

4.

Punktmechanik

Bewegung als Folge von Krafteinwirkung

Was bewirkt die Überlagerung von Kräften?

Bewegungsbeschreibung

Punktmechanik

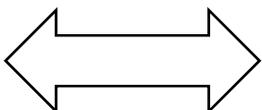
Ort

Geschwindigkeit

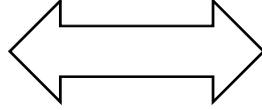
Beschleunigung

Kraft

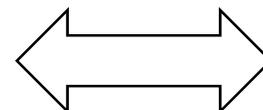
\vec{r}



\vec{v}



\vec{a}

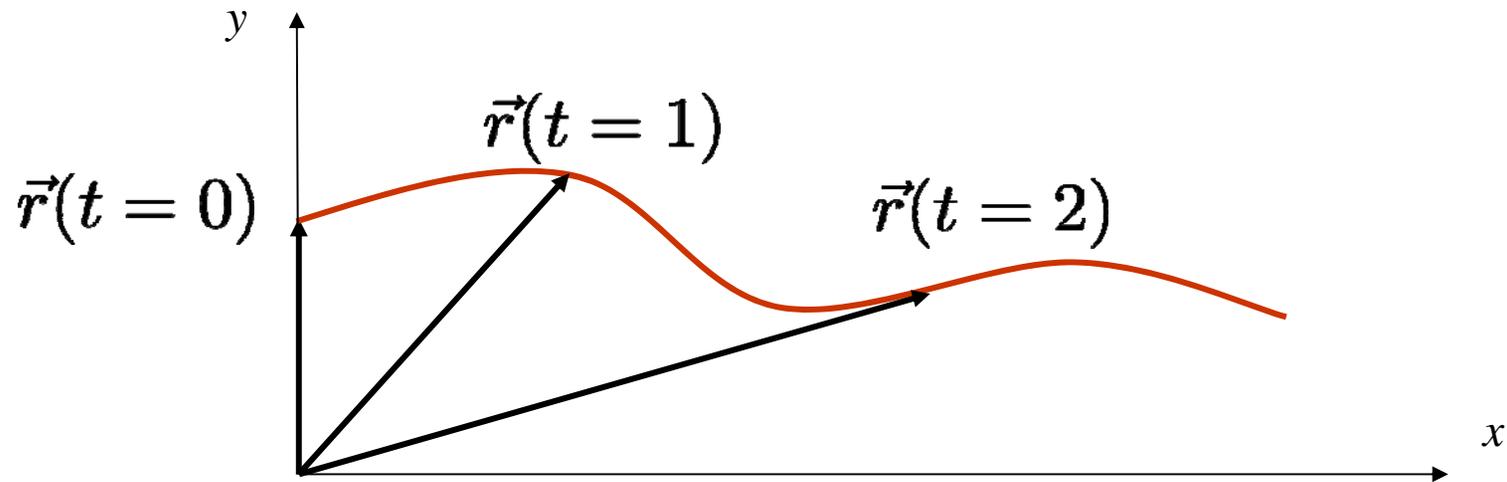


\vec{F}

Bewegungsbeschreibung

Newtonsche Axiome

Ortsvektor \vec{r}

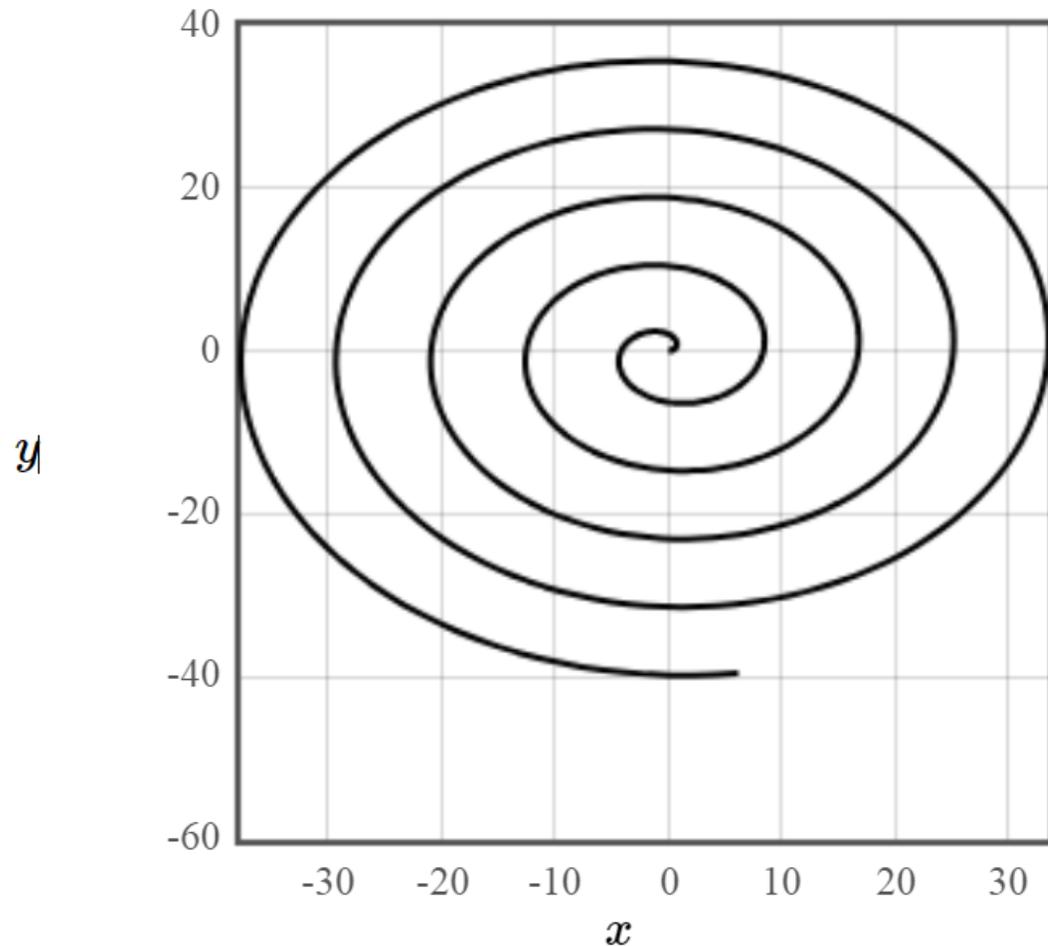


$$\vec{r}(t) = r_x(t)\hat{x} + r_y(t)\hat{y} + r_z(t)\hat{z} \quad [m]$$

