6.

Punktmechanik

Arbeit

21. Okt. 2019

Punktmechanik

Ort | **Geschwindigkeit** | **Beschleunigung** | **Kraft**

$$\vec{r} \Longleftrightarrow \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{a} \overset{?}{\Longleftrightarrow} \vec{F}$$

Bewegungsbeschreibung

Newtonsche Axiome ?

Newtonsche Axiome

Trägheitsgesetz (1. Axiom)

Jeder Körper behält seine Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) bei, solange keine äußeren Kräfte auf ihn wirken.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \stackrel{!}{=} 0$$

Definiert Begriff des Inertialsystems:
= Bezugssystem, bzw., Beobachtungssystem in dem das gilt

Aktionsprinzip (2. Axiom)

„Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.“

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Für den häufigen Fall einer konstanten Masse m wird daraus:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Punktmechanik

Ort	Geschwindigkeit	Beschleunigung	Kraft
$\vec{r}$	$\vec{v}$	$\vec{a}$	$\vec{F}$

$$\vec{r} \Leftrightarrow \vec{v} \Leftrightarrow \vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}$$

Bewegungsbeschreibung

Newtonsche Axiome

Masse und Trägheit

- Trägheit ist der Widerstand eines Körpers gegen eine Änderung seines Bewegungszustandes.
- Maß für die Trägheit: Masse des Körpers, m.
- klassischen Mechanik:
  m unabhängig vom Bewegungszustand

Masse und Trägheit

- Masse: **Grundgröße** im SI-System
- SI Einheit: **1 kg** (durch Eichkörper festgelegt)

Masse und Trägheit

Dynamischer Vergleich von Massen (vgl. Aktionsprinzip)

Für gleiche einwirkende Kraft gilt:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Wechselwirkungsgesetz (3. Axiom) ***actio = reactio***

„Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio).“

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

Es gibt keine einzelne, isolierte Kraft !

http://de.wikipedia.org/wiki/Actio_und_Reactio

Superpositions-prinzip von Kräften

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

Aktionsprinzip (2. Axiom)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

4 Konsequenzen

Konsequenz 1

im statischen Kräftegleichgewicht:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \stackrel{!}{=} 0$$

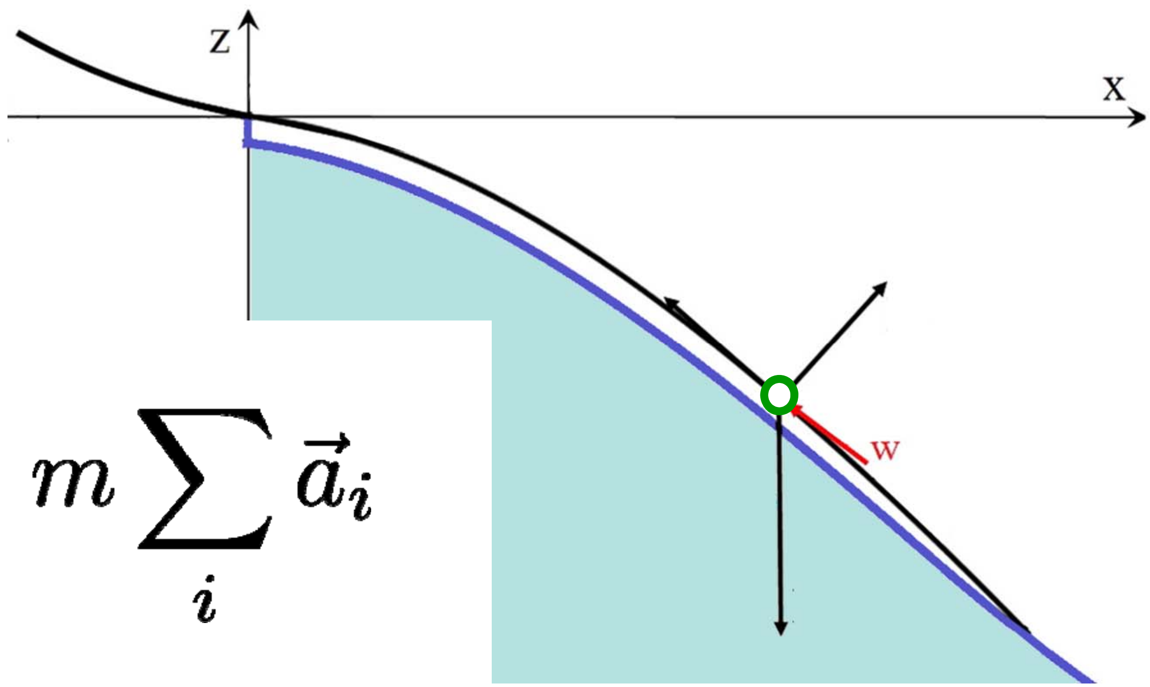
Dann:

keine Änderung des Bewegungszustandes (cf., 1. Newtonsche Axiom)

