18. Schwingungen

6 Dez. 2019

Lehrplan
Bücher
Formel Sammlung
Fähigkeiten
Apps
Testfragen
Vorlesungen
→ Aufgaben

Gedämpftes Masse-Feder system

Eine Masse m ist mit einer linearen Feder der Federkonstanten k verbunden. Die Feder wird 2 cm aus ihrer Gleichgewichtsposition gezogen und die Masse wird aus einer Ruhelage losgelassen. Auf die Masse wirkt eine Reibungskraft in die entgegengesetzte Richtung der Geschwindigkeit $F_{\text{drag}} = -bv_x$, mit b der Reibungskraftkonstanten. Die Beschleunigung der Masse ist $a_x = -kx/m - bv_x/m$. Die Bewegung liegt auf einer Geraden, die wir als die x-Achse annehmen können. Die Gleichungen werden in den Löser für Differentialgleichungen 2ter Ordnung geladen.

$m = 1$ [kg] - +
$b = 0.2$ [kg/s] - +
$k = 0.9$ [N/m] - +

Die Periode der Schwingungen ist $T = 2\pi/\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m}} = 6.66$ s.

Löser für Differentialgleichungen 2ter Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} = \text{-0.9*x-0.2*vx}$$

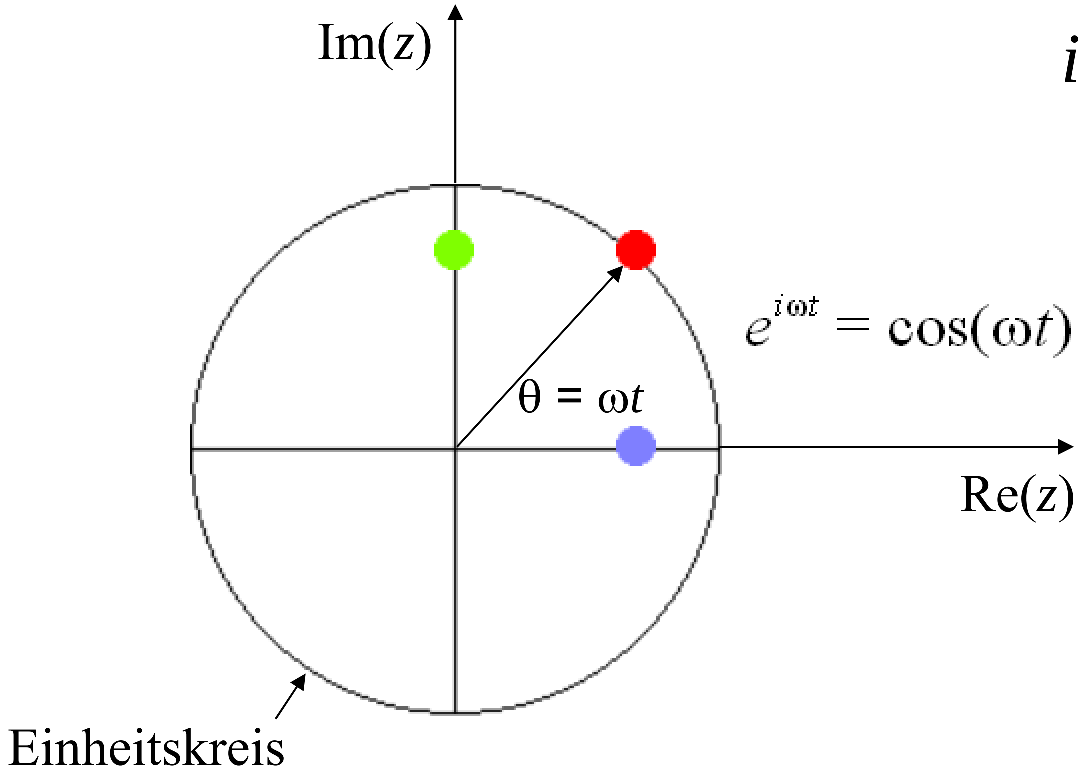
Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 0.02 $\Delta t =$ 0.05
$v_x(t_0) =$ 0 N_{steps} 300
$t_0 =$ 0 Plot: x vs. t

submit

Euler'sche Formel $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$i^2 = -1 = \left(j^2\right)$$



