10.

Energie

Leistung

04. Nov. 2019

1.1 Dimensionsanalyse

In bestimmten Problemen muß eine Energie berechnet werden. Mark
oder gar keiner. Die richtigen Antworten sind:

☑ $\frac{1}{\pi^4} F d \cos\left(\frac{3v}{at}\right)$	☑ $\frac{1}{\sqrt{3}} 7mc^2 \exp\left(\frac{eV}{5E}\right)$
☑ $\sqrt[5]{7} k_B T \cos\left(\frac{eV}{7E}\right)$	☑ $\frac{1}{\pi^3} F d \log\left(\frac{at}{7v}\right)$
☑ $\frac{1}{\pi^2} 3\hbar\omega \cosh(8\omega t)$	☐ $\sqrt[5]{3} eV \sinh\left(\frac{5x}{at}\right)$

vorgelegte Antwort:

☑ $\frac{1}{\pi^4} F d \cos\left(\frac{3v}{at}\right)$	☑ $\frac{1}{\sqrt{3}} 7mc^2 \exp\left(\frac{eV}{5E}\right)$
☑ $\sqrt[5]{7} k_B T \cos\left(\frac{eV}{7E}\right)$	☑ $\frac{1}{\pi^3} F d \log\left(\frac{at}{7v}\right)$
☑ $\frac{1}{\pi^2} 3\hbar\omega \cosh(8\omega t)$	☐ $\sqrt[5]{3} eV \sinh\left(\frac{5x}{at}\right)$

1: 1 1 1
2: 1 1 2
3: 1 1 3
4: 1 1 4
5: 1 1 5
6: 0 0 6

Punkte: 1

3.2 Flugbahn eines Teilchens

Ein Teilchen ist zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $\vec{r} = 0$. Die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit t ist gegeben durch,

$$\vec{v}(t) = 4\cos(4t)\hat{x} + 13\sin(13t)\hat{y} \quad [\mathrm{m/s}]$$

Arbeit

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \vec{r}$$

$$W > 0$$

man muss Arbeit verrichten, Bewegung entgegen Kraft

$$W < 0$$

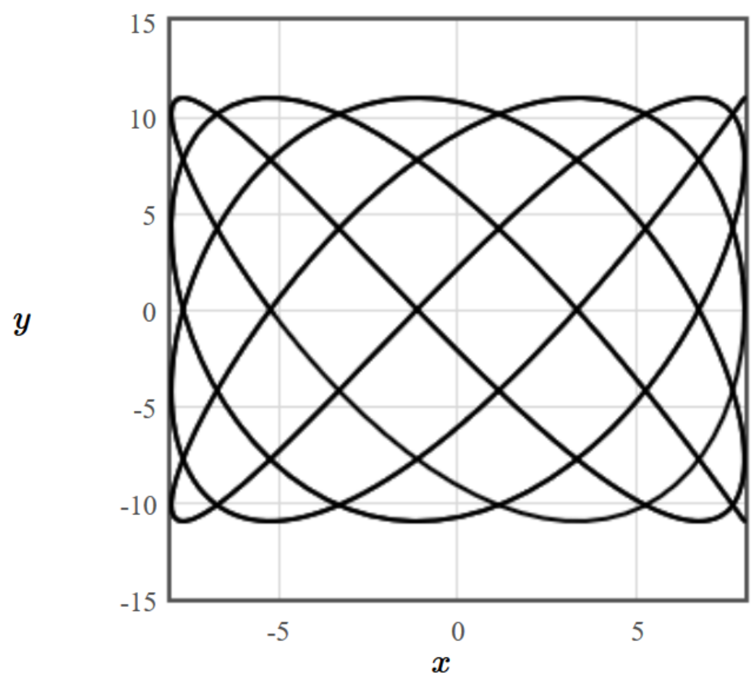
System verrichtet Arbeit, Bewegung in Kraftrichtung orientiert

Kurvenintegral

Zurückgelegter Weg

Ein Käfer krabbelt entlang einer Lissajous-Kurve. Der Ortsvektor in Abhängigkeit der Zeit ist gegeben durch:

$$\vec{r}(t) = 8\cos(8t)\hat{x} + 11\sin(11t)\hat{y} \quad [\mathrm{m}]$$



mit t der Zeit in Sekunden. Berechnen Sie die Entfernung die der Käfer zwischen $t = 0$ und $t = 6$ s zurückgelegt hat.