Konsequenz 2

Überlagerung von Bewegungen

Beispiel: **Bewegung eines Skispringers ist die Überlagerung einer <u>getrennt beschreibbaren</u>**



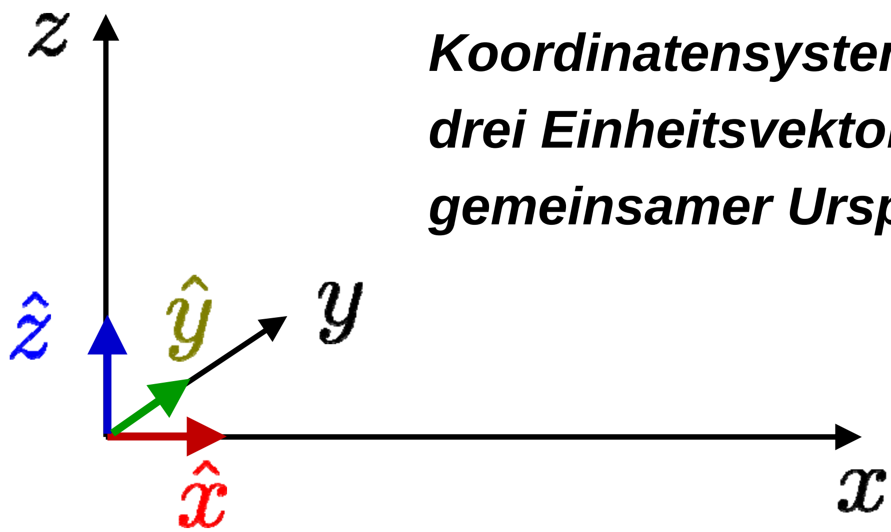
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m \sum_i \vec{a}_i$$

senkrechten Bewegung und einer horizontalen Bewegung

Konsequenz 3

sinnvolle Zerlegung in Vektorkomponenten ?

(1) Zerlegung entlang der Einheitsvektoren

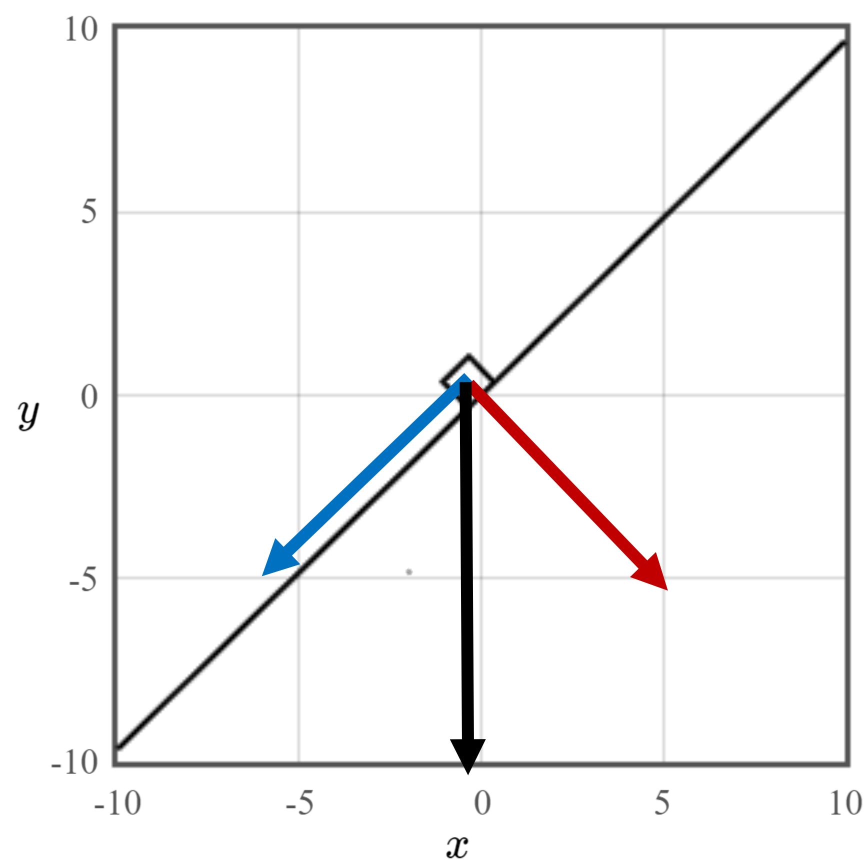


Koordinatensystem:
drei Einheitsvektoren +
gemeinsamer Urspung

Konsequenz 3

sinnvolle Zerlegung in Vektorkomponenten ?

