

11. Elektrizität

November 11, 2019

Übersicht

- Was ist eine **Ladung** ?
- Wie bestimmt man die **Kraft** auf eine **Ladung**?
- Wie sind **elektrische Ladungen** mit dem **elektrischem Feld** verknüpft?
- Was versteht man unter einer **elektrischen Spannung**?

Hering, Kapitel 4

elektrische Ladungen

$$\vec{F}_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$q_1, q_2 \dots$ elektrische Ladung

- an Materie geheftet
- positive und negative Ladungen
- gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, entgegengesetzte Ladungen ziehen sich an

elektrische Ladungen

Dimension: [Q] = C (Coulomb)

1 C = 1 As

elektrische Feldkonstante

$$\epsilon_0 = 8.8541878128(13) \times 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\vec{F}_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Coulombgesetz

$$E_{\text{pot}}(x, y, z) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Skalarfeld

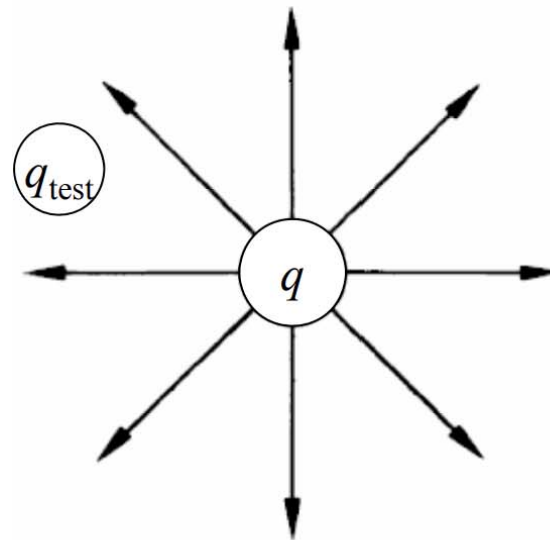
$$\vec{F} = -\nabla E_{\text{pot}}$$

Vektorfeld

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Elektrisches Feld

Kraft, die eine Ladung q auf Probeladung ausübt



$$\vec{F} = \frac{q_{\text{test}} q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

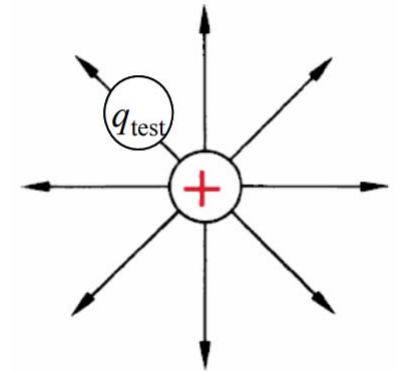
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\vec{F} = q_{\text{test}} \vec{E}$$

Elektrostatisches Potential

Elektrisches Feld
Vektorfeld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q_{\text{test}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$



$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

Elektrostatisches Potential
Skalarfeld

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{E_{\text{pot}}}{q_{\text{test}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