$d =$ ______ [m] Lösung

$$d = \int_0^6 |\vec{v}| dt.$$

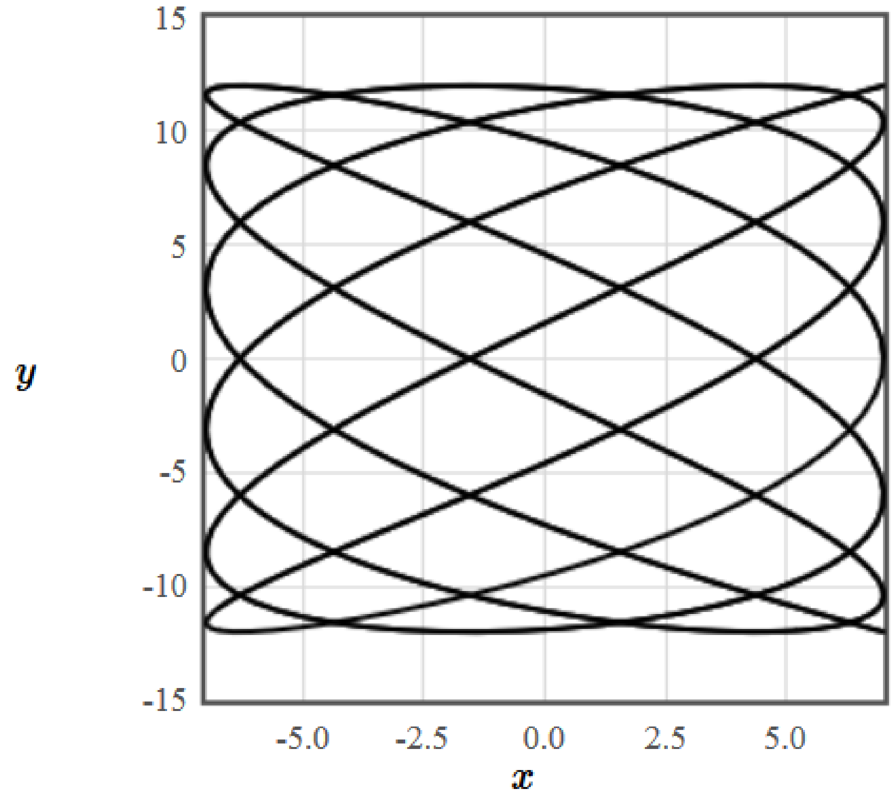
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -64\sin(8t)\hat{x} + 121\cos(11t)\hat{y}.$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-64\sin(8t))^2 + (121\cos(11t))^2}$$

Arbeit gegen eine Reibungskraft(2)

Der Ortsvektor eines Teilchens ist gegeben durch:

$$\vec{r}(t) = 7\cos(12t)\hat{x} + 12\sin(7t)\hat{y} \quad [\mathrm{m}]$$



Mit t der Zeit in Sekunden. Das Teilchen bewegt sich durch eine viskose Flüssigkeit entgegen einer Reibungskraft $\vec{F} = -|\vec{v}|\vec{v}$. Wie groß ist die benötigte Arbeit um das Teilchen zwischen der Zeit $t = 0$ Sekunden und $t = 6$ Sekunden zu bewegen?

$W =$ [J] Lösung

$$\vec{r}(t) = 7\cos(12t)\hat{x} + 12\sin(7t)\hat{y} \qquad 7 \cdot 12 = 84$$

$$\vec{v}(t) =$$

$$\vec{F} = \left|\vec{v}(t)\right|\vec{v}(t) =$$

Die Arbeit ist,

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy.$$

Das Teilchen muss in die der Reibungskraft entgegengesetzten Richtung bewegt werden,

$$W = \int v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dx + \int v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dy.$$

Das Integral wird in ein Integral über die Zeit umgewandelt, $dx = \frac{dx}{dt}\, dt = v_x dt$ and $dy = \frac{dy}{dt}\, dt = v_y dt$,

$$W = \int_0^6 v_x^2 \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt + \int_0^6 v_y^2 \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt.$$

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Ortes,

$$v_x = -84 \sin(12t) \qquad v_y = 84 \cos(7t).$$

$$W = (84)^3 \int_0^6 \left(\sin^2(12t) \sqrt{\sin^2(12t) + \cos^2(7t)} + \cos^2(7t) \sqrt{\sin^2(12t) + \cos^2(7t)} \right) dt.$$

Dieses Integral kann numerisch ausgewertet werden,

$$W = 7868531 \text{ [J]}.$$

Leistung

Maß dafür, in welcher Zeitspanne Arbeit verrichtet wird.