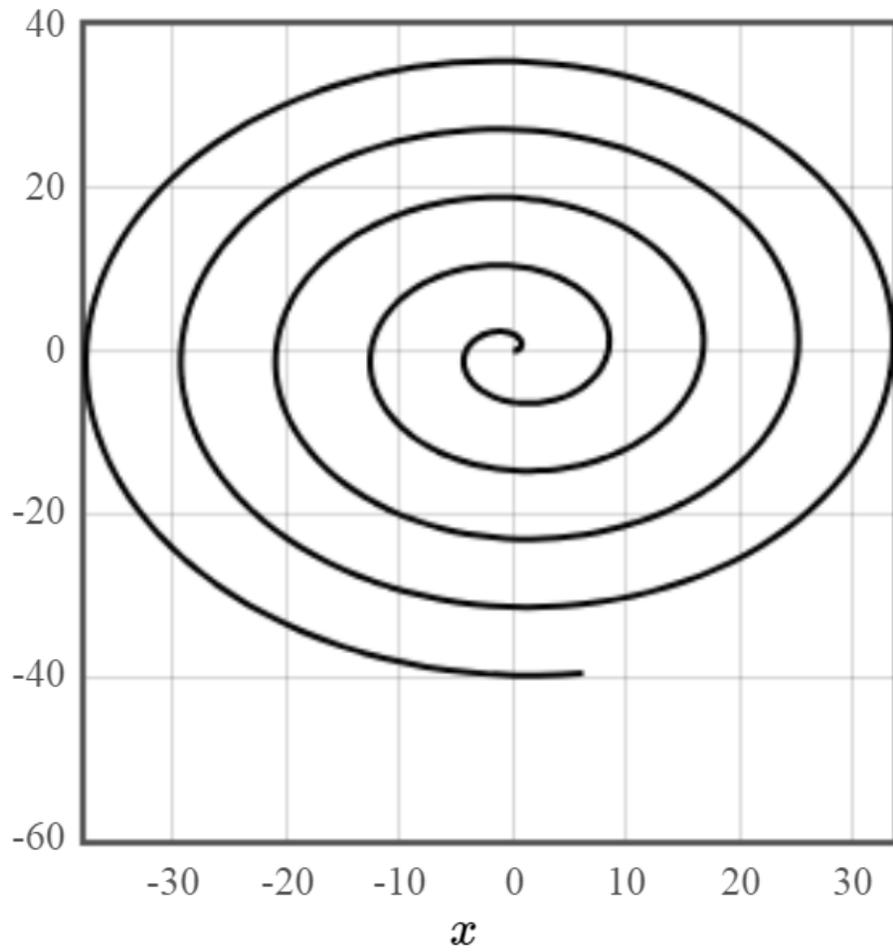
Position des Körpers: per Vereinbarung die Position des Schwerpunkts

Ein Käfer krabbelt spiralförmig entlang des Ortsvektors $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = 4t \cos(3t) \hat{x} + \underline{4t \sin(3t)} \hat{y} \quad [\text{m}]$$

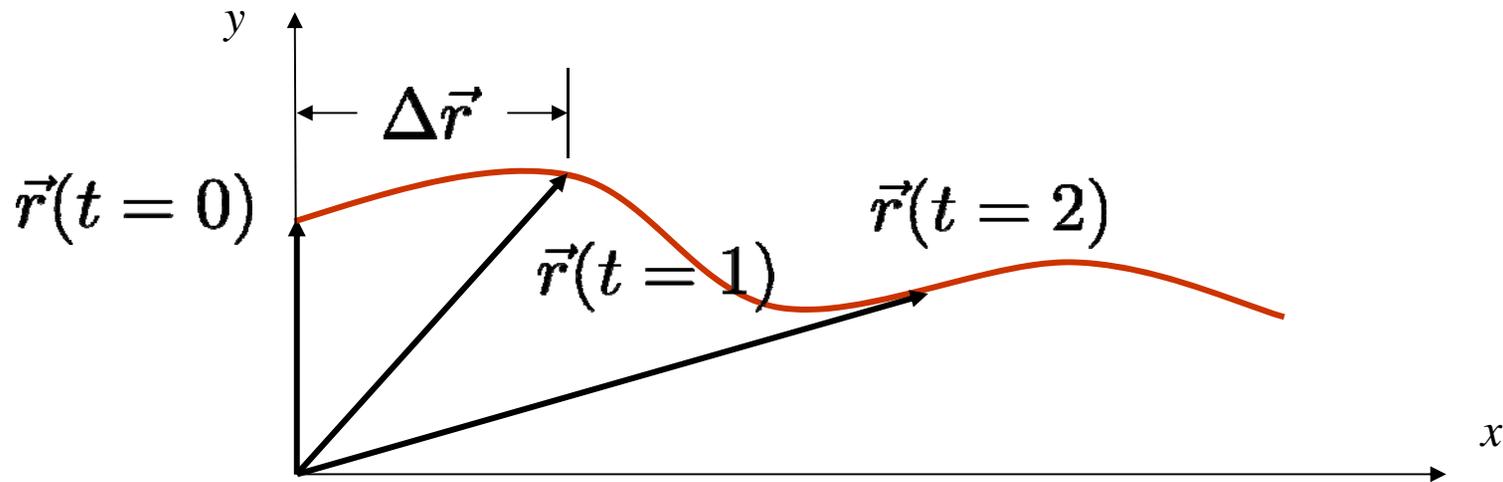


mit t der Zeit in Sekunden. Zu welchem Zeitpunkt die Entfernung des Käfers vom Ursprung gleich $|\vec{r}(t)| = 5 \text{ m}$?



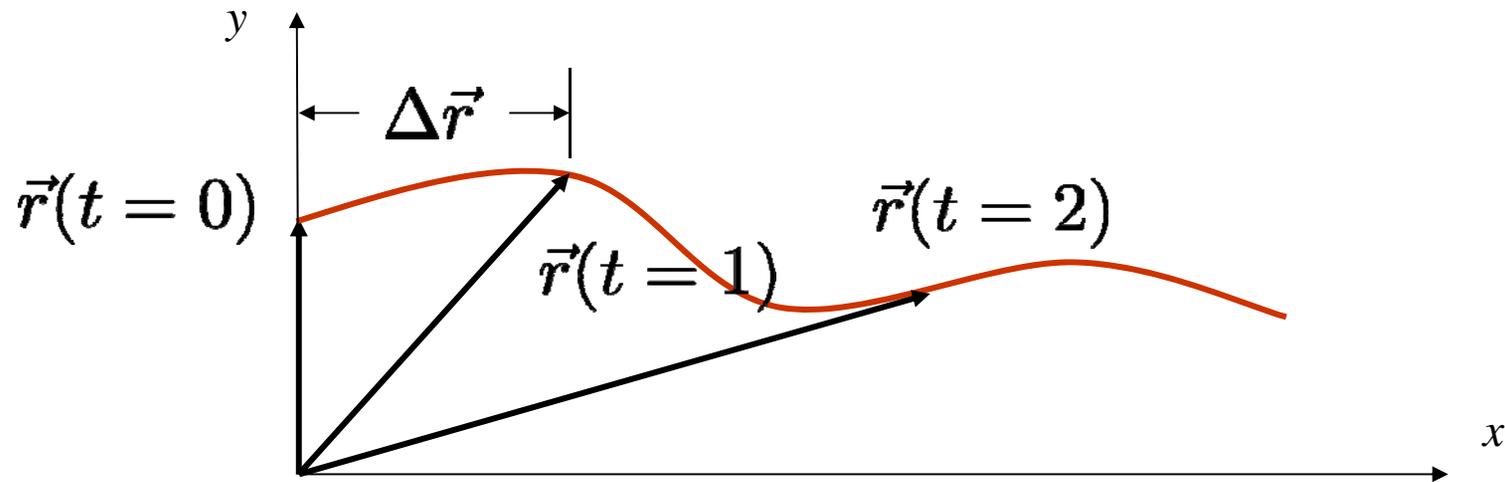
$$\vec{r}(t) = 4t \cos(3t) \hat{x} + 4t \sin(3t) \hat{y} \quad [\text{m}]$$