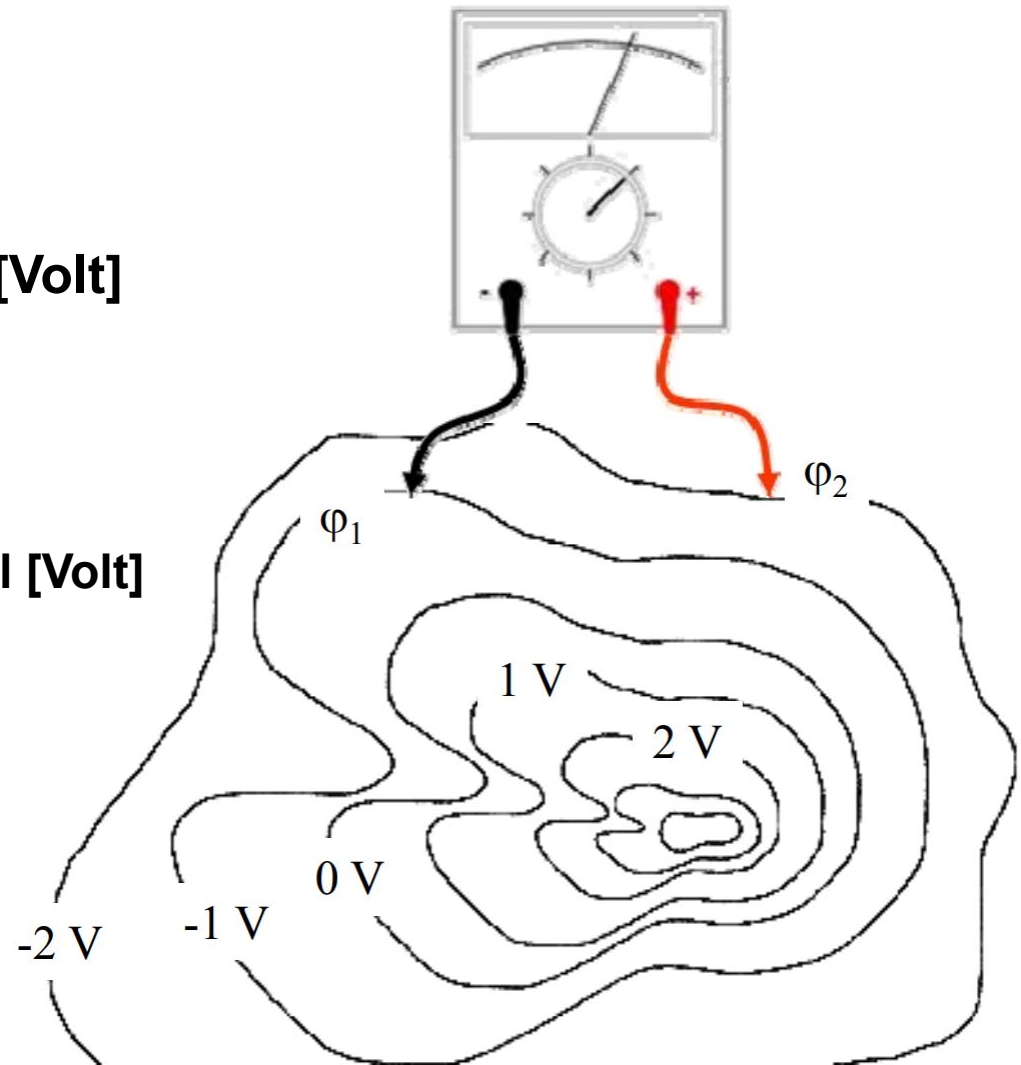
$$\varphi(\vec{r}_b) - \varphi(\vec{r}_a) = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Spannung

$$V = \varphi_2 - \varphi_1$$
$$= \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) \quad [\text{Volt}]$$

elektrostatistisches Potential [Volt]

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$



$$E(x, y, z) = - \left(\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}_{E_x} i + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}_{E_y} j + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}_{E_z} k \right) \quad (4.102)$$

