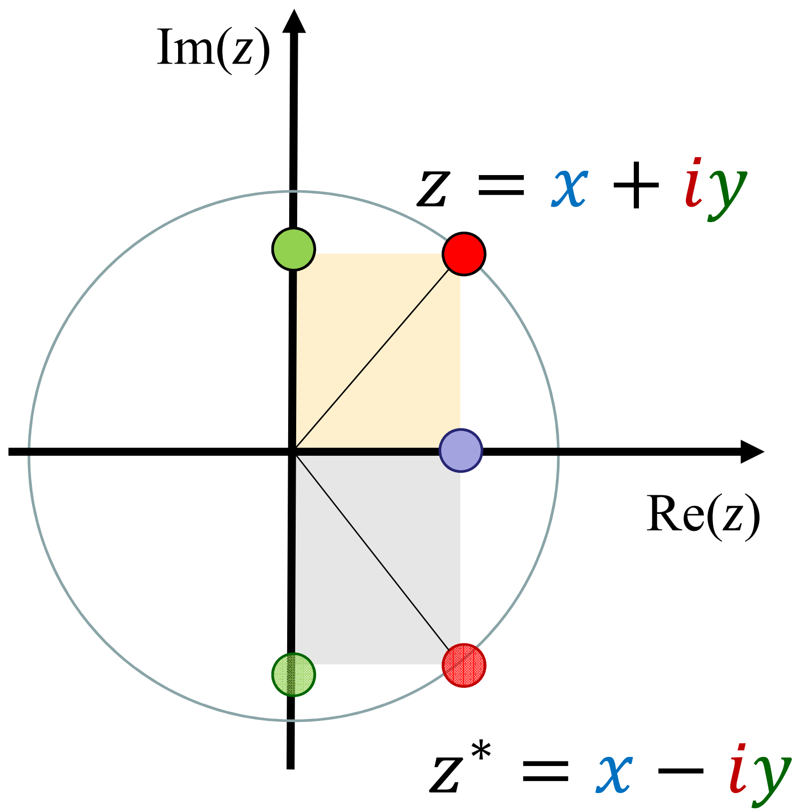
$$z + z' = a + x + iy + ib = a + x + i(y + b)$$

$$z \cdot z' = ax + i\,(ay + xb) + i^2 yb$$
$$= ax - yb + i(ay + bx)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\,\frac{dy}{dt}$$

Betrag komplexer Zahlen

muss reell sein!

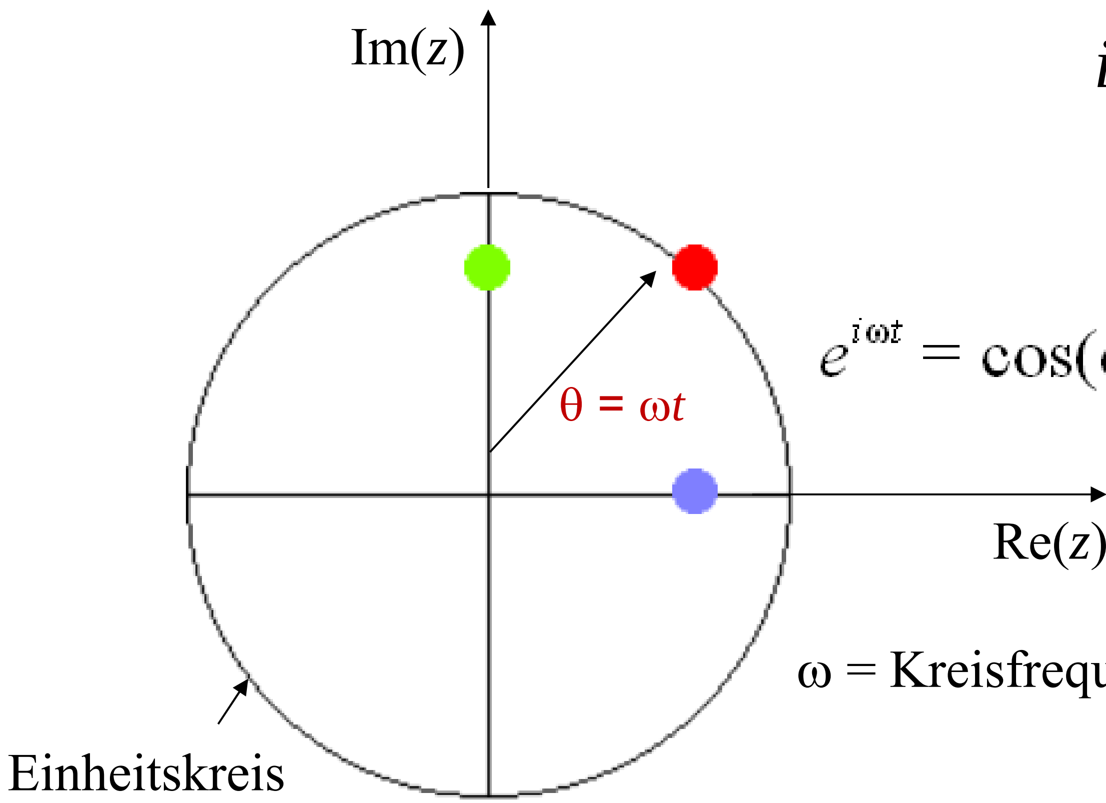


$$|z|^2 = |x+iy|^2 = (x+iy)(x-iy) = z^* z = x^2 + y^2$$

konjugiert komplexe Zahl

Euler'sche Formel e^{iq} = cos$q$ + $i$sin$q$

$$i^2 = -1 = \left(j^2 \right)$$



$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

ω = Kreisfrequenz

$$\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{e^{-i\theta}e^{i\theta}} = \sqrt{e^{0}} = 1 = \sqrt{\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$