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

bzw:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

SI-Einheit: 1 kg m^2 s^{-3} = 1 Js^{-1} = 1 W (Watt)

Energie

Durch Zufuhr oder Abgabe von Arbeit ändert sich die Energie eines Körpers (die Gesamtenergie eines Systems).

SI-Einheit und Dimension wie Arbeit

$$\Delta E = E_{\text{nachher}} - E_{\text{vorher}} = W$$

Energie

Man kann zwischen Energiearten unterscheiden:

- **potentielle Energie**
- **kinetische Energie**
- **Wärme**
- **….**

Potentielle Energie

Konservative Kraft

Arbeit entlang eines <u>beliebigen</u> Weges ist nur vom <u>Anfangs-</u> und <u>Endpunkt</u> abhängig.

$$\oint_C \vec{F}_{\mathsf{konservativ}} \cdot d\vec{r} = 0$$

Schwerkraft, Coulombkraft, elastische Kraft

Konservative Kraft

nichtkonservative Kräfte:

Reibungskräfte, dissipative Kräfte

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \geq 0$$

konservative Kraft → potentielle Energie

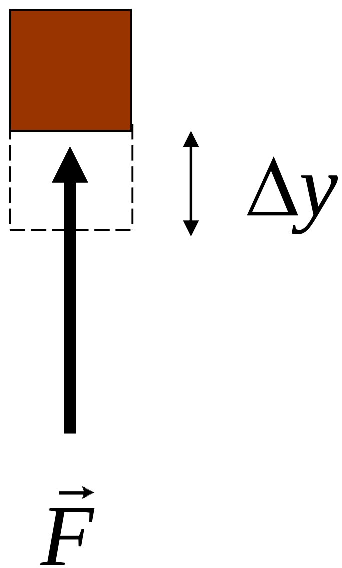
Änderung der potentiellen Energie

$$\Delta E_{pot}(x, y, z) = -W$$

Arbeit der konservativen Kraft

$$-\int_{(1)}^{(2)} \vec{F}_{\text{konservativ}} \cdot d\vec{r}$$

Hubarbeit gegen Gewichtskraft