Elektrostatische Potential φ

Gleichung (4.102) kann auch mit dem *Vektoroperator Gradient*

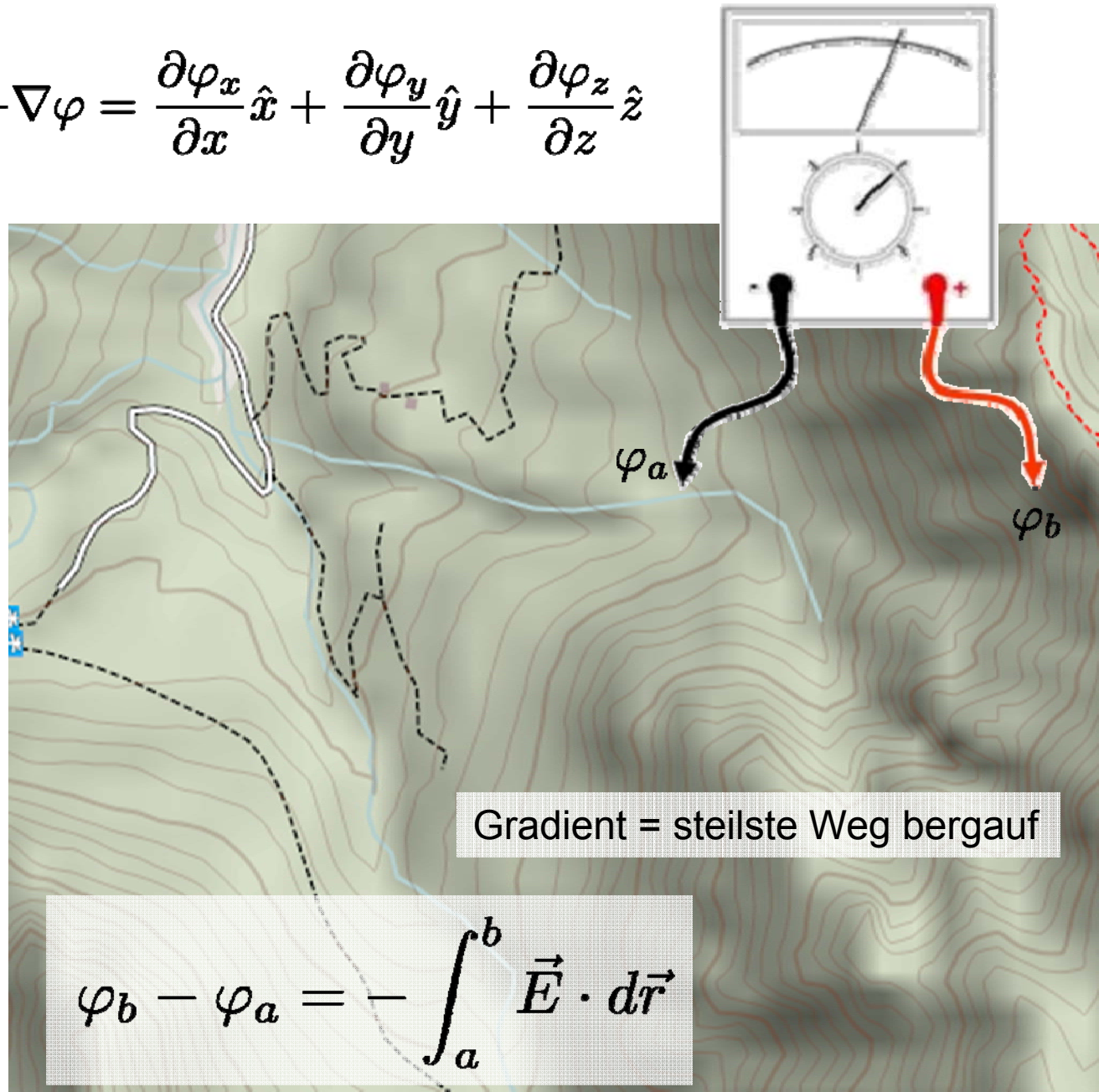
$$\mathbf{grad} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

Hering

formuliert werden:

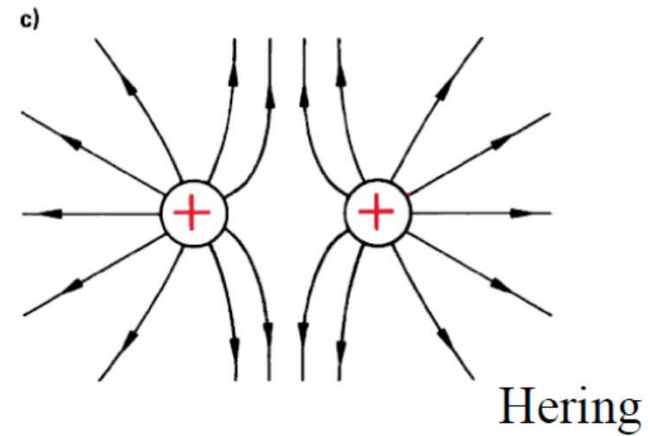
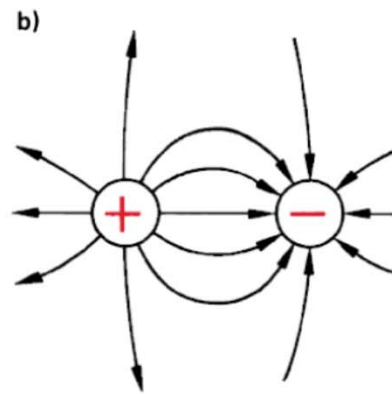
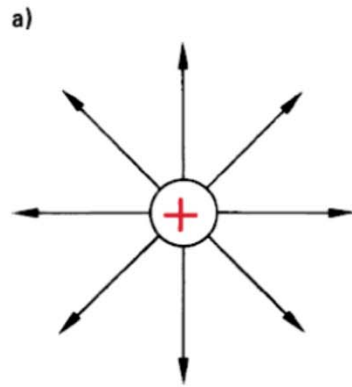
$$E = -\mathbf{grad} \varphi . \quad (4.103)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\varphi_z}{\partial z}\hat{z}$$



upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bb/Neuschwanstein.png

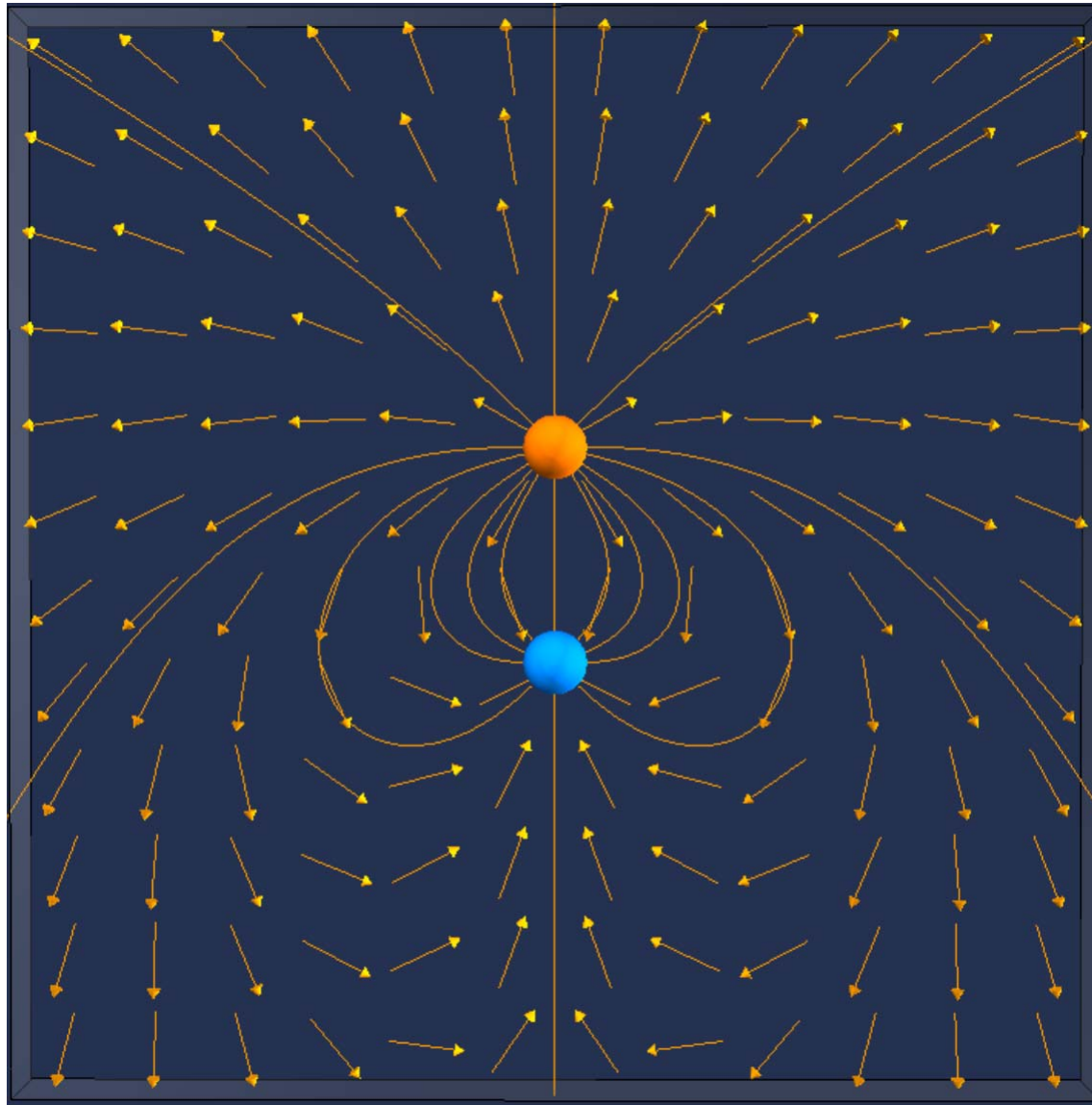
Elektrisches Feld



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

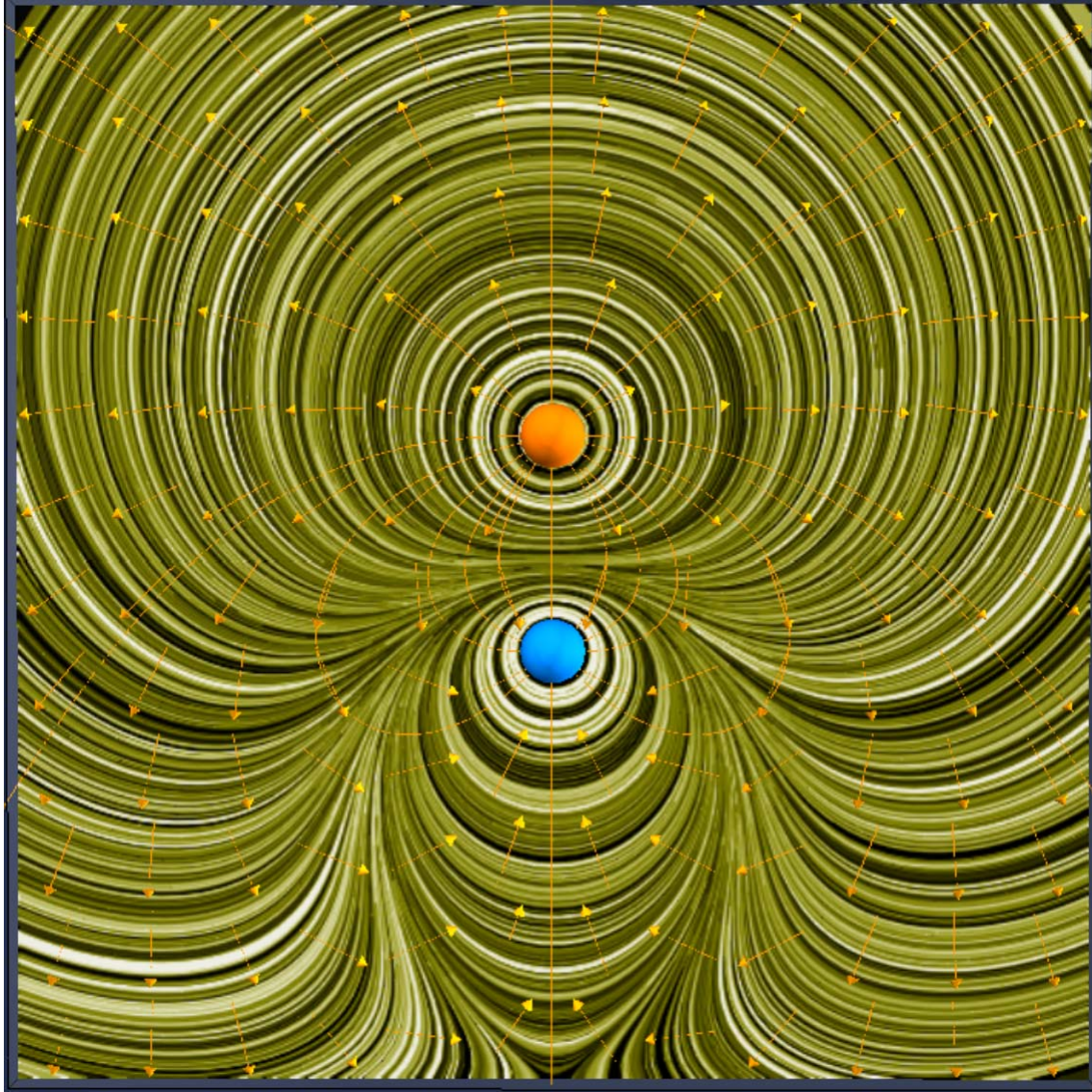
$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$$

Feldlinien und Äquipotentiallinien



<http://public.mtx.mit.edu/gwt-teal/PCcharges.html>

Äquipotentiallinien



<http://public.mtx.mit.edu/gwt-teal/PCcharges.html>

Punktladungsverteilung

Elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Elektrostatisches Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Kraft

$$\vec{F} = q_{\text{test}}\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Elektrostatik

q_i

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

\vec{E}

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r}' + \varphi_0$$

φ

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

Elektrisches Feld einer Punktladungsverteilung

Das elektrostatische Potential φ einer Punktladungsverteilung ist

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|} \text{ [V]}.$$

Dabei sind q_i die Ladungen und $\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$ die Positionen der Punktladungen und $|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$. Die Beziehung zwischen elektrischem Feld und elektrostatischem Potential ist $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \text{ [V/m]}.$$

Im folgenden Formular können Sie Ladungen und Positionen von bis zu 10 Punktladungen angeben. Für diese wird das elektrostatische Potential und das elektrische Feld am Ort \vec{r} berechnet. Der Nullpunkt des Potentials sei sehr weit von allen Ladungen entfernt.

$$\vec{r} = 0 \text{ } \hat{x} + 0.5 \text{ } \hat{y} + 0 \text{ } \hat{z} \text{ [m]}$$

Calculate φ and E at position r

$$\varphi(\vec{r}) = 0.00000 \text{ [V]}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -12861.9 \text{ } \hat{x} + 0.00000 \text{ } \hat{y} + 0.00000 \text{ } \hat{z} \text{ [V/m]}$$