(2) Zerlegung entlang bzw. normal zur Bewegungsrichtung



Konsequenz 4

Ort	Geschwindigkeit	Beschleunigung	Kraft

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{r} \Longleftrightarrow \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{a} \Longleftrightarrow \vec{F}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Punktmechanik

Ort | **Geschwindigkeit** | **Beschleunigung** | **Kraft**

$$\vec{r} \Leftrightarrow \vec{v} \Leftrightarrow \vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}$$

Bewegungsbeschreibung

Newtonsche Axiome

Punktmechanik zusammengefasst

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{r}$ $\vec{v}$ $\vec{a}$ $\vec{F}$

Differentialgleichungen

$$m a_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(x, v_x, t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x(x, v_x, t)}{m}$$

Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x(x, v_x, t)}{m}$$

Anfangsbedingungen:

$$x(t=0) = x_0 \qquad v_x(t=0) = v_{x0}$$

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x(x, v_x, t)}{m}$$

Anfangsbedingungen:

$$x(t=0) = x_0 \qquad v_x(t=0) = v_{x0}$$

Lösungszugang (numerisch):

$$x(\Delta t) \approx x_0 + \frac{dx}{dt}\Delta t \qquad v_x(\Delta t) \approx v_{x0} + \frac{dv_x}{dt}\Delta t$$