$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

ω = Kreisfrequenz

$$\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{e^{-i\theta}e^{i\theta}} = \sqrt{e^0} = 1 = \sqrt{\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

Lehrplan
Bücher
Formel Sammlung
Fähigkeiten
Apps
Testfragen
Vorlesungen
→ Aufgaben

Gedämpfte Federschwingung

Ein Objekt mit der Masse m ist mit einer Feder mit Federkonstante k verbunden. Die Feder wird 2 cm von ihrer Ruheposition ausgelenkt. Wenn die Feder versucht sich wieder in ihre Ruheposition zurück zu Bewegen wirkt auf die Masse eine Reibungskraft, die der Bewegungsrichtung entgegensetzt ist: $F_{\text{drag}} = -bv_x$. Mit b der Reibungskonstante. Wir nehmen dabei an, dass sich das Objekt entlang der x-Achse bewegt. Die Bewegung des Objekts kann dabei mit folgender Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben werden: $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$. Sie können diese Gleichung mit dem Programm unten lösen.

$m = 1$ [kg] - +

$b = 0.2$ [kg/s] - +

$k = 0.9$ [N/m] - +

Die Periodendauer der Schwingung beträgt $T = 2\pi/\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m}} = 6.66$ s.

Lösung Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0,$$

$m =$ 1

$b =$ 0.2

$k =$ 0.9

$F_0 =$ 0

Anfangsbedingungen:

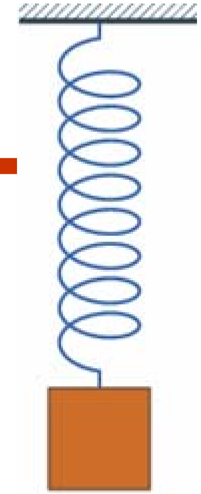
$x(t_0) =$ 0.02

$\frac{dx}{dt}(t_0) =$ 0

$t_0 =$ 0

submit

Freie Schwingung



$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=-mg$$

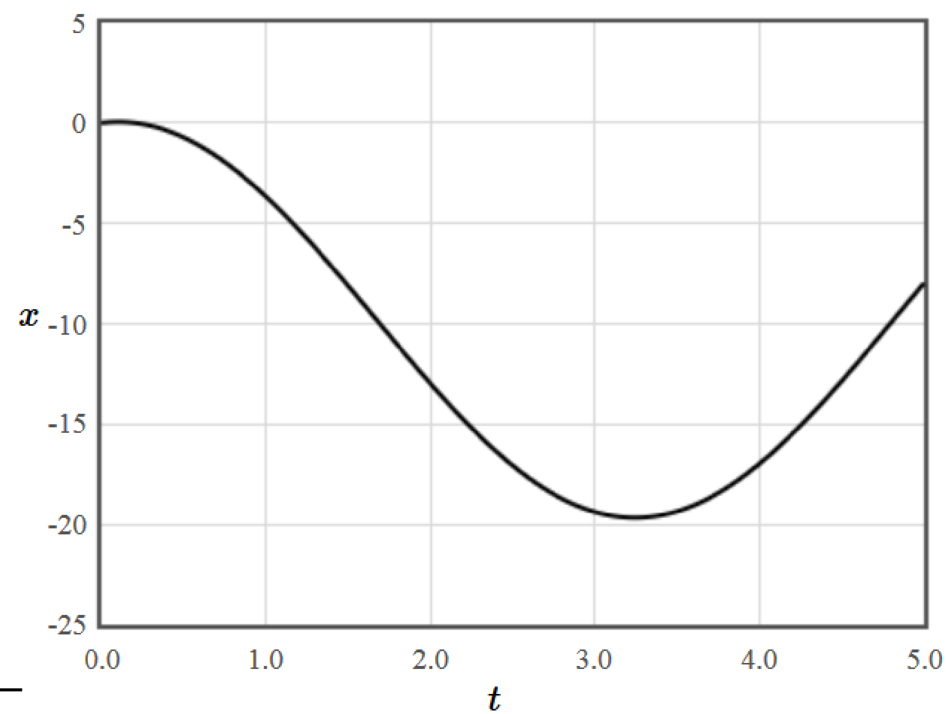
Lösung Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$a\,\frac{d^2x}{dt^2}+b\,\frac{dx}{dt}+cx=d,$$

