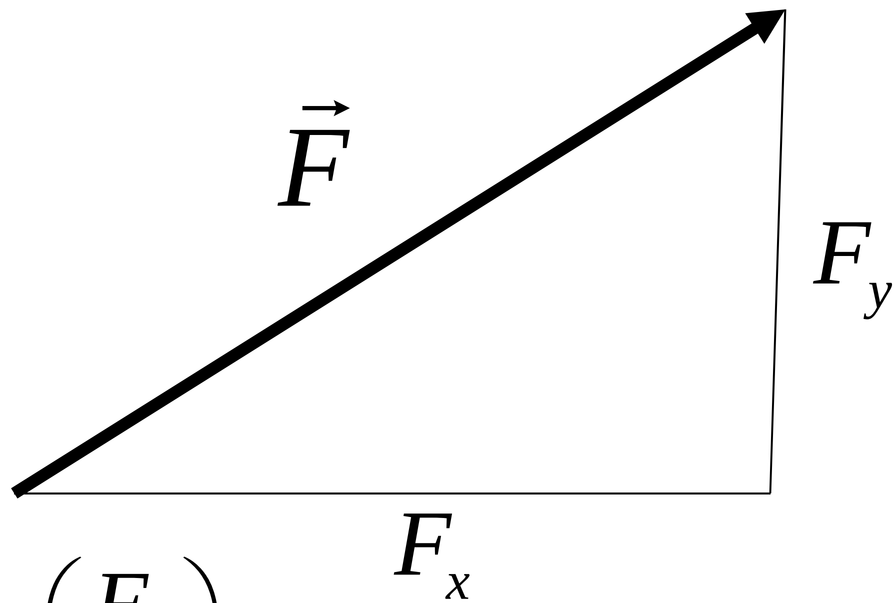
3. Vektoren

11 Okt. 2019

Vektoren

Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung sind Vektoren



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y + F_z \hat{e}_z$$

Hering → $\mathrm{F} = F_x \mathrm{i} + F_y \mathrm{j} + F_z \mathrm{k}$

Fähigkeiten

- Sie müssen in der Lage sein, Einheiten passend umzuwandeln. Zum Beispiel müssen Sie es beherrschen [km/h] in [m/s] umzuwandeln.
- Dimensionsanalyse: Sei m [kg] die Masse, L [m] die Länge, t [s] die Zeit und F [N] die Kraft. Gefragt ist die Geschwindigkeit. Die Ausdrücke $3L/t$ und $\pi\frac{Ft}{m}$ könnten korrekt sein, da sie die Einheit [m/s] haben. Die Ausdrücke $3Lt$ und $\pi\frac{F}{m}$ müssen falsch sein, da sie nicht die Einheit [m/s] haben. Beim Ableiten eines Ausdrucks sollten Sie also immer auf die Einheiten achten. Sind die Einheiten falsch, haben Sie einen Fehler gemacht.

Fähigkeiten

Vektoren

Sie müssen in der Lage sein:

- zwei Vektoren zu addieren $\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}$;
- die Länge eines Vektors zu bestimmen, $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$;
- den Einheitsvektor, der in die Richtung des ursprünglichen Vektors zeigt, zu bestimmen, $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$;
- den Vektor in seine x-, y-, und z-Komponenten zu zerlegen;
- das innere Produkt zweier Vektoren zu berechnen, $\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$;
- das Kreuzprodukt zweier Vektoren zu berechnen, $\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z}$.

App: Alles über die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$

Einheitsvektoren

Wie lautet der Einheitsvektor, welcher von dieser Position

$$\vec{r}_1 = -2\hat{x} + 2\hat{y} + 5\hat{z} \quad [\text{m}],$$

zu dieser Position zeigt:

$$\vec{r}_2 = 2\hat{x} + 4\hat{y} - 2\hat{z} \quad [\text{m}]?$$

$\hat{r}_{1\rightarrow 2} =$ ____ $\hat{x} +$ ____ $\hat{y} +$ ____ $\hat{z}$ Senden

Alles über die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$

$\vec{A} =$ 1 2 3 $\quad \vec{B} =$ -1 3 -5

Auskunft ueber A und B

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Die Länge von $\vec{A}$ ist $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2} = 3.7416574.$

Die Länge von $\vec{B}$ ist $\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-5)^2} = 5.9160798.$

Das innere Produkt (auch Skalarprodukt genannt) von $\vec{A}$ und $\vec{B}$ ist

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (1)(-1) + (2)(3) + (3)(-5) = -10.$$

Hier ist θ der Winkel zwischen den beiden Vektoren.