Geschwindigkeit \vec{v}



$$\vec{v} \approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \Delta r_x / \Delta t \\ \Delta r_y / \Delta t \\ \Delta r_z / \Delta t \end{pmatrix} \quad [m/s]$$

Geschwindigkeit \vec{v}



$$\vec{v} \approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad [m/s]$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad [m/s]$$

Ableitung (Schreibweise)

Leibniz: $\frac{df}{dx}$ $\frac{dg}{dt}$ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dx}{dt}$ $\frac{dy}{dt}$ $\frac{dz}{dt}$

Lagrange: f' g'

Euler: $D_x f$ $D_t y$

Newton: \dot{x} \dot{y} **ausschliesslich bezüglich der Zeit**

Ableitung (Schreibweise)

Beispiel:

$$f(x) = x^2 \qquad \frac{df}{dx} = 2x$$

$$v(x, a) = ax^3$$

$$\frac{dv}{da} =$$

Ableitung (Schreibweise)

Vektoren: komponentenweise ableiten

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} \quad \frac{d\vec{\phi}}{dp} = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_x}{dp} \\ \frac{d\phi_y}{dp} \\ \frac{d\phi_z}{dp} \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit \vec{v}

Ableitung des Ortes bezüglich jeder Komponente:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{pmatrix}$$

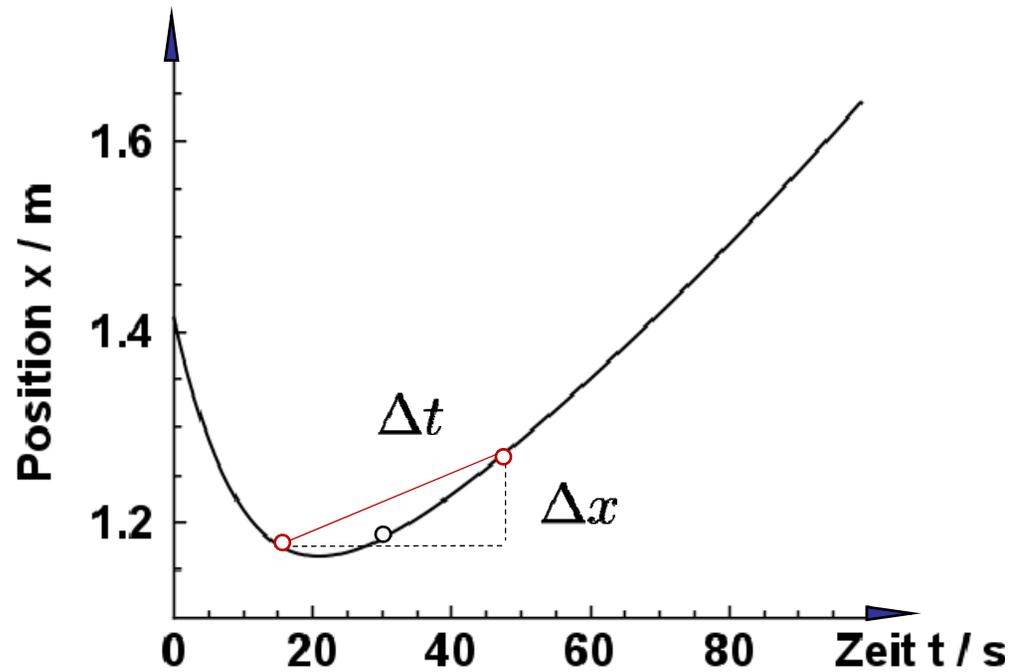
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dr_x}{dt} \\ \frac{dr_y}{dt} \\ \frac{dr_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{pmatrix}$$

Leibniz

für Zeitableitung: Newton

**Geschwindigkeit =
Steigung in einem
Ort-Zeit Diagramm**

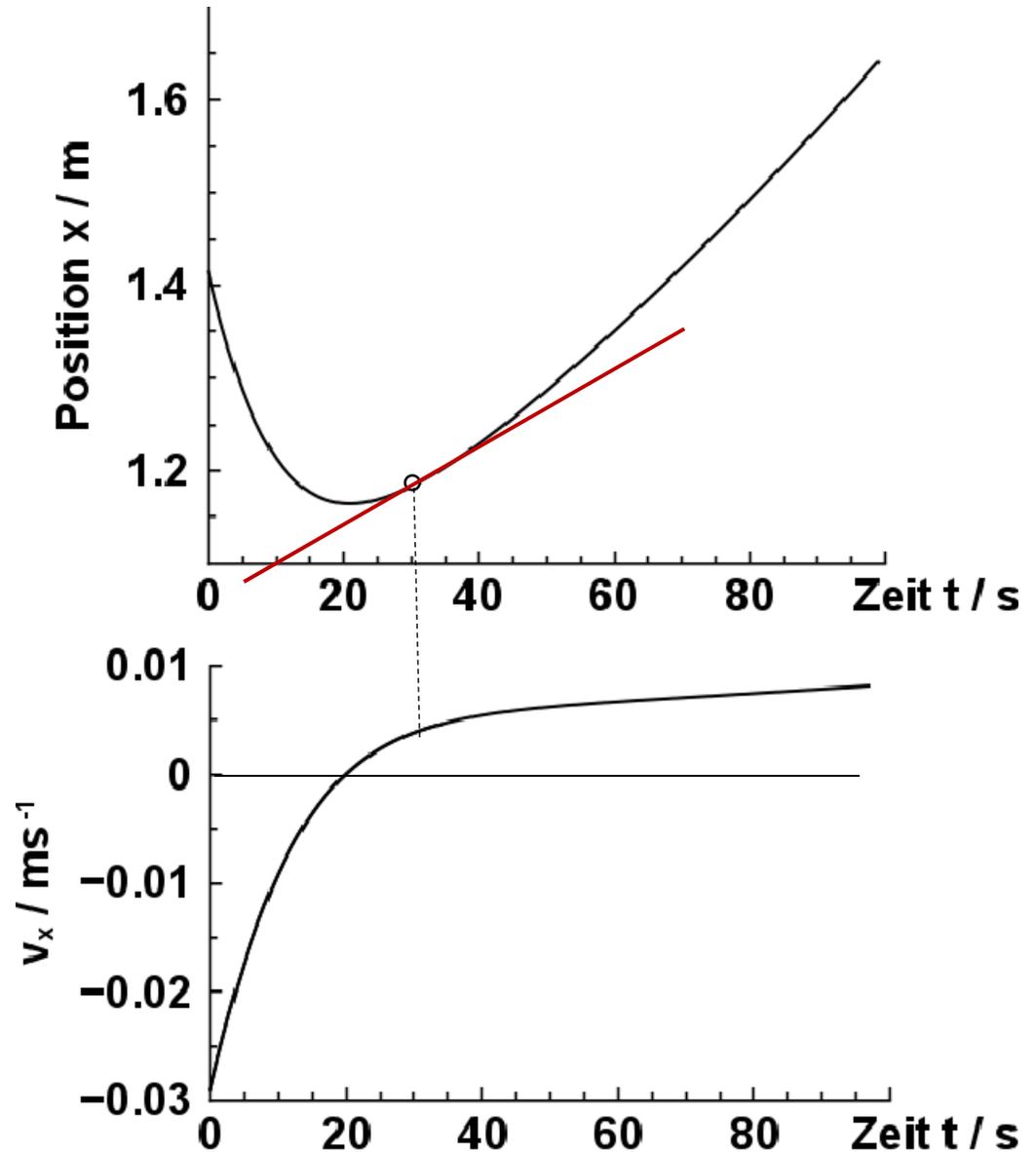
$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