$a =$ 1
$b =$ 0
$c =$ 1
$d =$ -9.81

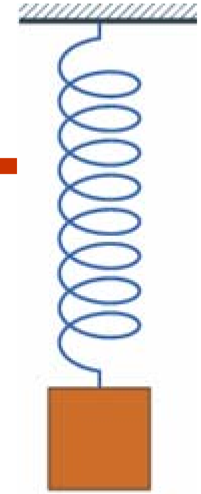
Anfangsbedingungen:
$x(t_0) =$ 0
$\frac{dx}{dt}(t_0) =$ 1
$t_0 =$ 0

Lösung

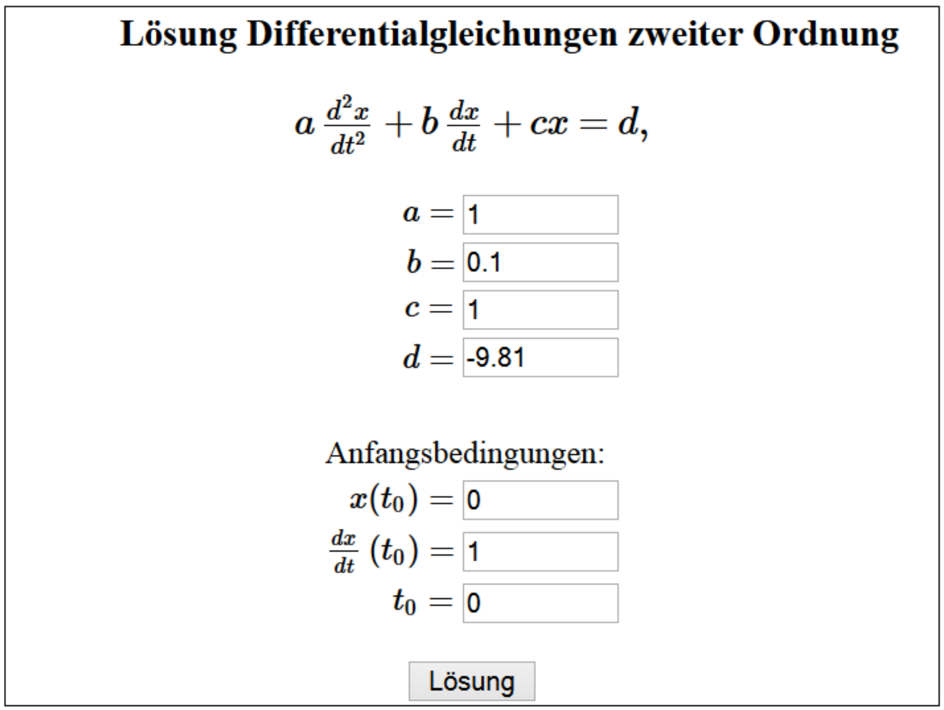


$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$b^2 < 4km$ Schwingfall



$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=-mg$$



Lösung Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$a\,\frac{d^2x}{dt^2}+b\,\frac{dx}{dt}+cx=d,$$