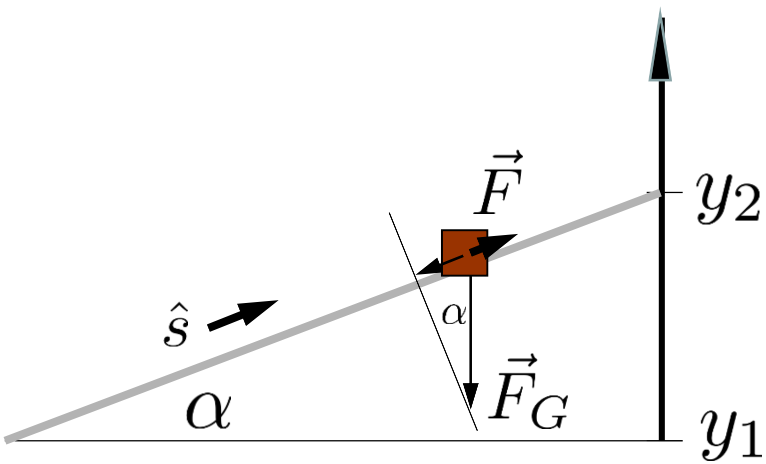


$$\vec{F}_G = -mg\hat{y}$$

$$\Delta E_{pot} = -W$$

Potentielle Energie: $\Delta E_{pot}(x, y, z) = mg\Delta y$

Hubarbeit gegen Gewichtskraft auf schiefer Ebene



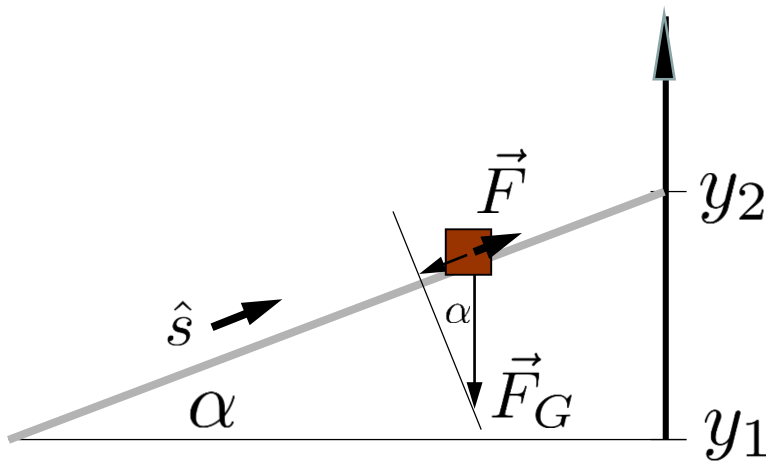
$$W_{12} \quad \textbf{?}$$

$$\vec{F}_G = -mg\hat{y}$$

Notwendige Kraftkomponente, um Körper entgegen der Gewichtskraft anzuheben:

$$\vec{F}_s = |\vec{F}_G| \sin(\alpha) \hat{s}$$

Hubarbeit gegen Gewichtskraft auf schiefer Ebene



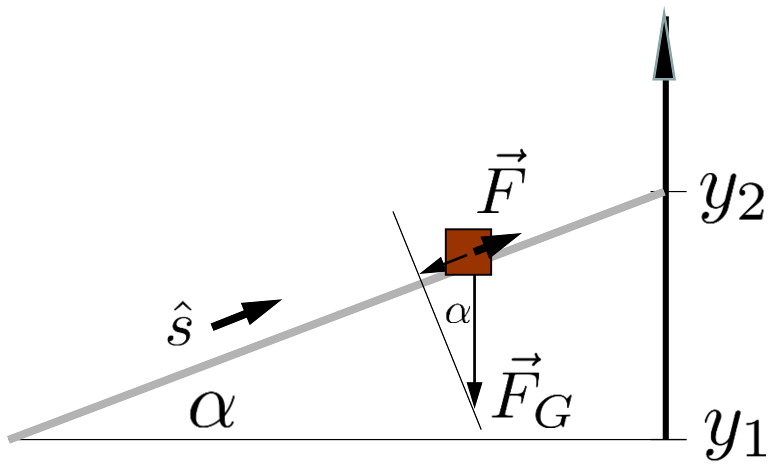
$$\vec{F}_s = |\vec{F}_G| \sin(\alpha) \hat{s}$$

$$\vec{s} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \alpha} \hat{s} = \frac{\Delta y}{\sin \alpha} \hat{s}$$

$$W_{12} = \vec{F}_s \cdot \vec{s} = (|\vec{F}_G| \sin \alpha \hat{s}) \cdot (\frac{\Delta y}{\sin \alpha} \ \hat{s})$$

$$= (mg\Delta y \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha})(\hat{s} \cdot \hat{s}) = mg\Delta y$$

Hubarbeit gegen Gewichtskraft auf schiefer Ebene

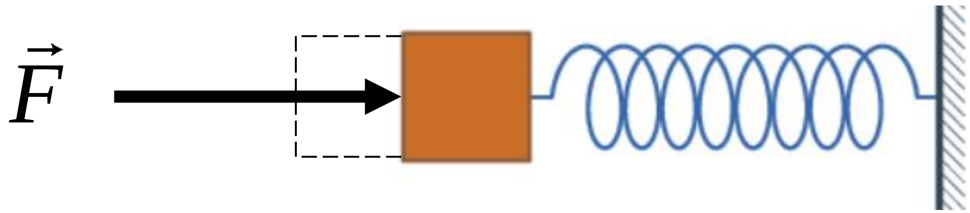


nur von Anfangs- und Endpunkt abhängig

$$W_{12} = -\vec{F}_G \cdot \vec{s} = -\left[\vec{F}_G \cdot d\,\hat{x} + \vec{F}_G \cdot \Delta y\;\hat{y}\right]$$