$q_1 =$	<input type="text" value="1E-6"/>	[C]	$\vec{r}_1 =$	<input type="text" value="1"/>	$\hat{x} +$	<input type="text" value="0"/>	$\hat{y} +$	<input type="text" value="0"/>	\hat{z} [m]
$q_2 =$	<input type="text" value="-1E-6"/>	[C]	$\vec{r}_2 =$	<input type="text" value="-1"/>	$\hat{x} +$	<input type="text" value="0"/>	$\hat{y} +$	<input type="text" value="0"/>	\hat{z} [m]
$q_3 =$	<input type="text"/>	[C]	$\vec{r}_3 =$	<input type="text"/>	$\hat{x} +$	<input type="text"/>	$\hat{y} +$	<input type="text"/>	\hat{z} [m]

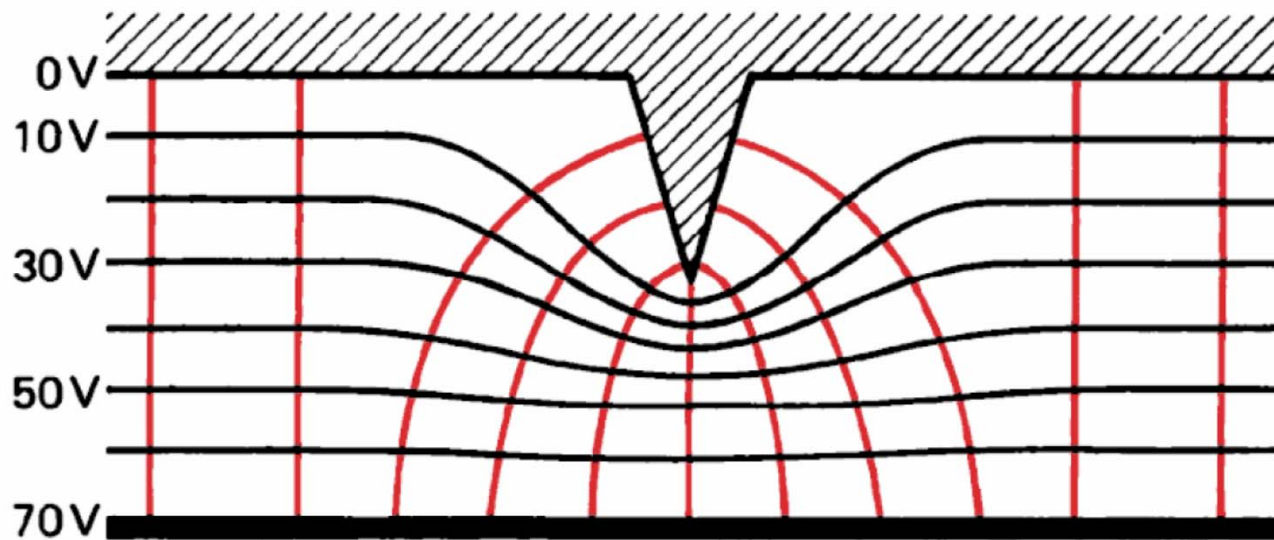
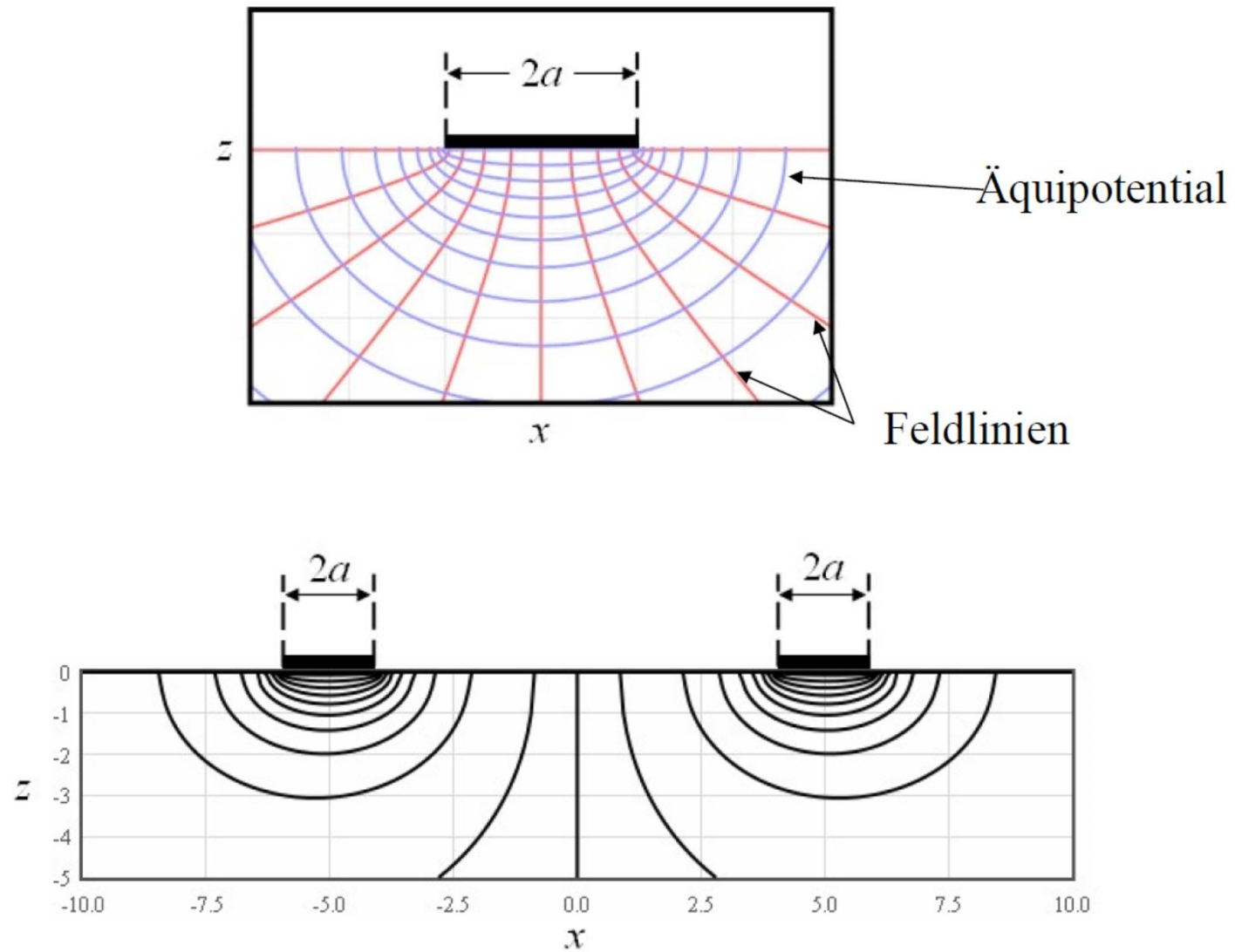