**Geschwindigkeit =
Steigung in einem
Ort-Zeit Diagramm**

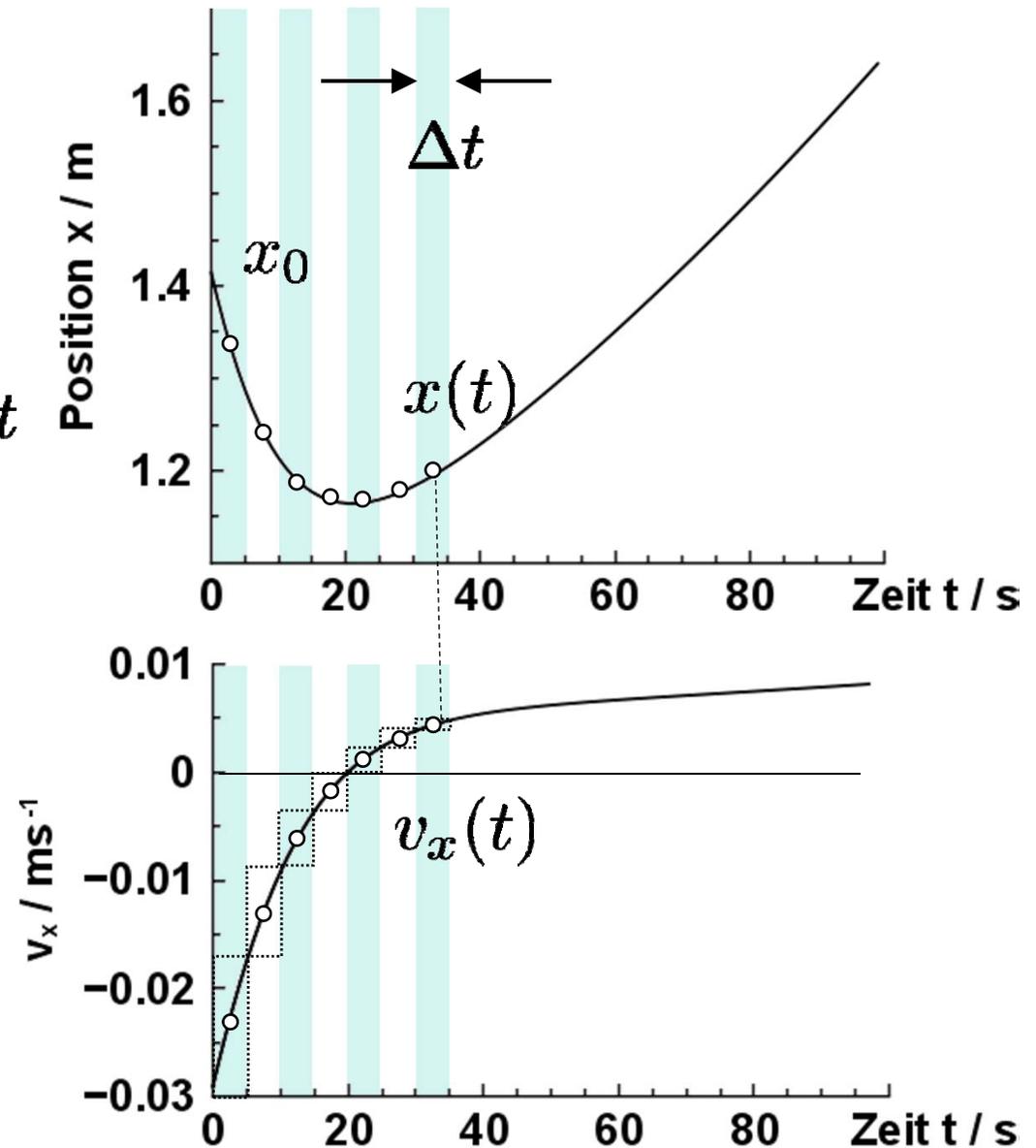
$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$v_x(t)$ an $t = 32s$



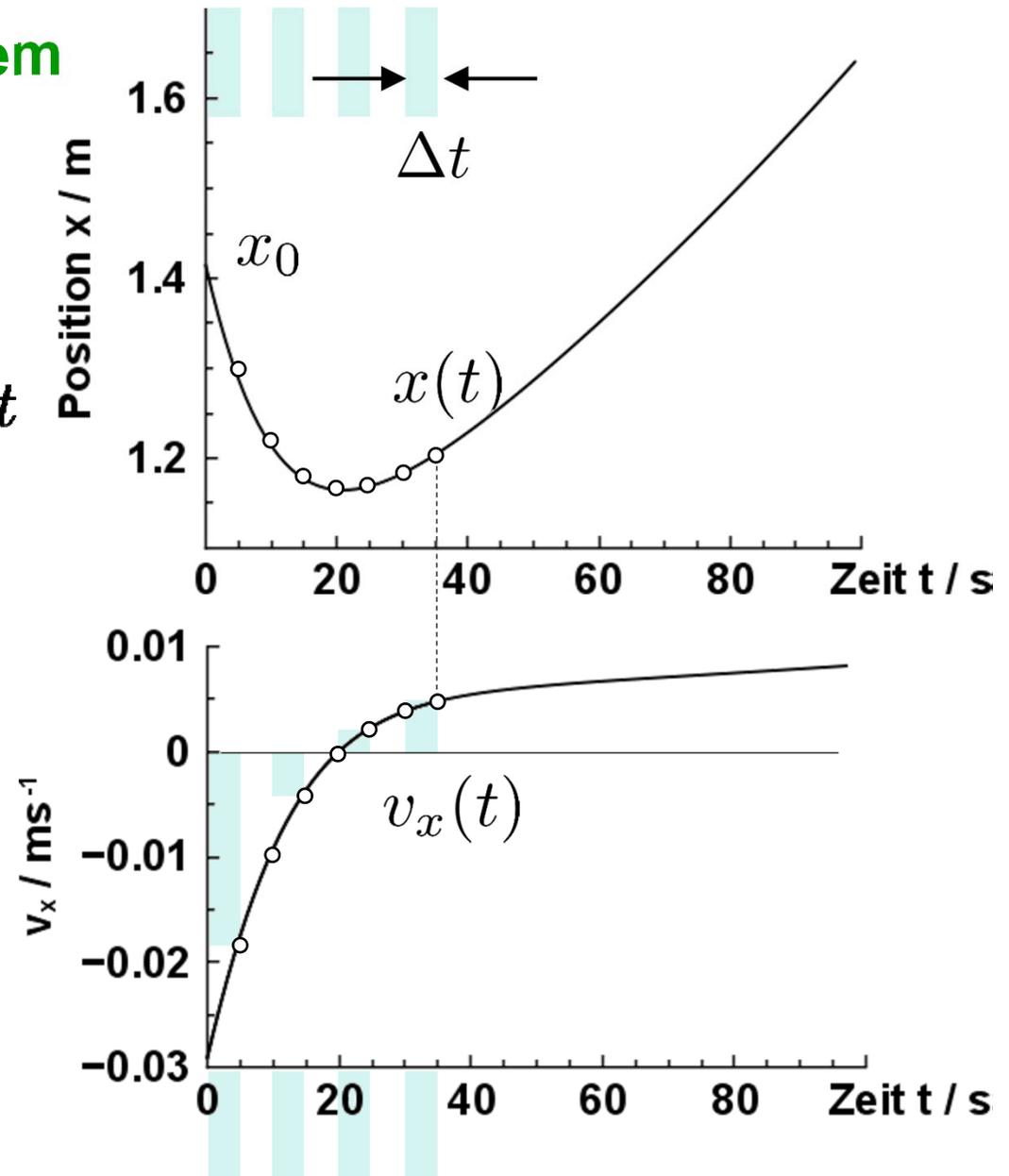
**Geschwindigkeit =
Steigung in einem
Ort-Zeit Diagramm**