$$= -(-mg\hat{y} \cdot \Delta y\hat{y}) = mg\Delta y$$

Feder



Hookesches Gesetz: $F(x) = -kx$

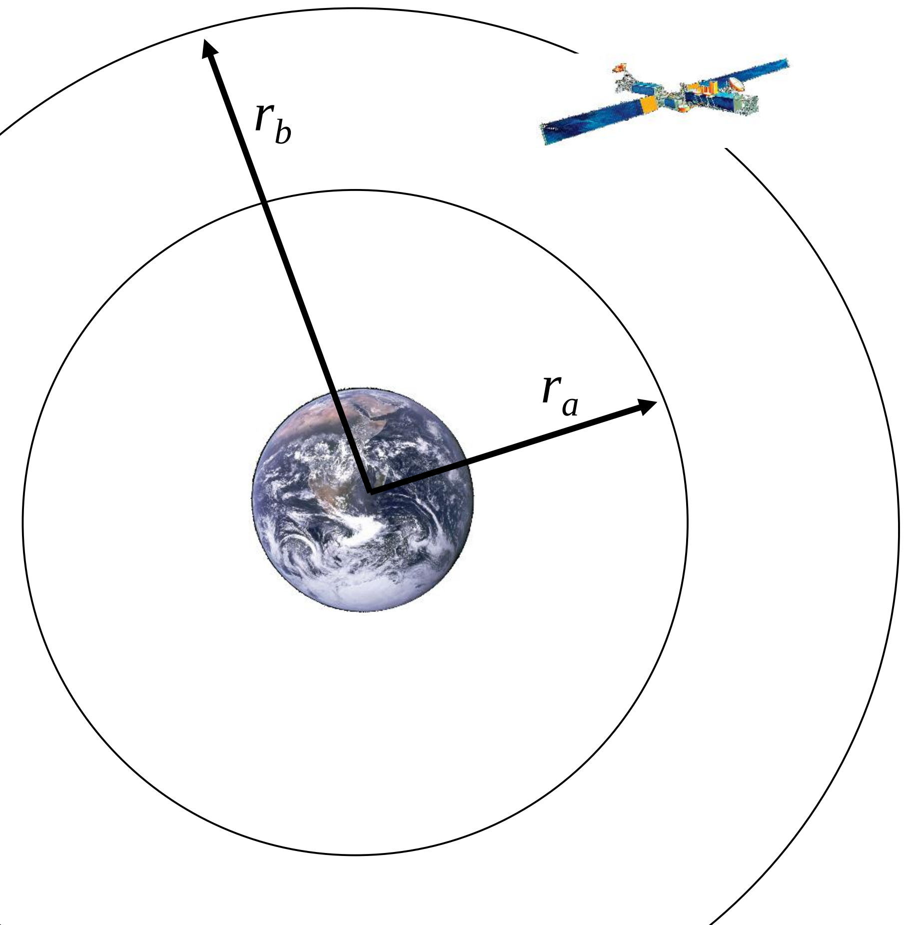
$$W = -\int_0^{x_e} kx\,dx = -\tfrac{1}{2}kx_e^2 \quad [\mathrm{J}]$$

potentielle Energie: $\Delta E_{pot} = \dfrac{kx^2}{2}$

Gravitation

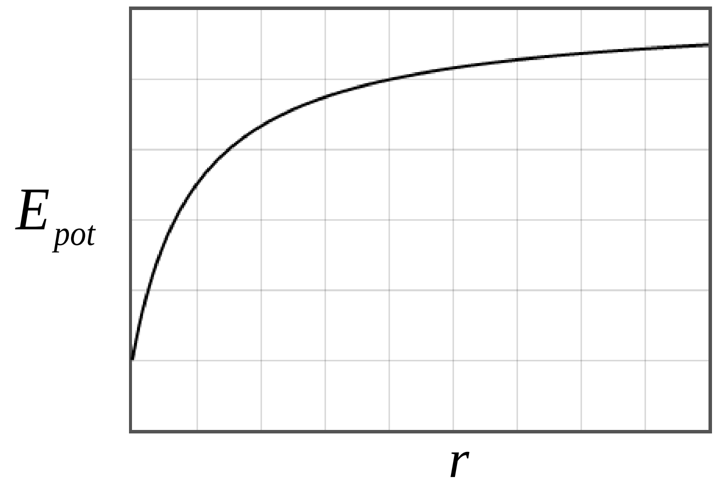
$$\Delta E_{pot}(\vec{r}) = -W$$

$$-W = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{-Gm_1m_2}{r^2}dr = \frac{-Gm_1m_2}{r_b} - \frac{-Gm_1m_2}{r_a}$$