Ball werfen ohne Reibung

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} = \text{-9.81}$$

Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 0

$v_x(t_0) =$ 100

$t_0 =$ 0

$\Delta t =$ 0.05

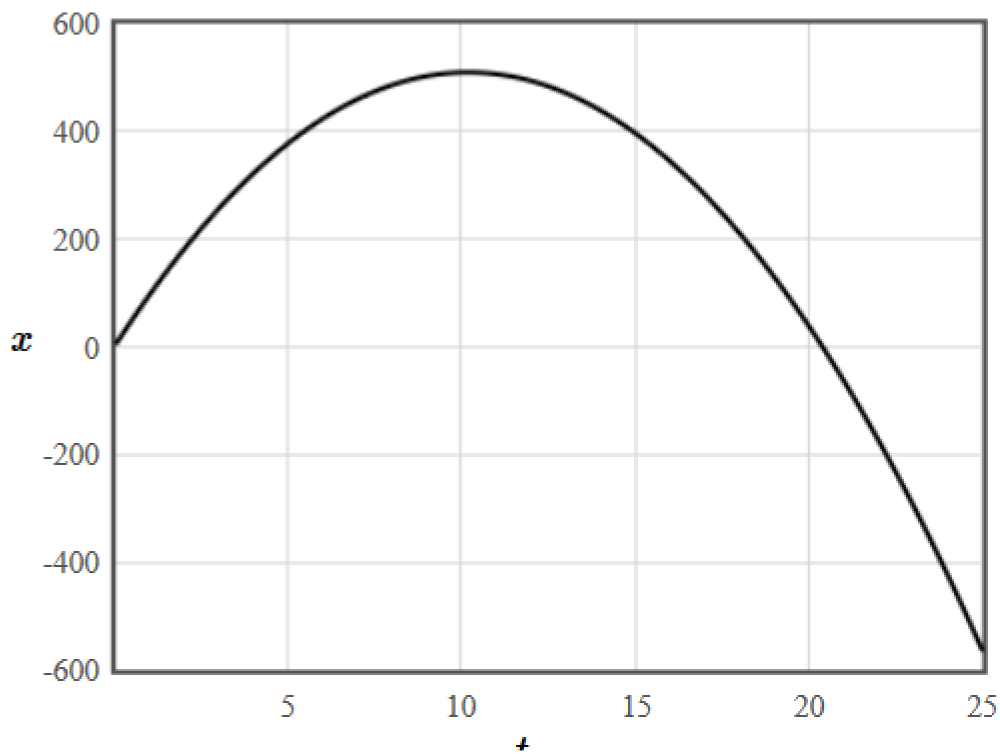
N_{steps} 500

Graphische Darstellung: x vs. t

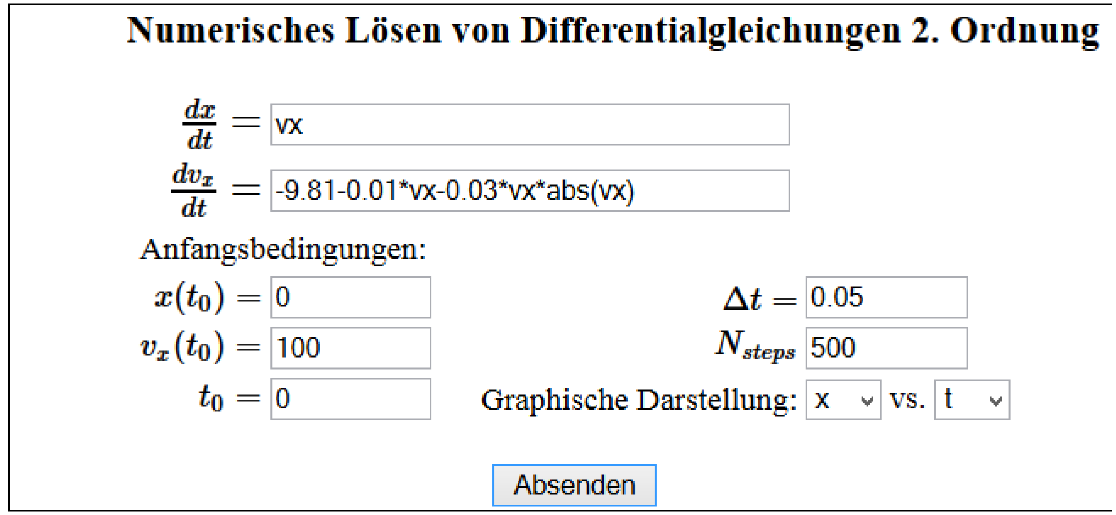
Absenden

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$

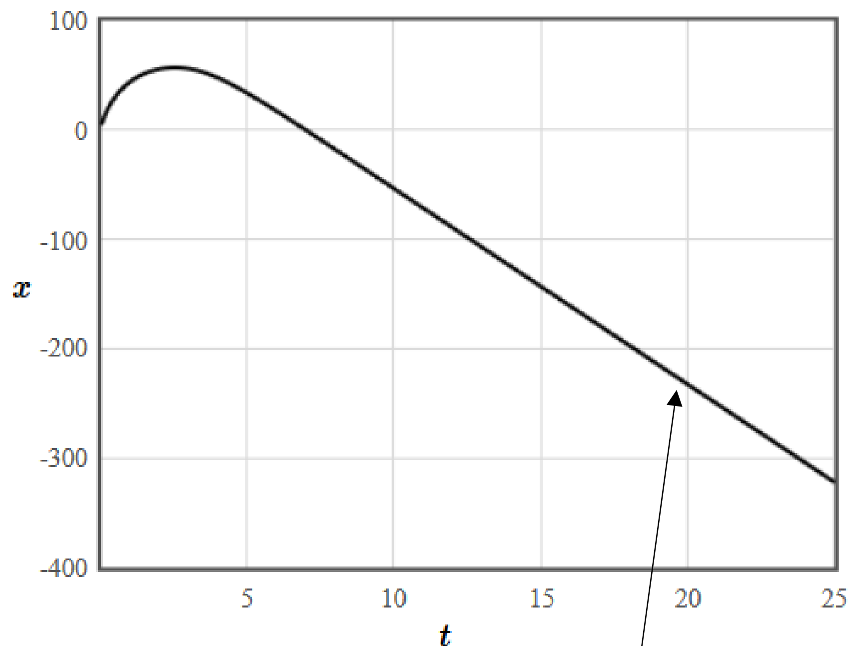


Ball werfen mit Reibung



$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - av_x - bv_x\,|v_x|$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g - \frac{a}{m}v_x - \frac{b}{m}v_x\,|v_x|$$