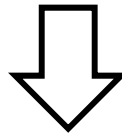
Abb. 4.55 Äquipotentiallinien und elektrische Feldlinien an einer metallischen Spitze

Hering

Feldlinien und Äquipotentiallinien



elektrische Ladungen



- **Verteilung von Ladungen in einem Volumen bzw. einem Volumenelement**
- **als an verschiedenen Orten \vec{r}_i angeheftete Punktladungen q_i oder als Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$**

Elektrisches Feld einer Ladungsverteilung auf einer gekrümmten Linie

Gegeben sei ein Draht der Länge L mit einer uniformen Ladungsdichte λ . Dieser Draht kann in verschiedene Formen gebogen werden. Das elektrostatische Potential φ , welches durch den Draht aufgebaut wird, kann bestimmt werden, indem der Draht in kurze Segmente geteilt wird und Beiträge aller Segmente aufsummiert werden. Die Segmente haben eine Länge Δs und eine Ladung $\Delta q = \lambda \Delta s$. Deren Beitrag zum elektrostatischen Potential an der Position \vec{r} ist:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|} \text{ [V]}.$$

Hier sind $\vec{r}_i = x_i \hat{x} + y_i \hat{y} + z_i \hat{z}$ die Positionen der Punktladungen entlang des Drahts und $|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$. Die Beziehung zwischen elektrischem Feld und elektrostatischem Potential ist $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \text{ [V/m]}$$

Die Lage und Form des Drahtes kann mit einer [parametrischen Gleichung](#) unter Verwendung eines Parameters s , der die Distanz entlang des Drahtes mißt, festgelegt werden. Beispielsweise wird ein gerader Draht von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 beschrieben durch:

$$\vec{r}_{wire} = (r_{1x} + s(r_{2x} - r_{1x}))\hat{x} + (r_{1y} + s(r_{2y} - r_{1y}))\hat{y} + (r_{1z} + s(r_{2z} - r_{1z}))\hat{z} \quad \text{mit } s = [0, 1].$$

Für eine Drahtschleife des Radiuses R in der x - y Ebene an $z = 0$:

$$\vec{r}_{wire} = R \cos(2\pi s)\hat{x} + R \sin(2\pi s)\hat{y} + 0\hat{z} \quad \text{mit } s = [0, 1].$$

Für eine Drahtwendel mit 10 Windungen

$$\vec{r}_{wire} = R \cos(2\pi s)\hat{x} + R \sin(2\pi s)\hat{y} + \frac{s}{n}\hat{z} \quad \text{mit } s = [0, 10],$$

wobei n die Anzahl der Windungen per Meter auf der Wendel ist. Das folgende Formular kann benutzt werden, um das elektrische Feld an der Position \vec{r} zu berechnen.