Kraft zwischen zwei Elektronen

Die elektrostatische Kraft, die auf Elektron 1 aufgrund der Ladung von Elektron 2 wirkt, ist durch das Coulombkraft Gesetz gegeben:

$$\vec{F} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\,\hat{r}_{2\to 1} \quad [\mathrm{N}]$$

Dabei ist $e = 1.6022\times10^{-19}$ C die Elementarladung, $\epsilon_0 = 8.854\times10^{-12}$ F/m ist die elektrische Feldkonstante und $\hat{r}_{2\to 1}$ ist der Einheitsvektor, der von Elektron 2 auf das Elektron 1 zeigt.

Elektron 1 ist an der Position

$$\vec{r}_1 = 3\hat{x} + 3\hat{y} - 3\hat{z} \quad [\mathrm{nm}],$$

und Elektron 2 an der Position

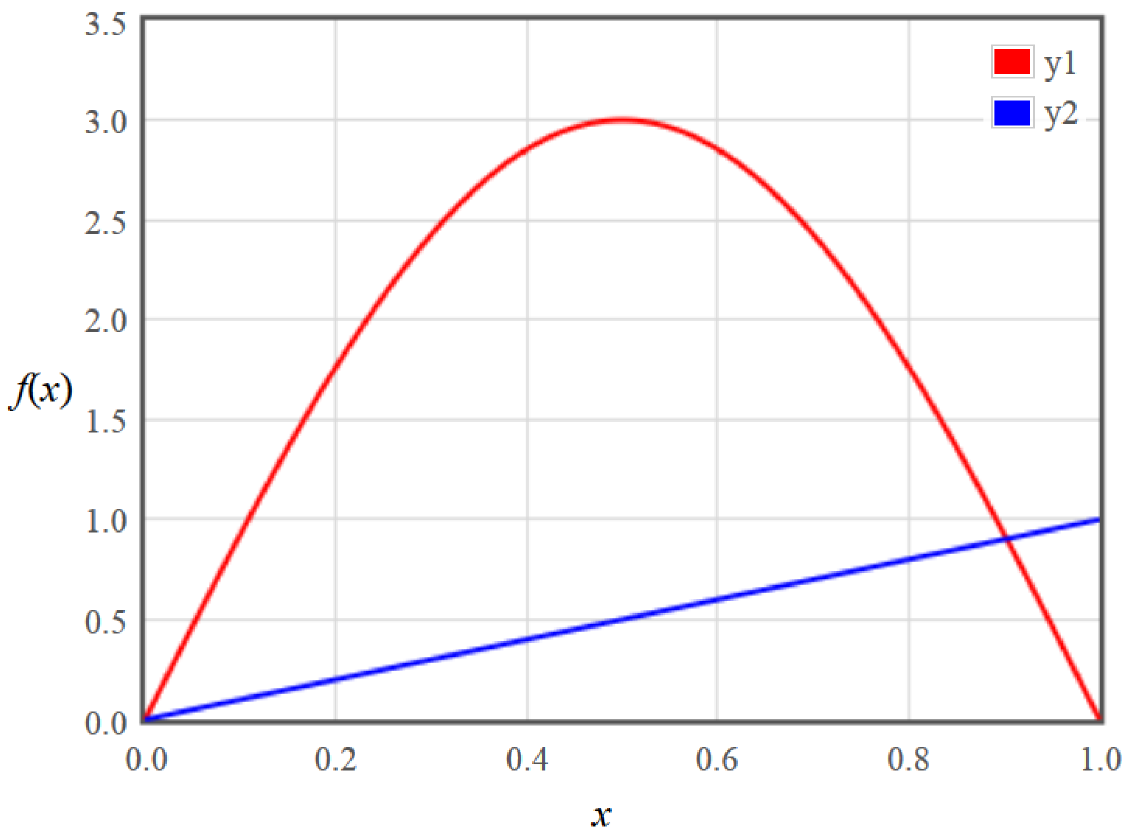
$$\vec{r}_2 = 2\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z} \quad [\mathrm{nm}].$$

Welche Kraft wirkt auf Elektron 1?

$\vec{F} =$ [ ] $\hat{x} +$ [ ] $\hat{y} +$ [ ] $\hat{z}$ [N] Lösung

Graphische Lösungen

Eine Gleichung der Form $y_1(x) = y_2(x)$ kann graphisch gelöst werden durch das Auftragen von $y_1(x)$ und $y_2(x)$ in einem gemeinsamen Diagramm. Die Lösungen sind die Punkte, an denen sich die beiden Kurven schneiden. Durch Vergrößern des Bereichs um den Schnittpunkt kann die Lösung mit vertretbarer Genauigkeit bestimmt werden.



$y_1(x) =$ 3*sin(pi*x)

$y_2(x) =$ x

Plot from $x =$ 0 to $x =$ 1.