Endgeschwindigkeit

Massa - Feder

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$\frac{dx}{dt} =$ vx

$\frac{dv_x}{dt} =$ -3*x

Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 0

$v_x(t_0) =$ 1

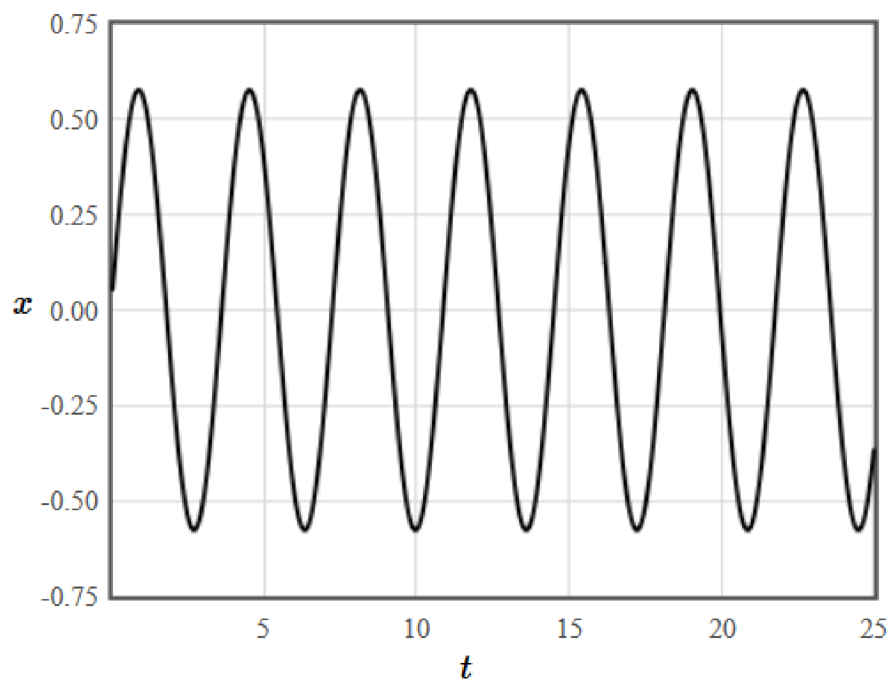
$t_0 =$ 0

$\Delta t =$ 0.05

N_{steps} 500

Graphische Darstellung: x vs. t

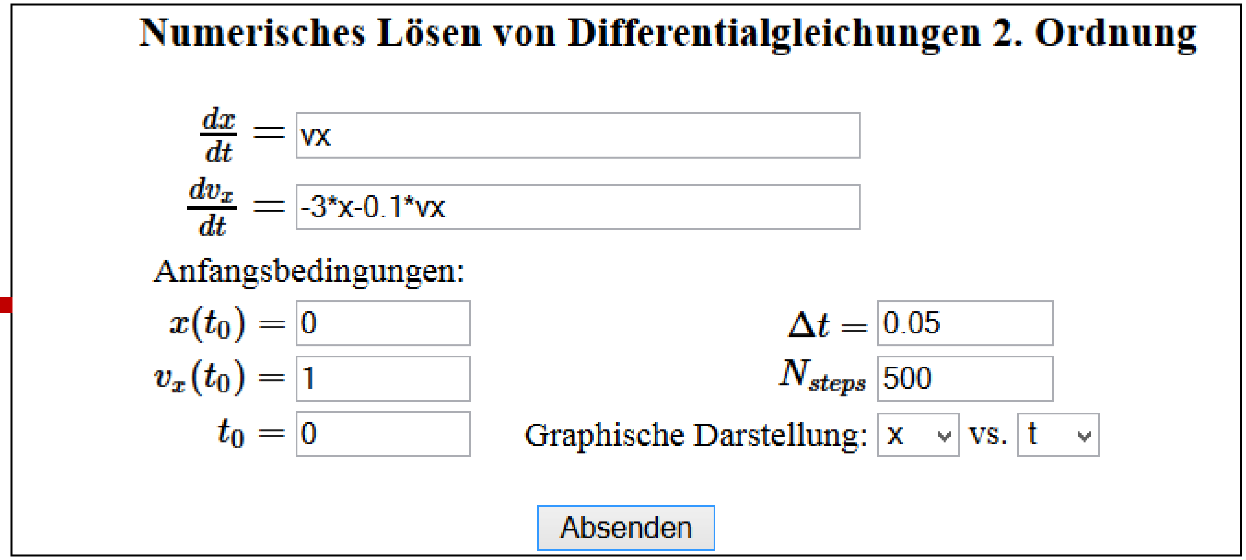
Absenden



$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

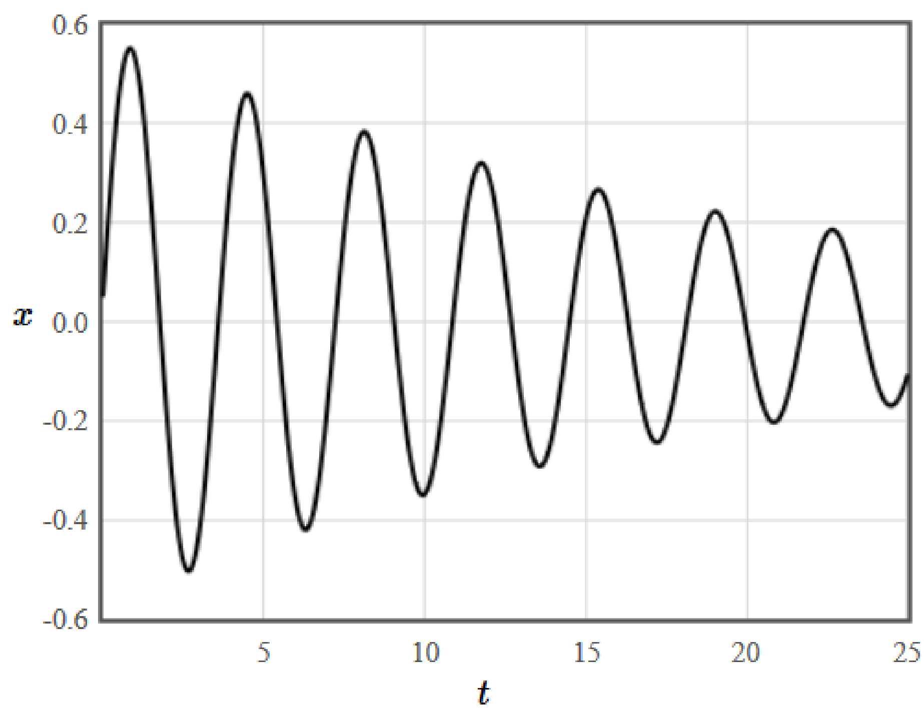
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}x$$