üblicherweise $E_{pot}(r_a = \infty) = 0$

$$E_{pot}(\vec{r}) = \frac{-Gm_1m_2}{|\vec{r}|}$$



konservative Kraft → potentielle Energie

$$E_{pot}(x,y,z) = -W$$

	Kraft	Potentielle Energie
Schwerkraft	$\vec{F} = -mg\ \hat{y}$	$E_{pot}(x,y,z) = mgy$
Feder	$\vec{F} = -kx\ \hat{x}$	$E_{pot}(x,y,z) = \frac{kx^2}{2}$
Gravitation	$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\ \hat{r}$	$E_{pot}(x,y,z) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
Coulomb	$\vec{F} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$	$E_{pot}(x,y,z) = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{m|\vec{v}|^2}{2}$$

$$\Delta E_{kin} = \frac{m(|\vec{v}_{\text{nachher}}|^2 - |\vec{v}_{\text{vorher}}|^2)}{2}$$

Energieerhaltungssatz

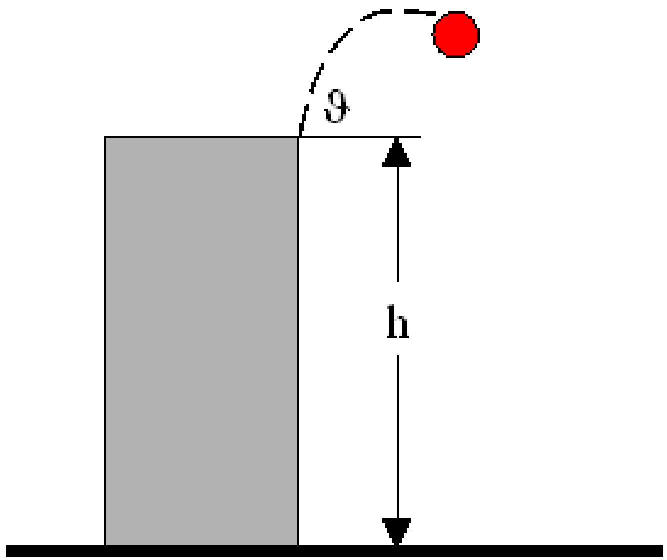
$$\Delta E = 0$$

$$E_{kin,nachher} - E_{kin,vorher} + W = 0$$

konservative Kräfte:

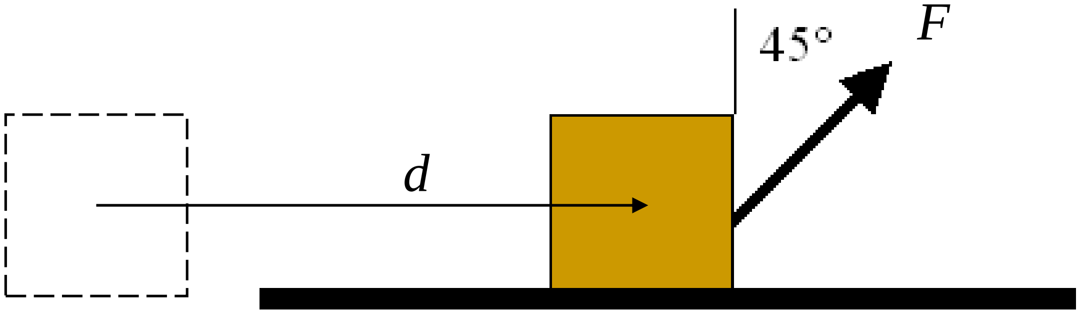
$$E_{pot,nachher} - E_{pot,vorher} + E_{kin,nachher} - E_{kin,vorher} = 0$$