$$x(t) \approx x_0 + \sum_i v_x(t) \Delta t$$



**Position = Fläche in einem
Geschwindigkeits-Zeit
Diagramm**

$$x(t) \approx x_0 + \sum_i v_x(t) \Delta t$$

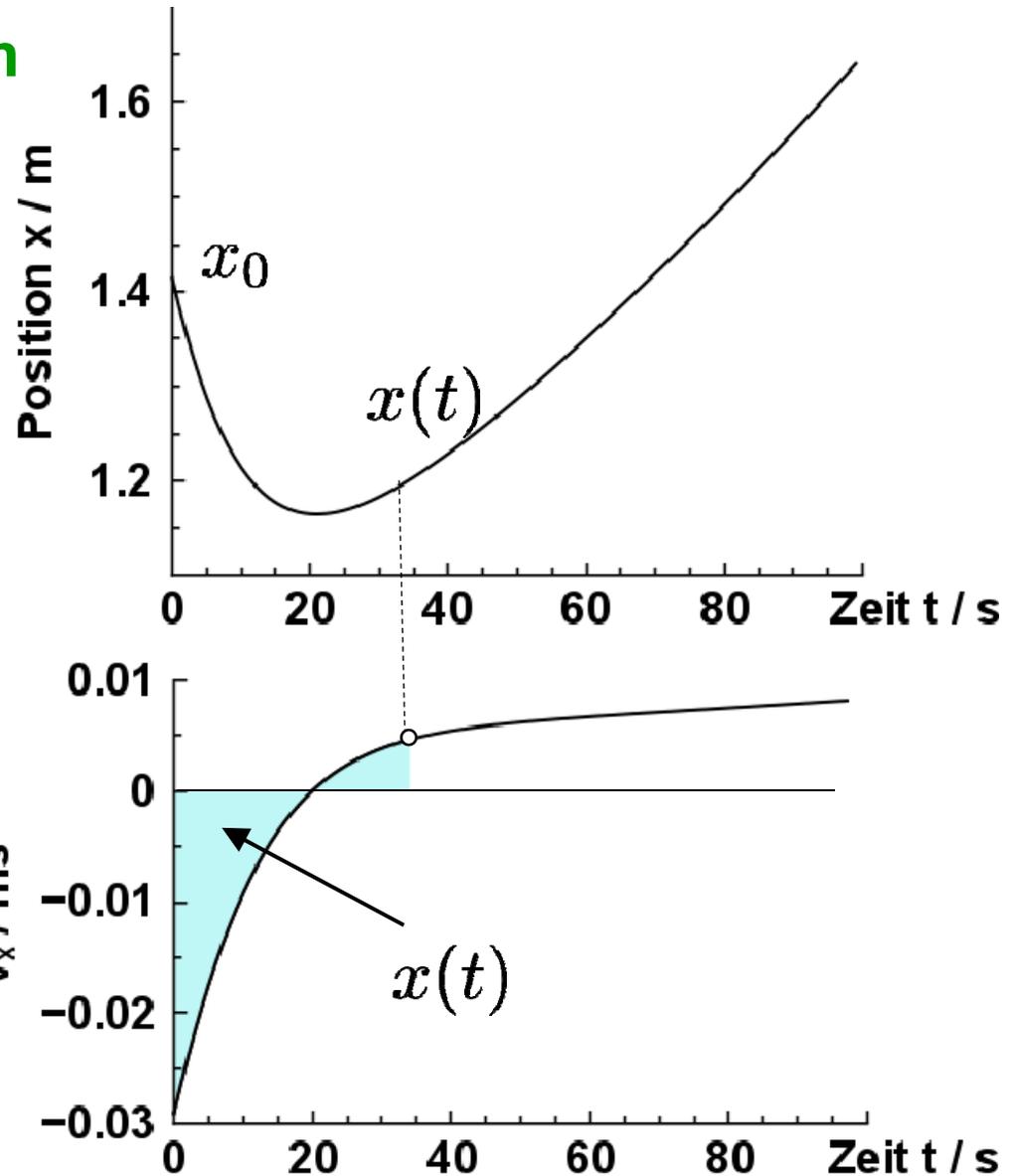


Position = Fläche in einem Geschwindigkeits-Zeit Diagramm

$$x(t) \approx x_0 + \sum_i v_x(t) \Delta t$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_x(\tau) d\tau$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(\tau) d\tau$$



Ein Käfer krabbelt spiralförmig entlang des Ortsvektors $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = 4t \cos(3t) \hat{x} + 4t \sin(3t) \hat{y} \quad [\text{m}]$$

Wird der Käfer im Verlaufe
der Zeit entweder:

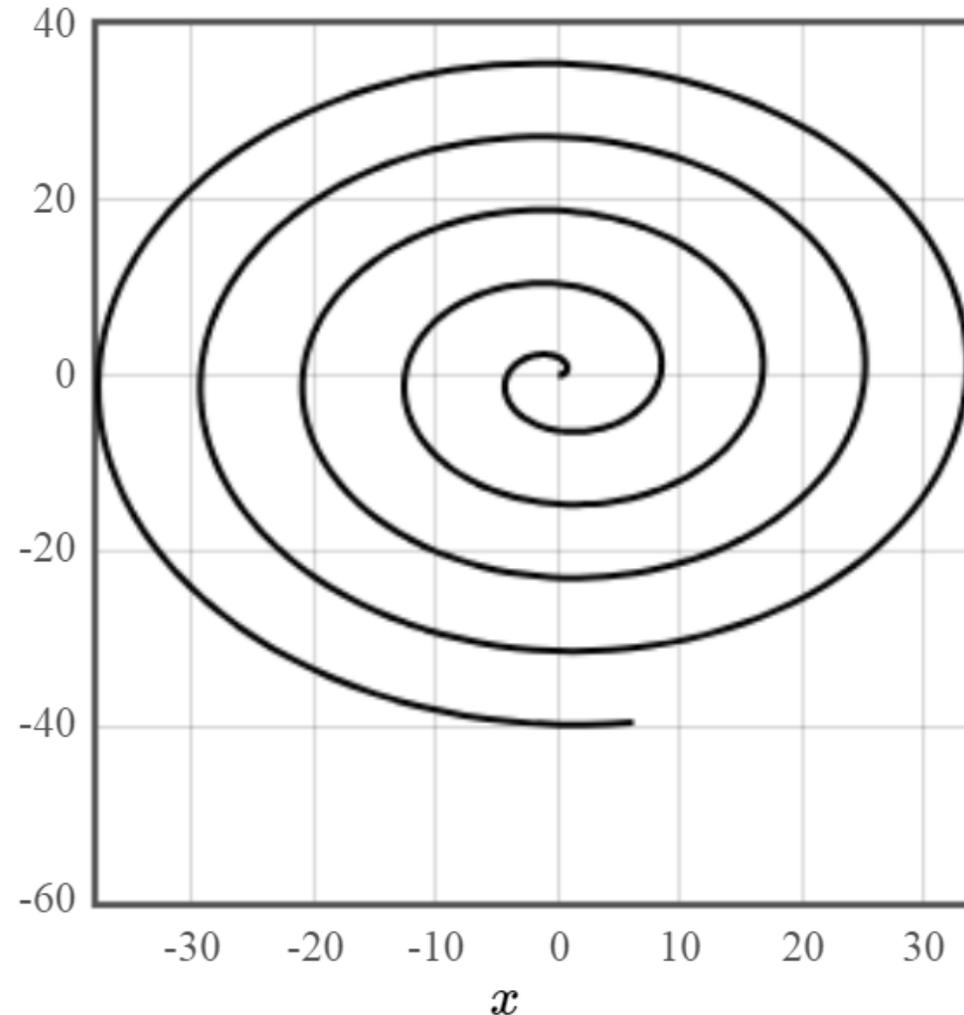
schneller,

langsamer, oder

mit konstanter

Geschwindigkeit y

krabbeln?



fbr.io/cytjx

Ein Käfer krabbelt spiralförmig entlang des Ortsvektors $\vec{r}(t)$.

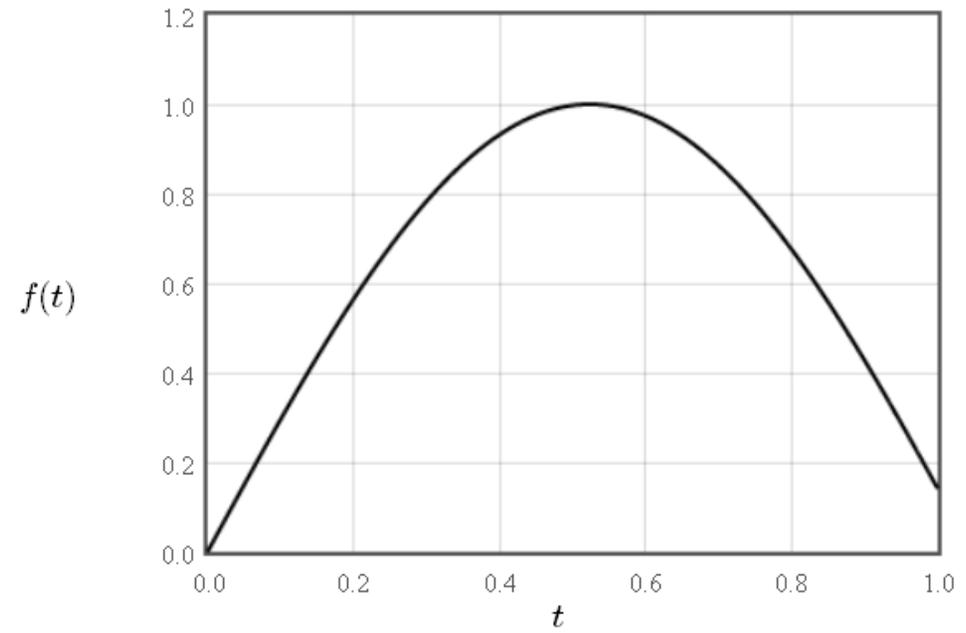
$$\vec{r}(t) = 4t \cos(3t) \hat{x} + 4t \sin(3t) \hat{y} \quad [\text{m}]$$

- Lehrplan
- Bücher
- Testfragen

Numerische Integration and Differentiation

$f(t) =$
 from $t_1 =$ to $t_2 =$.

t	$f(t)$
0.02000	0.05996
0.02333	0.06994
0.02667	0.07991
0.03000	0.08988
0.03333	0.09983
0.03667	0.1098
0.04000	0.1197
0.04333	0.1296
0.04667	0.1395
0.05000	0.1494
0.05333	0.1593



