10. Arbeit

Potentielle energie

8 Nov. 2019

Aufgaben

Lösungen

1.1 Dimensionsanalyse

Eingeschränkt Nicht verfügbar, es sei denn:

- Zeit genau oder nach **8. November 2019**
- Zeit vor Ende **22. November 2019**

5.1 Strömungswiderstand

Eingeschränkt Nicht verfügbar, es sei denn:

- Zeit genau oder nach **8. November 2019**
- Zeit vor Ende **22. November 2019**

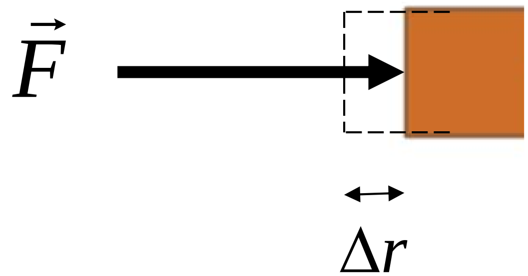
5.2 Bauaufzug

Eingeschränkt Nicht verfügbar, es sei denn:

- Zeit genau oder nach **8. November 2019**
- Zeit vor Ende **22. November 2019**

Arbeit

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \times \text{Abstand}$$



$$\Delta W = F\,\Delta r$$

$$[\text{Nm}] = \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}\right]\text{m} = \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}\right] = \text{J}$$

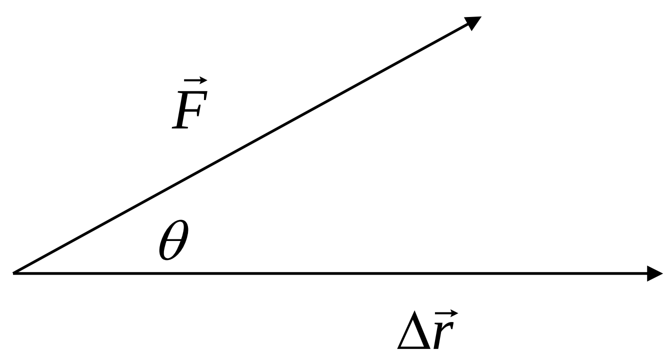
Kinetische Energie: $\frac{1}{2}mv^2 = \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}\right]$

Potentielle Energie: $mg\Delta y = \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}\right]$

Skalarprodukt

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\theta = F_x\Delta r_x + F_y\Delta r_y + F_z\Delta r_z$$



Arbeit

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$\vec{F} = F_x \ \hat{x} + F_y \ \hat{y} + F_z \ \hat{z}$$

$$d\vec{r} = dx \ \hat{x} + dy \ \hat{y} + dz \ \hat{z}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\boxed{W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\left(x, y_1, z_1\right) dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\left(x_2, y, z_1\right) dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\left(x_2, y_2, z_1\right) dz}$$

Benötigte Arbeit um ein Elektron zu bewegen

Welche Arbeit wird benötigt, um ein Elektron von der Position

$$\vec{r}_1 = 7\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

zur Position

$$\vec{r}_2 = 3\hat{x} - 4\hat{y} + 9\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

in einem elektrischen Feld

$$\vec{E} = -2x\hat{x} - 7\hat{y} + 5z^2\hat{z} \quad [\mathrm{V/m}] \text{ zu bewegen?}$$

Die Kraft auf das Elektron lautet $-e\vec{E}$, wobei $-e = -1.6022 \times 10^{-19}$ C die Ladung des Elektrons ist.

$W =$ ______ [J] Lösung

konservative Kraft $\rightarrow$ Potentielle energie

$$\Delta E_{pot}(x, y, z) = -W$$

Numerisches Lösen der Newtonschen Bewegungsgleichung in drei Dimensionen

Ist die Kraft in Abhäigkeit der Position x, y, z, der Geschwindigkeit v_x, v_y, v_z und der Zeit t gegeben, kann die Bewegung des Objekts numerisch durch Integrieren der Differentialgleichungen gewonnen werden, die diese Bewegung beschreiben.

Im folgenden Formular sind F_x, F_y, and F_z die drei Komponenten der Kraft, m die Masse und t die Zeit. Beginnend mit den Anfangsbedingungen werden die Gleichungen schrittweise mit einer Zeitschrittdauer Δt bis zu einer Gesamtzahl von N_{steps} numerisch integriert. Die Kraft kann als Funktion der Position x, y, z, der Geschwindigkeit v_x, v_y, v_z und der Zeit t angegeben werden.

Numerisches Lösen der Bewegungsgleichung in 3-D

$F_x =$ −x [N]

$F_y =$ 0 [N]

$F_z =$ 0 [N]

$m =$ 1 [kg]

Anfangsbedingungen:

$t_0 =$	0	[s]	$\Delta t =$	0.05	[s]
$x(t_0) =$	0	[m]	N_{steps}	500	
$v_x(t_0) =$	1	[m/s]	Plot:	x vs. t	
$y(t_0) =$	0	[m]			
$v_y(t_0) =$	0	[m/s]			
$z(t_0) =$	0	[m]			
$v_z(t_0) =$	0	[m/s]			