$a =$ 1

$b =$ 0.1

$c =$ 1

$d =$ -9.81

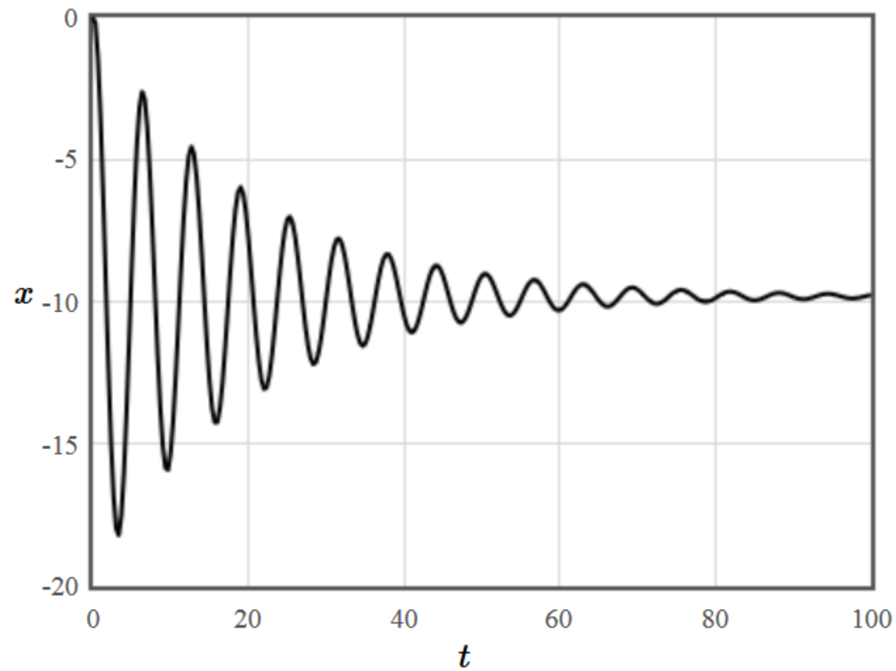
Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 0

$\frac{dx}{dt}(t_0) =$ 1

$t_0 =$ 0

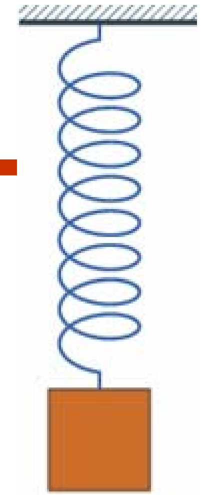
Lösung



$$\tau=\frac{2m}{b}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}}$$

$b^2 = 4km$ aperiodischer Grenzfall



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = -mg$$

Lösung Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$a\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + cx = d,$$

$a =$ 1

$b =$ 2

$c =$ 1

$d =$ -9.81

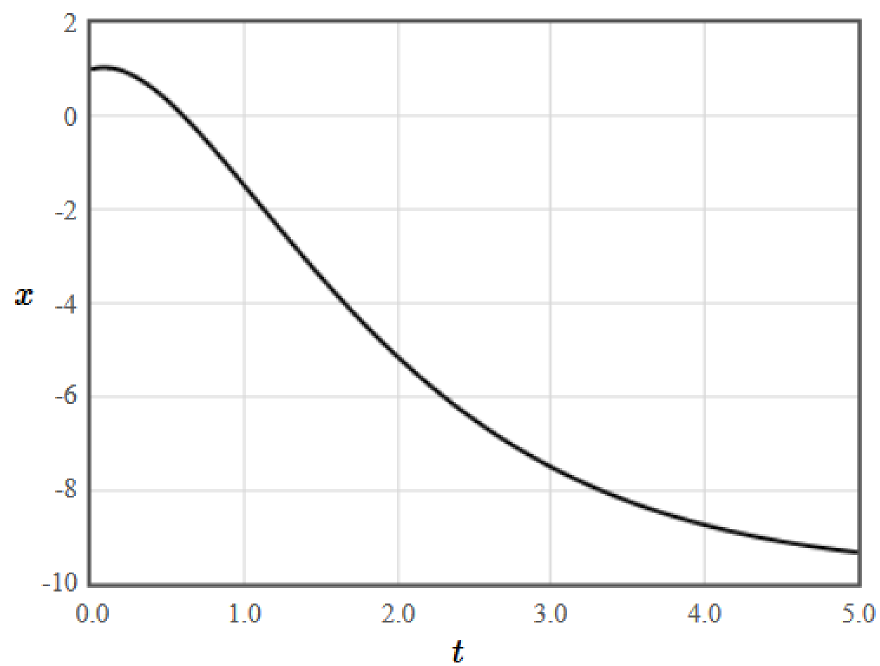
Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 1

