7. Punktmechanik

25 Okt. 2019

Aufgaben

<p>richtige Antwort = <p style='text-align:center...	<p>Die Gravitationskraft, welche der Mond erf&auml...	0
<p>richtige Antwort = <p style='text-align:center...	<p>Die Gravitationskraft, welche der Mond erf&auml...	1
<p>richtige Antwort = <p style='text-align:center...	<p>Die Gravitationskraft, welche der Mond erf&auml...	1
<p>richtige Antwort = <p style='text-align:center...	<p>Die Gravitationskraft, welche der Mond erf&auml...	1
<p>richtige Antwort = <p style='text-align:center...	<p>Die Gravitationskraft, welche der Mond erf&auml...	1
<p>richtige Antwort = <p style='text-align:center...	<p>Die Gravitationskraft, welche der Mond erf&auml...	0

Student ID	Grade
74478	0 Submit

Student ID	Grade
76103	0 Submit

Student ID	Grade
12008	0 Submit

Student ID	Grade
24341	0 Submit

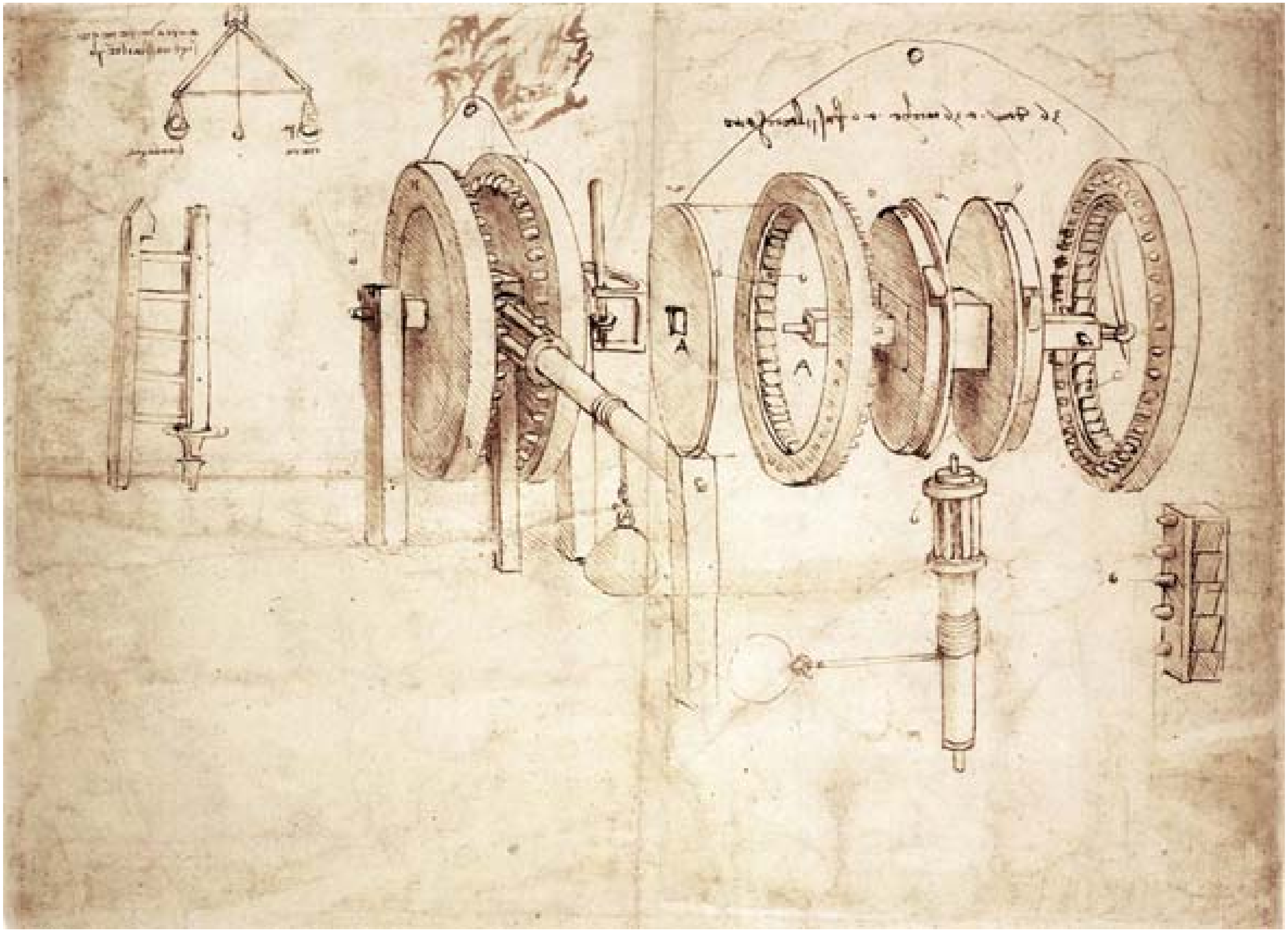
Student ID	Grade
26809	0 Submit

Student ID	Grade

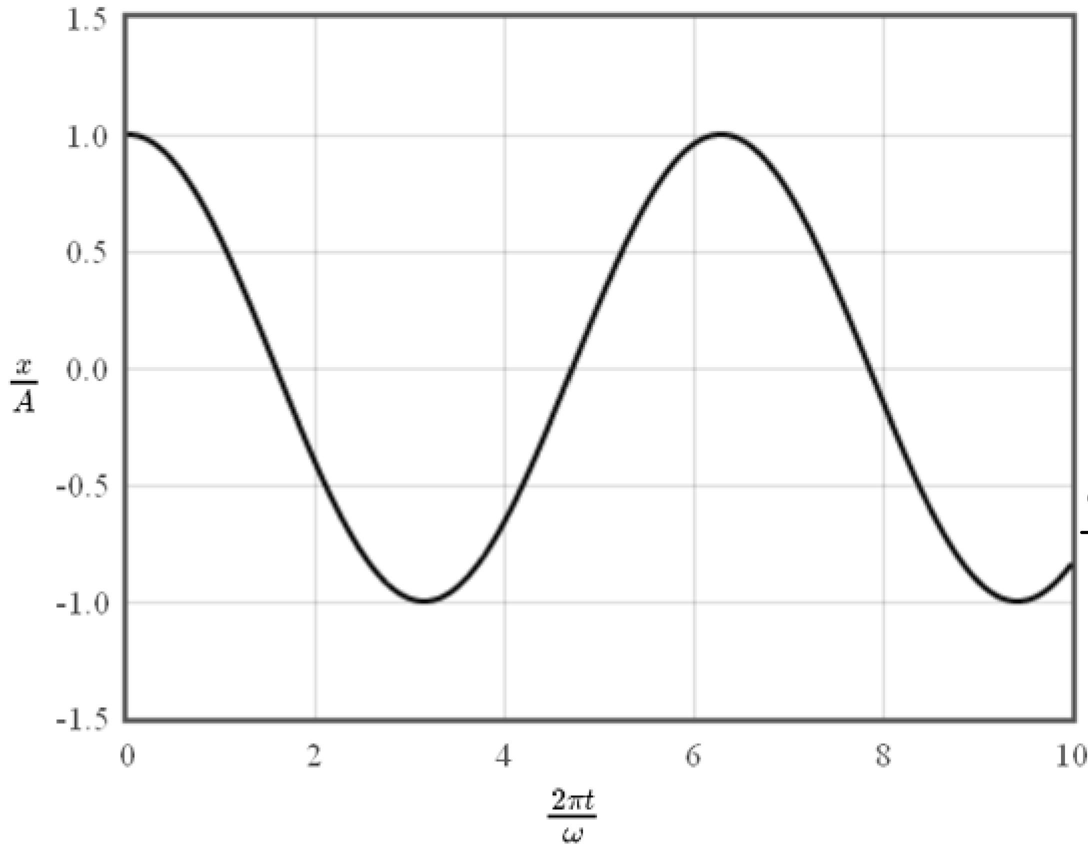
Punktmechanik

$$\vec{r} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{F}$$

Bewegung $\Longleftrightarrow$ Kraft



Harmonische Bewegung



Radiant

$$x = A\cos(2\pi ft)$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\pi fA\sin(2\pi ft)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(2\pi f)^2 A\cos(2\pi ft)$$

$$F_x = ma = -m(2\pi f)^2 A\cos(2\pi ft)$$

$$F_x \propto f^2$$

Punktmechanik

$$\vec{r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}$$

Punktmechanik

$$\vec{r} \qquad \vec{v} \qquad \vec{a} \qquad \vec{F}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' + \vec{r}(t_0) \qquad \vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' + \vec{v}(t_0)$$

Fähigkeiten

Integrieren und Differenzieren

Sie müssen wissen:

- wie man die Funktionen $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, und Polynome x^n, $1/x^n$ integriert und ableitet;