Senden

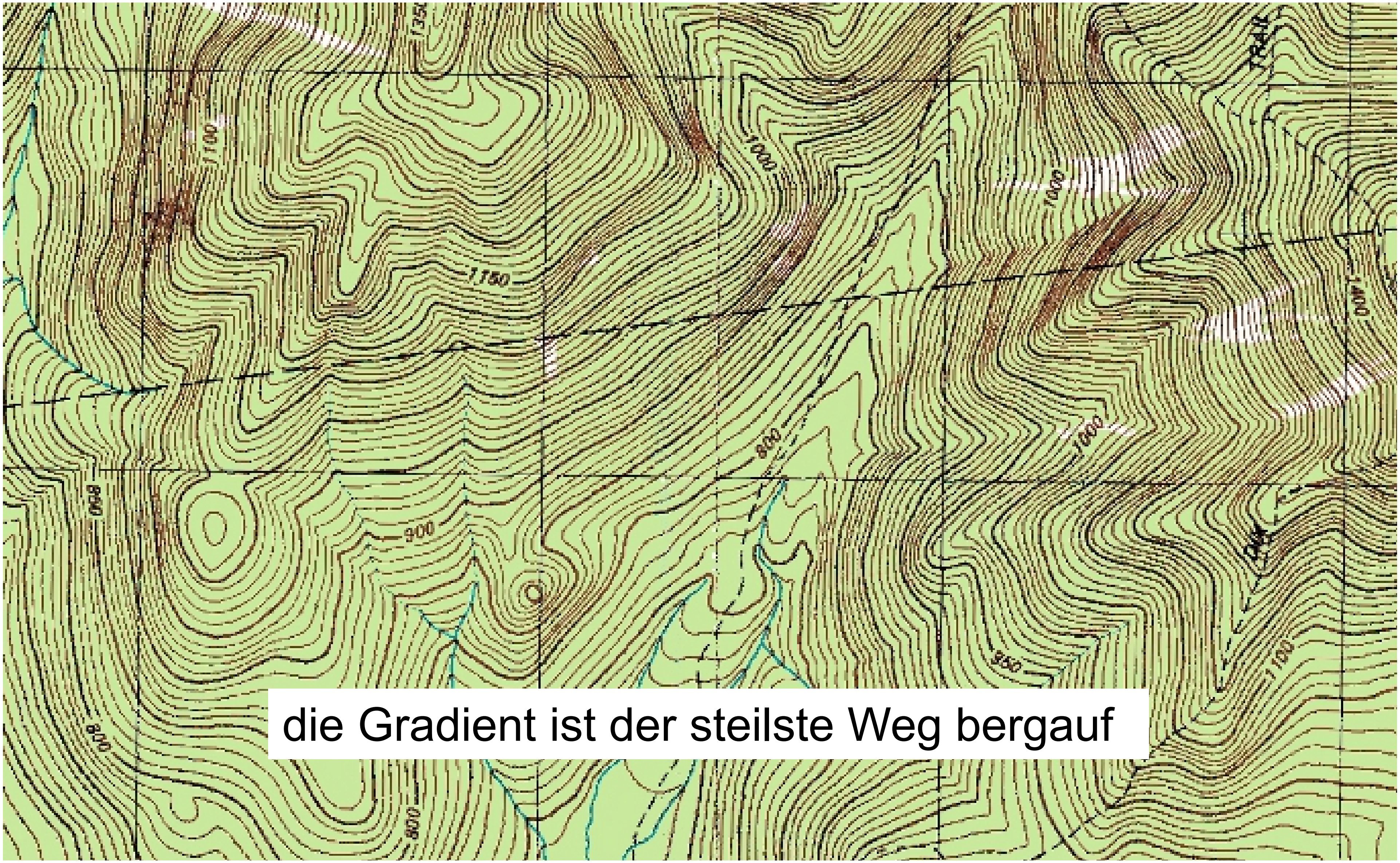
Potentielle energie → Kraft

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot}(x, y, z)$$

Gradient: $$\nabla E_{pot} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\hat{z}$$

Partielle Ableitung

Gradient


1100
1000
1150
900
800
die Gradient ist der steilste Weg bergauf

Potentielle energie → konservative Kraft

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot}(x, y, z)$$

	Potentielle energie	Kraft
Schwerkraft	$E_{pot}(x, y, z) = mgy$	$\vec{F} = -mg\ \hat{y}$
Feder	$E_{pot}(x, y, z) = \dfrac{kx^2}{2}$	$\vec{F} = -kx\ \hat{x}$
Gravitation	$E_{pot}(x, y, z) = -\dfrac{Gm_1m_2}{r}$	$\vec{F} = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\ \hat{r}$
Coulomb	$E_{pot}(x, y, z) = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\vec{F} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$

Potentielle energie $\rightarrow$ konservative Kraft

$$E_{pot}(x, y, z) = mgy \qquad \rightarrow \qquad \vec{F} = -mg\ \hat{y}$$

$$E_{pot}(x, y, z) = \frac{kx^2}{2} \qquad \rightarrow \qquad \vec{F} = -kx\ \hat{x}$$

Potentielle energie $\rightarrow$ konservative Kraft

$$E_{pot}(x,y,z) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \rightarrow \qquad \vec{F} = -\nabla E_{pot} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{r}$$

Konstante Leistung

Der Motor eines Autos kann eine maximale Leistung $P = 91$ kW liefern. Das Auto wiegt 1000 kg. Dieses Auto wird zur Zeit $t = 0$ [s] gestartet und beschleunigt mit maximaler Leistung. Wie schnell bewegt sich das Auto zur Zeit $t = 2$ [s]? Vernachlässigen Sie Reibungskräfte.

$v =$ [m/s] Lösung