$\frac{dx}{dt}(t_0) =$ 1

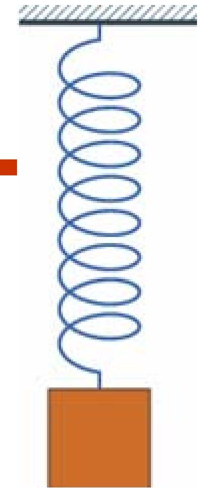
$t_0 =$ 0

Lösung



$$\tau = \frac{2m}{b}$$

$b^2 > 4km$ Kriechfall



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = -mg$$

Lösung Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$a\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + cx = d,$$

$a =$ 1

$b =$ 3

$c =$ 1

$d =$ -9.81

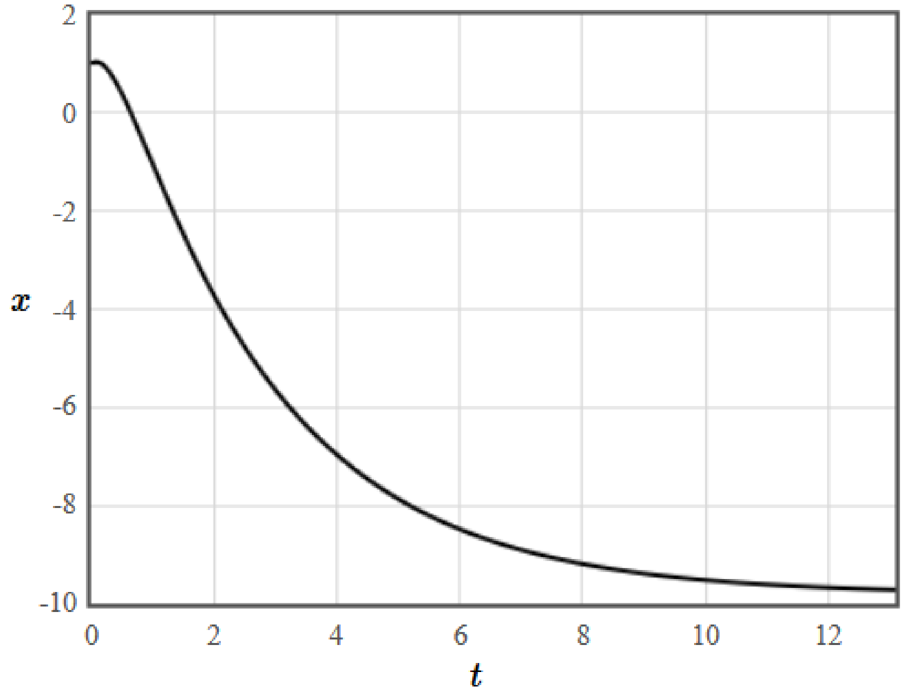
Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 1