Ladungsverteilung

$$\sum_i q_i \quad \Longrightarrow \quad \rho(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad \Downarrow$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{vol} \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx' dy' dz'$$

Übersicht

elektrische Ladung ρ

elektrisches Feld \vec{E}

Kraft \vec{F}

elektrostatisches
Potential φ

potentielle
Energie E_{pot}

Gaußsches Gesetz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Divergenz

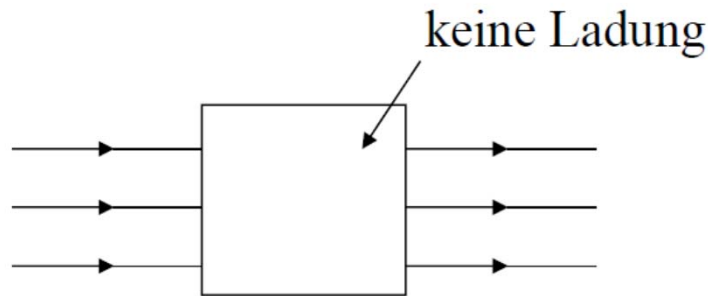
elektrische Feldkonstante

$$8.854187817 \times 10^{-12} \frac{\text{A s}^4}{\text{kg m}^3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Divergenz

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

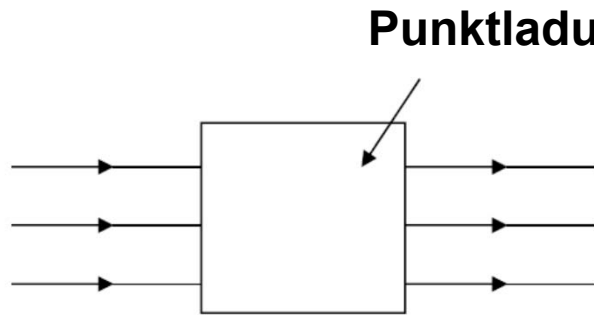


$$\frac{dE_x}{dx} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = 0$$

Divergenz

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

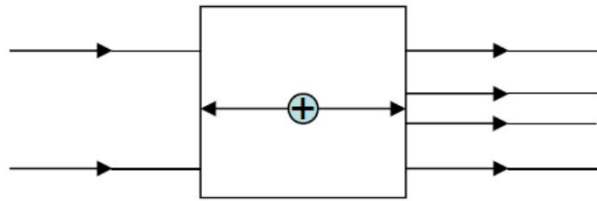


$$\frac{dE_x}{dx} \neq 0$$

$$\iint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \neq 0$$

Divergenz

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$



$$\frac{dE_x}{dx} \neq 0$$

$$\iint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \neq 0$$

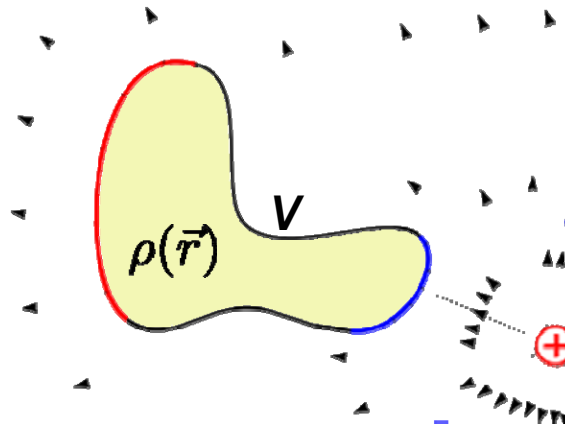
$$\iiint_{\text{vol}} \nabla \cdot \vec{E} \, dx dy dz = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ladung \leftrightarrow elektrisches Feld

in einem Volumen eingeschlossene **Ladungen**:

Divergenz der **elektrischen Feldlinien** ausserhalb des Volumens

Satz von Gauss



Elektrische Feldstärke integriert entlang der Oberfläche, die das Volumen einschliesst,

- gibt Auskunft über die eingeschlossene Ladung
- Ist unabhängig davon, wie Ladung in diesem Volumen verteilt ist