Energieerhaltungssatz



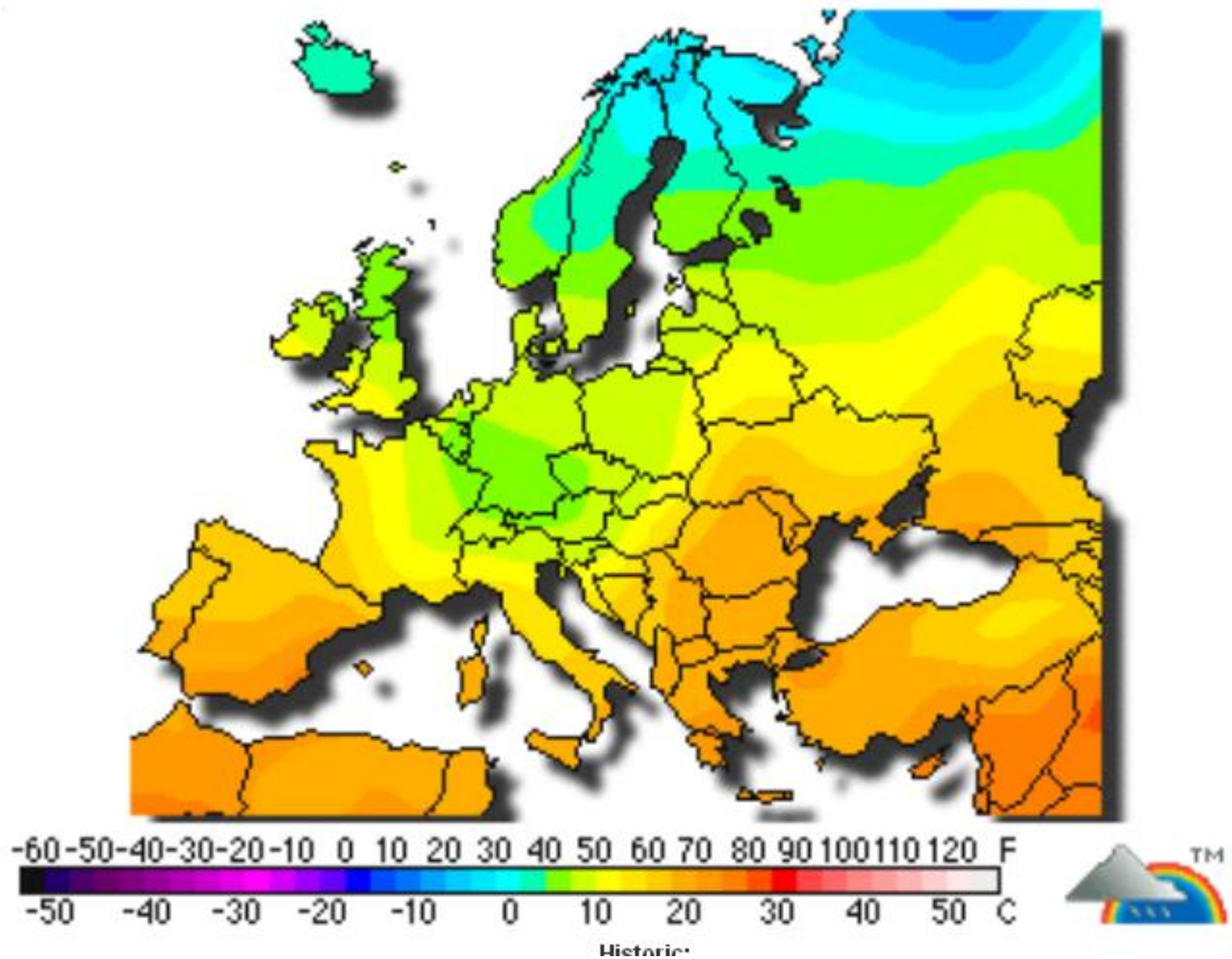
$$|\vec{v}(y=0)|?$$

Energieerhaltungssatz



$$E_{therm}\ ?$$

Skalarfeld



Potentielle Energie ist ein Skalarfeld

Potentielle Energie $\rightarrow$ Kraft

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot}(x, y, z)$$

Gradient: $$\nabla E_{pot} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\hat{z}$$