$\frac{dx}{dt}(t_0) =$ 1

$t_0 =$ 0

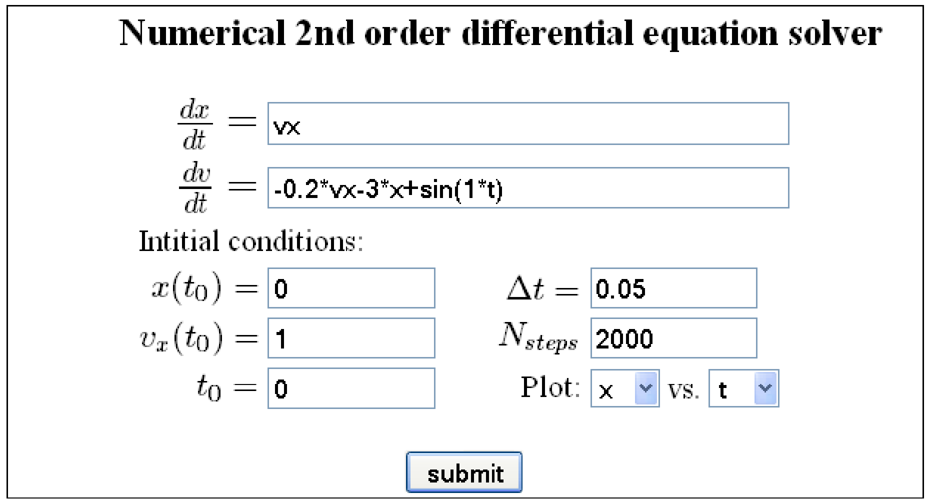
Lösung



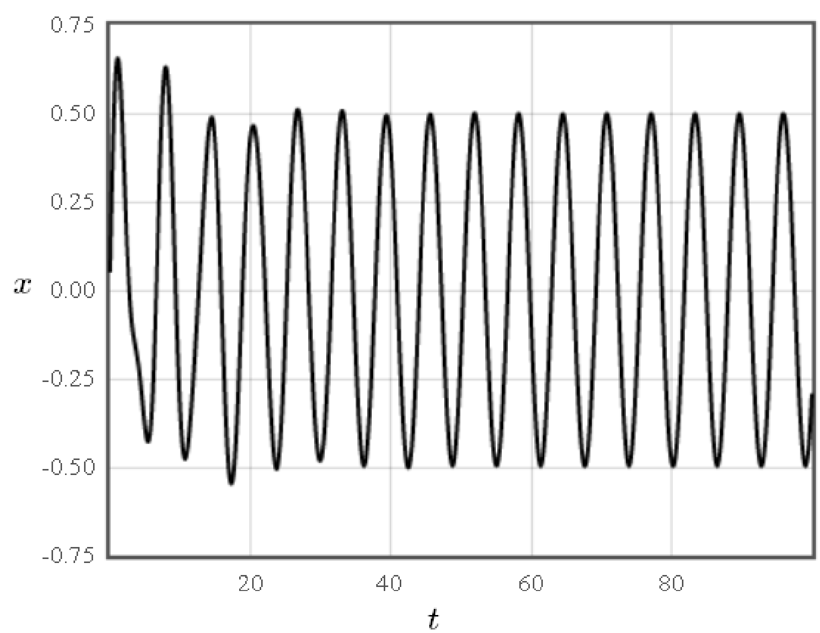
$$\tau_1 = \frac{-1}{\lambda_1} = \frac{2m}{b + \sqrt{b^2 - 4km}}$$

$$\tau_2 = \frac{-1}{\lambda_2} = \frac{2m}{b - \sqrt{b^2 - 4km}}$$

Resonaz



Numerical 2nd order differential equation solver
$\frac{dx}{dt} =$ vx
$\frac{dv}{dt} =$ -0.2*vx-3*x+sin(1*t)
Initial conditions:
$x(t_0) =$ 0
$v_x(t_0) =$ 1
$t_0 =$ 0
$\Delta t =$ 0.05
N_{steps} 2000
Plot: x vs. t
submit



0.75
0.50
0.25
x
0.00
-0.25
-0.50
-0.75
20
40
60
80
t