Massa - Feder mit Reibung

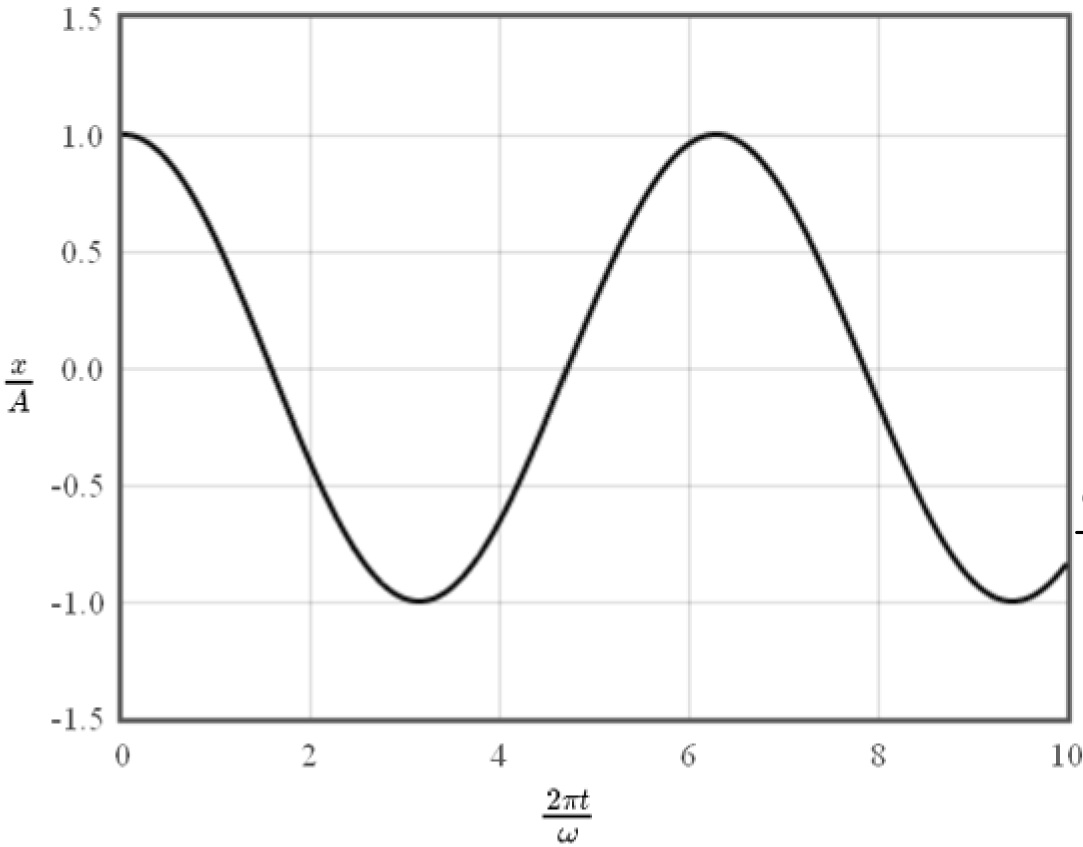


$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - av_x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{a}{m}v_x$$



Harmonische Bewegung



Radiant

$$x = A\cos\left(2\pi ft\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\pi fA\sin\left(2\pi ft\right)$$

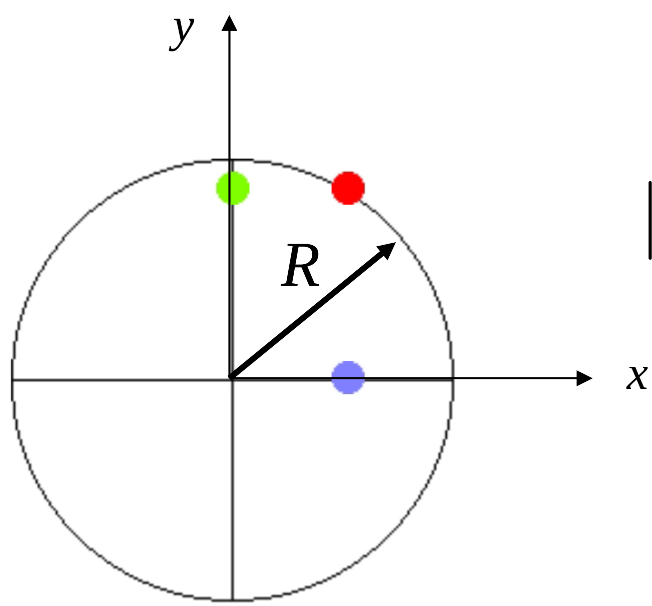
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(2\pi f\right)^2 A\cos\left(2\pi ft\right)$$

$$F_x = ma = -m\left(2\pi f\right)^2 A\cos\left(2\pi ft\right) = -m\left(2\pi f\right)^2 x$$

$$F_x \propto f^2$$

Lineare Federkraft:

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

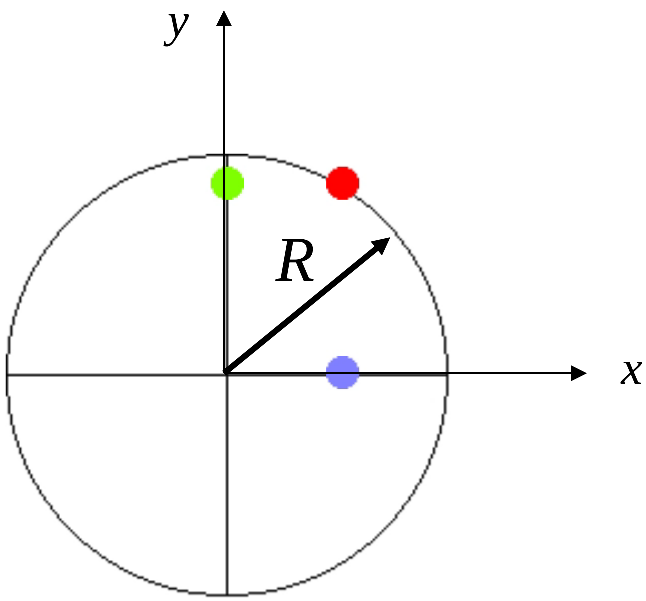
$$|\vec{r}| = \sqrt{R^2\cos^2(\omega t) + R^2\sin^2(\omega t)} = R$$

$$\omega = 2\pi f$$

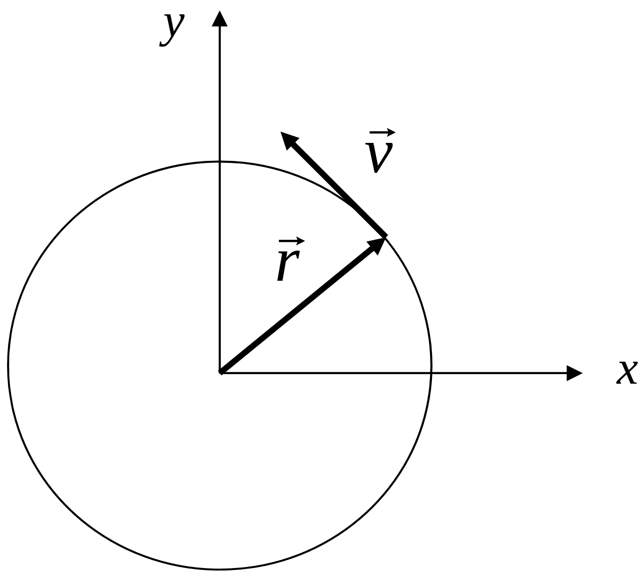
Frequenz [1/s] = [Hz]

Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

Kreisbewegung



Kreisbewegung

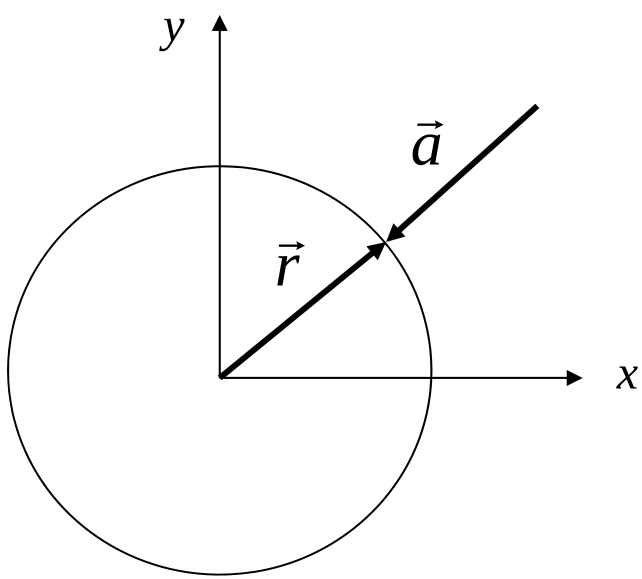


$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

$$|\vec{v}| = |\omega R|$$

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

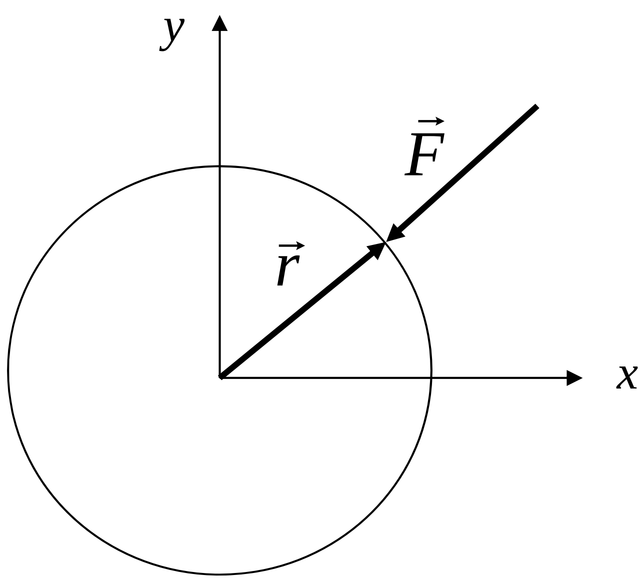
$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$|\vec{a}| = |\omega^2 R| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