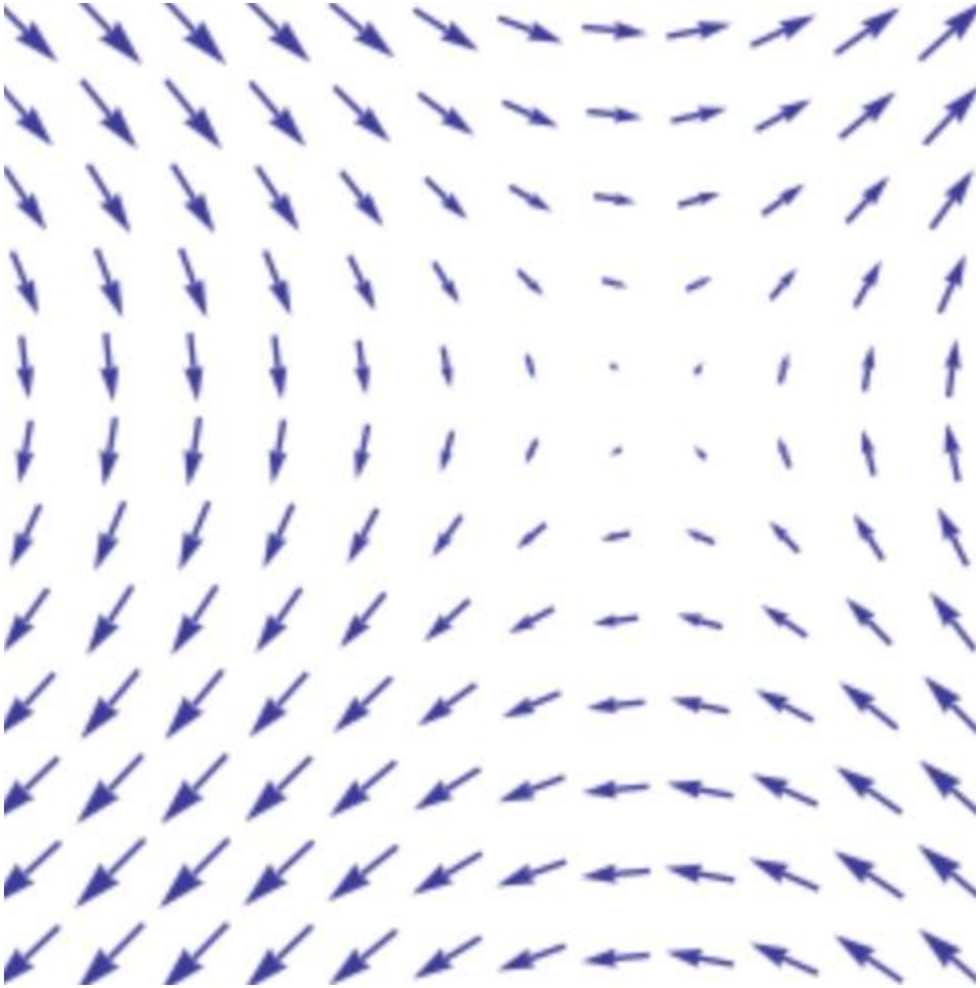
Partielle Ableitung

Potentielle Energie $\rightarrow$ konservative Kraft

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot}(x, y, z)$$

	potentielle Energie	Kraft
Schwerkraft	$E_{pot}(x, y, z) = mgy$	$\vec{F} = -mg\ \hat{y}$
Feder	$E_{pot}(x, y, z) = \frac{kx^2}{2}$	$\vec{F} = -kx\ \hat{x}$
Gravitation	$E_{pot}(x, y, z) = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$	$\vec{F} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}\ \hat{r}$
Coulomb	$E_{pot}(x, y, z) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$

Vektorfeld



Elektrisches Feld, Magnetfeld

Gradient

Der Druck P ist in einem bestimmten Gebiet im Raum durch die folgende Funktion bestimmt:

$$P = 7x^3y^{-9}z^6$$

Berechnen Sie den Gradienten des Drucks!

$\nabla P =$ ____ $\hat{x}$ + ____ $\hat{y}$ + ____ $\hat{z}$ [K/m]

Lösung

$$\nabla P = (21x^2y^{-9}z^6)\hat{x} + (-63x^3y^{-10}z^6)\hat{y} + (42x^3y^{-9}z^5)\hat{z}.$$