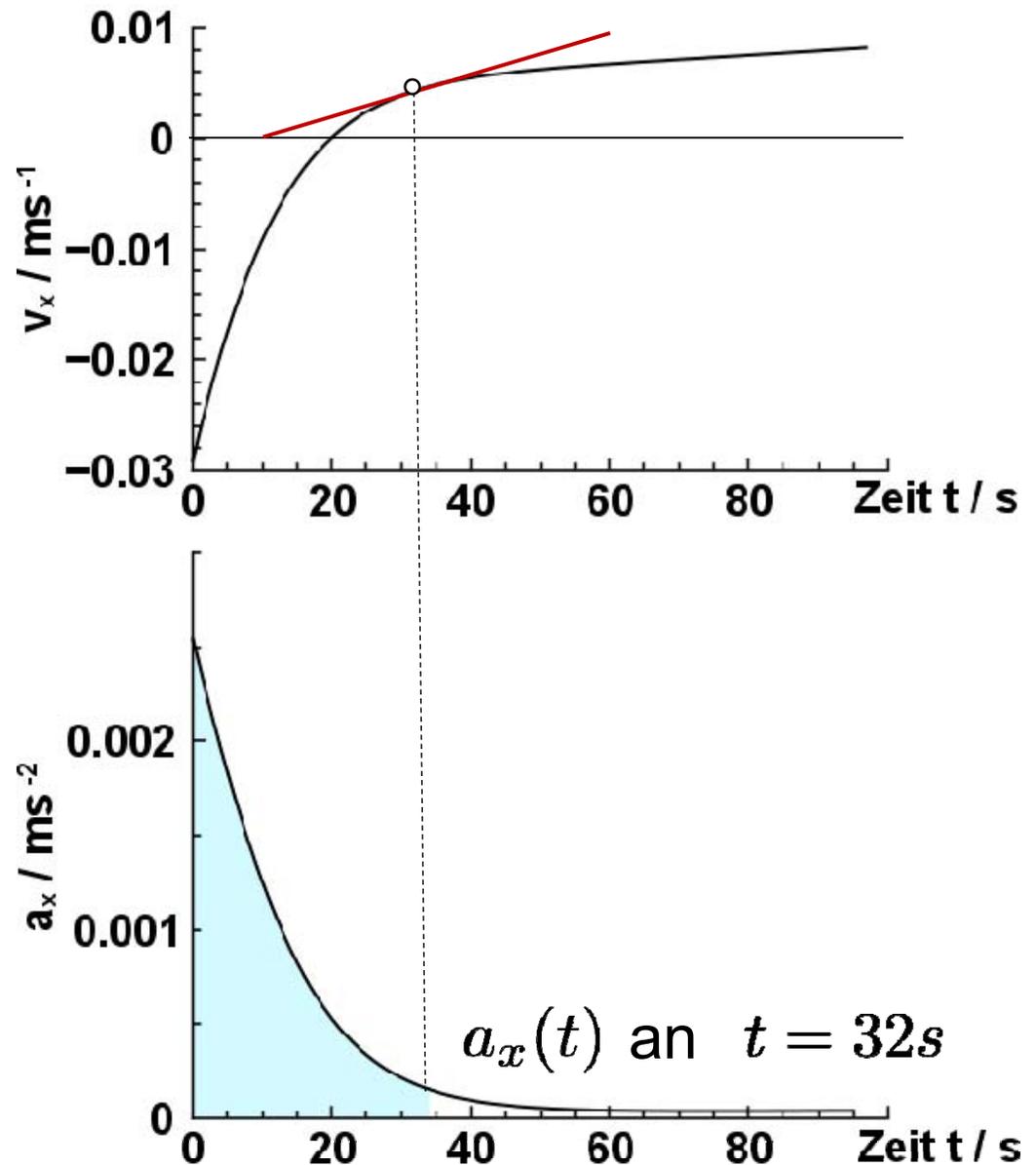
Die 1. Ableitung

Die Ableitung von $f(t)$ wird berechnet aus

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} .$$

**Beschleunigung =
Steigung in einem
Geschwindigkeit-Zeit
Diagramm**

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad [m/s^2]$$
$$= \frac{dv_x}{dt}$$



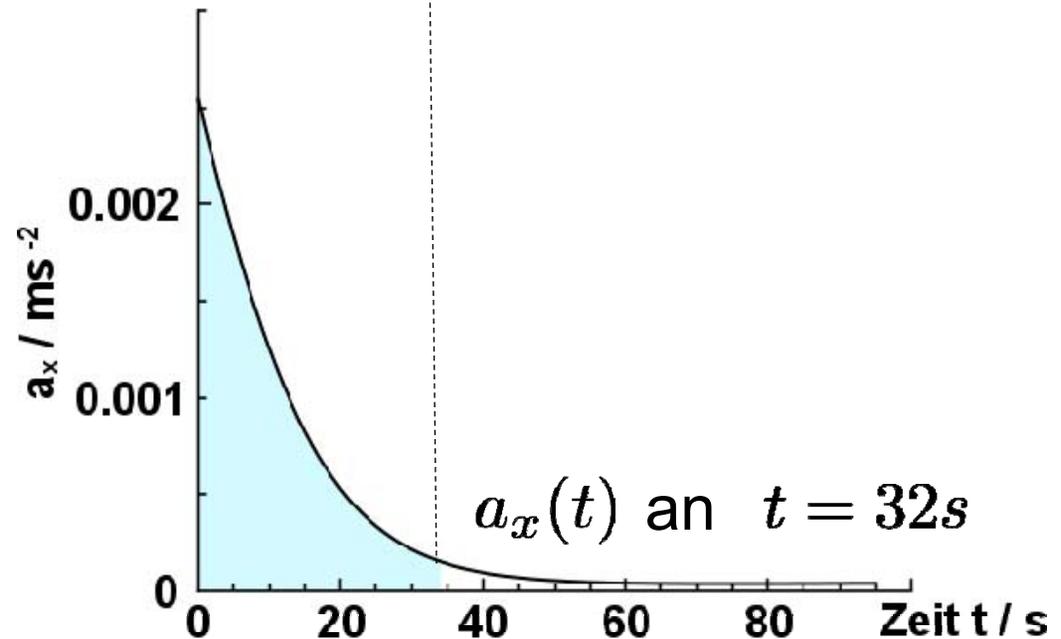
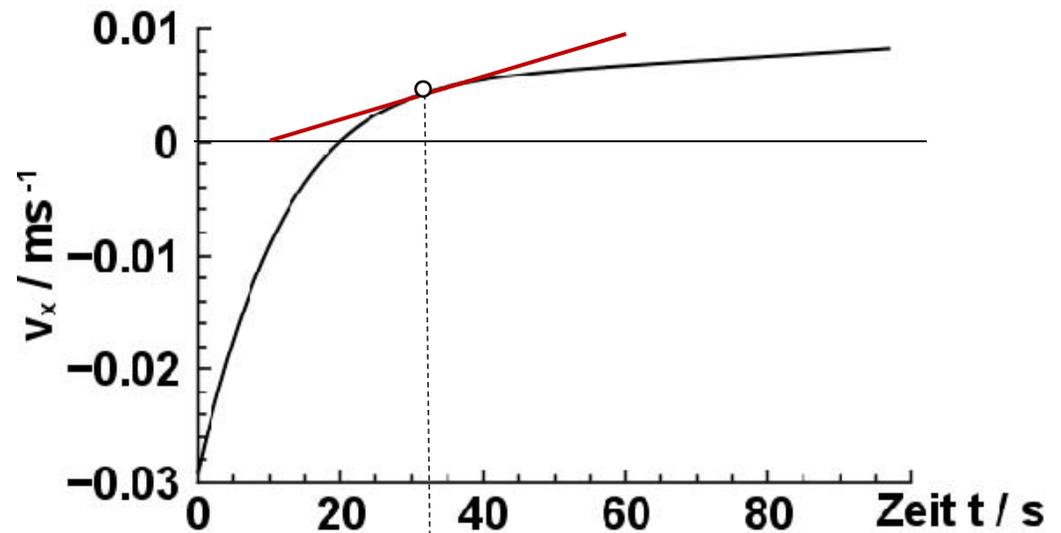
**Beschleunigung =
Steigung in einem
Geschwindigkeit-Zeit
Diagramm**