Zentrifugalbeschleunigung

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

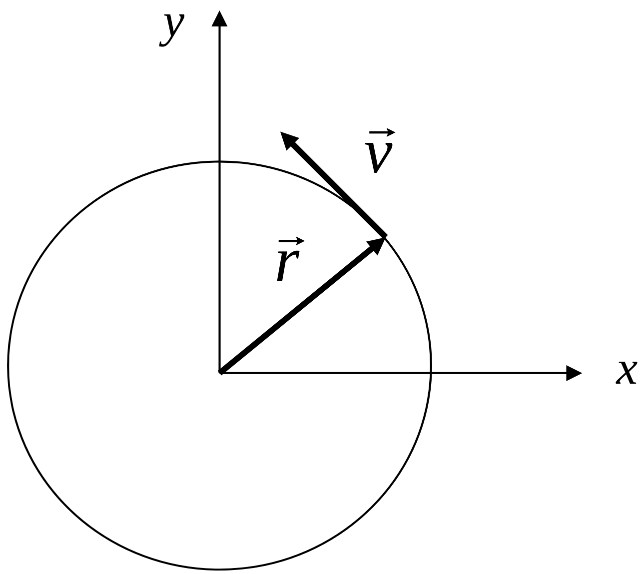
$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r}$$

$$\left|\vec{F}\right| = \left|m\omega^2 R\right| = \frac{m\left|\vec{v}\right|^2}{R}$$

Zentrifugalkraft

Kreisbewegung

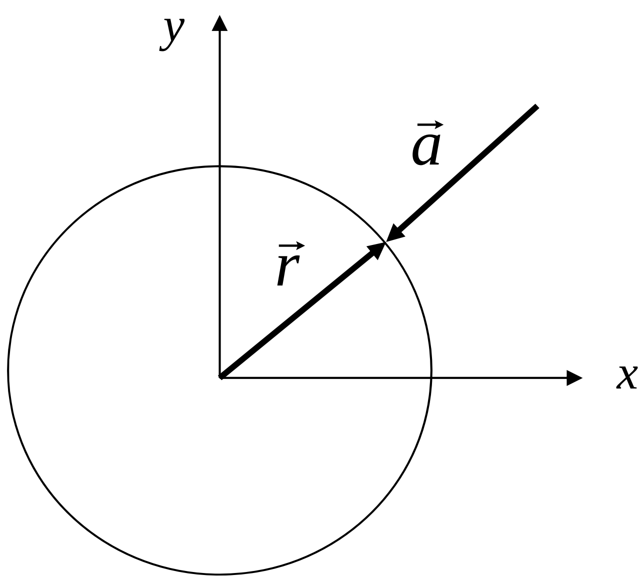


$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

$$|\vec{v}| = |\omega R|$$

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

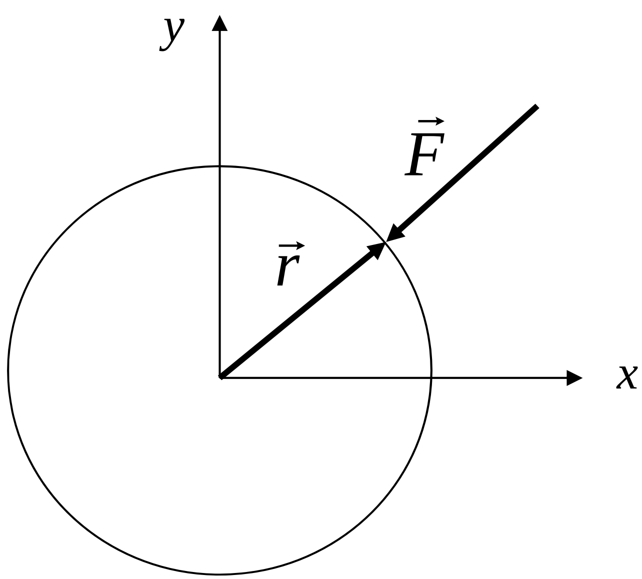
$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$|\vec{a}| = |\omega^2 R| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

Zentrifugalbeschleunigung

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r}$$

$$\left|\vec{F}\right| = \left|m\omega^2 R\right| = \frac{m\left|\vec{v}\right|^2}{R}$$

Zentrifugalkraft