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad [m/s^2]$$

$$= \frac{dv_x}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

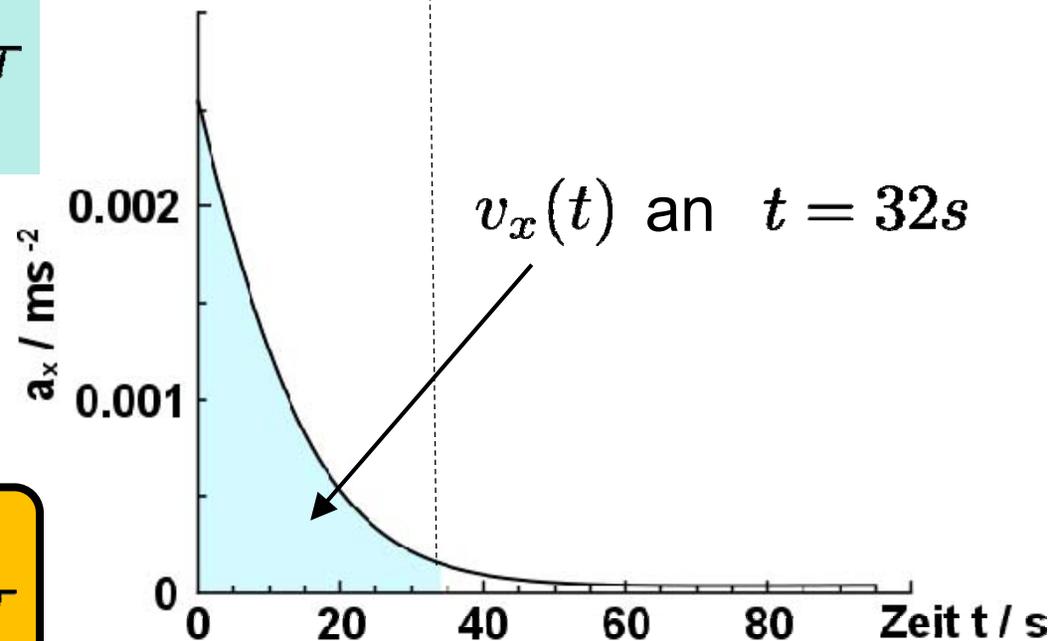
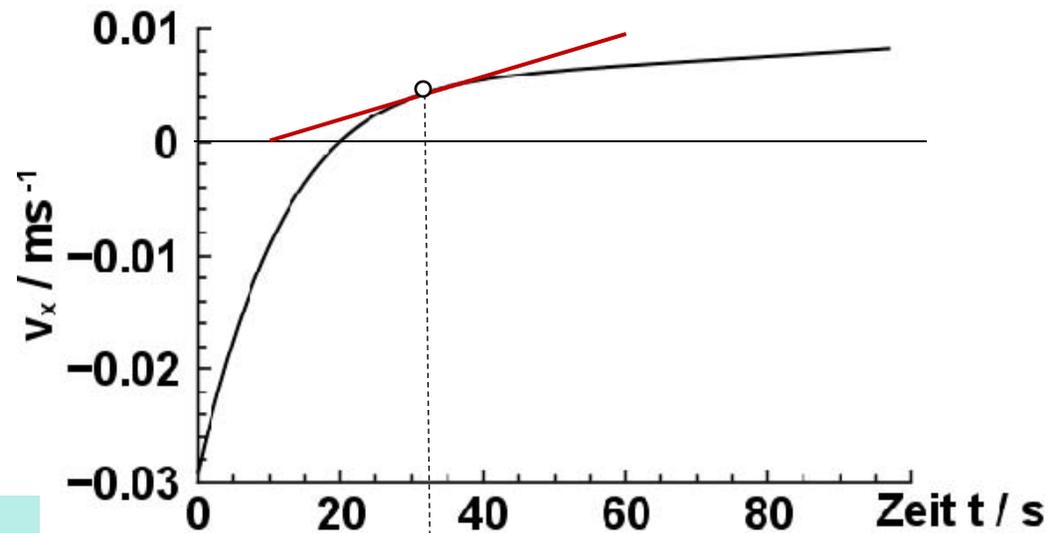
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad [m/s^2]$$



**Beschleunigung =
Steigung in einem
Geschwindigkeit-Zeit
Diagramm**

$$v_x(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a_x(\tau) d\tau$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(\tau) d\tau$$



Was ist ... $|\vec{r}_0| + \int_{t_0}^t |\vec{v}(\tau)| d\tau$?

zurückgelegter Weg s

Weg in kleinem Zeitintervall dt

$$ds = |\vec{v}(t)| dt$$

$$s(t) = |\vec{r}_0| + \int_{t_0}^t |\vec{v}(\tau)| d\tau \quad [m]$$

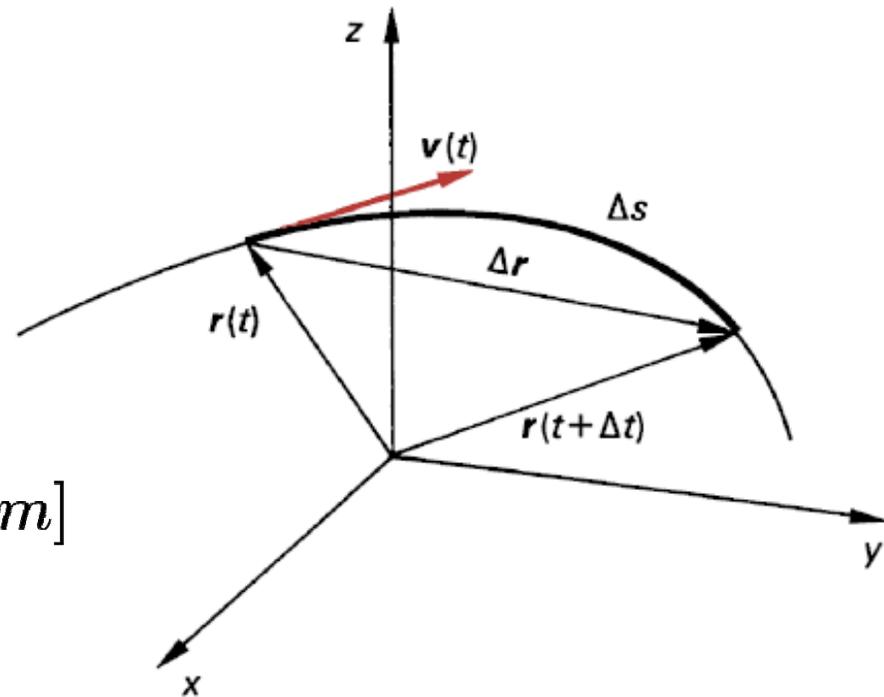


Abb.2.9 Zur Definition des Geschwindigkeitsvektors v .
 x, y, z Raumkoordinaten, t Zeit, s Weg, r Ortsvektor

Aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Fähigkeiten

Integrieren und Differenzieren

Sie müssen wissen:

- wie man die Funktionen $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, und Polynome x^n , $1/x^n$ integriert und ableitet;
- die [Produktregel](#) für Ableitungen;
- die [Quotientenregel](#) für Ableitungen;
- die [Kettenregel](#) für Ableitungen.

Sie können Ihre Arbeit mit der [App für numerische Integration und Differentiation](#) überprüfen.

Mathematica, Wolfram Alpha

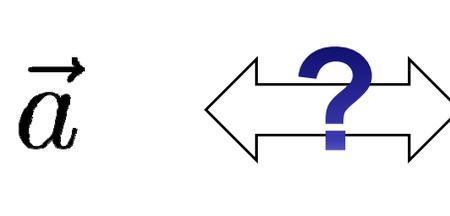
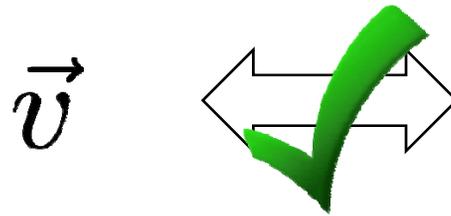
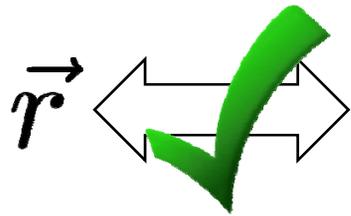
Punktmechanik

Ort

Geschwindigkeit

Beschleunigung

Kraft



Bewegungsbeschreibung

Newton'sche Axiome

Newton'sche Axiome

Trägheitsgesetz (1. Axiom)

Jeder Körper behält seine Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) bei, solange keine äußeren Kräfte auf ihn wirken.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \stackrel{!}{=} 0$$

Definiert Begriff des **Inertialsystems**:

= Bezugssystem, bzw., Beobachtungssystem in dem das gilt

Aktionsprinzip (2. Axiom)

„Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.“

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Für den häufigen Fall einer konstanten Masse m wird daraus:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$