- die Produktregel für Ableitungen;
- die Quotientenregel für Ableitungen;
- die Kettenregel für Ableitungen.

Sie können Ihre Arbeit mit der App für numerische Integration und Differentiation überprüfen.

Mathematica, Wolfram Alpha

Physik M Formelsammlung

+ - Punktmechanik

Ist von einem Objekt entweder der Ortsvektor $\vec{r}$ [m], die Geschwindigkeit $\vec{v}$ [m/s], die Beschleunigung $\vec{a}$ [m/s²] oder die Kraft $\vec{F}$ [N] als Funktion der Zeit bekannt, so können die anderen vier Größen entweder durch Ableiten oder Integrieren berechnet werden.

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' + \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'')dt'' + \vec{v}(t_0) \right) dt' + \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t'} \frac{\vec{F}(t'')}{m} dt'' + \vec{v}(t_0) \right) dt' + \vec{r}(t_0),$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' + \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}(t')}{m} dt' + \vec{v}(t_0),$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m},$$

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Differentialgleichungen

$$ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(x, v_x, t\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x\left(x, v_x, t\right)}{m}$$

Schritt für Schritt

x_0	$x_1 \approx x_0 + v_{x0}\Delta t$	$x_2 \approx x_1 + v_{x1}\Delta t$
v_{x0}	$v_{x1} \approx v_{x0} + a_{x0}\Delta t$	$v_{x2} \approx v_1 + a_{x1}\Delta t$
$F_0(x_0, v_{x0})$	$F_1(x_1, v_{x1})$	$F_2(x_2, v_{x2})$
$a_{x0} = \dfrac{F_0}{m}$	$a_{x1} = \dfrac{F_1}{m}$	$a_{x2} = \dfrac{F_2}{m}$

Lehrplan
Bücher
Formel Sammlung
Fähigkeiten
Apps
Testfragen
Vorlesungen
→ Aufgaben

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die Bewegung eines Objekts, welche nur in einer Dimension stattfindet, kann mithilfe der Position x und der Geschwindigkeit v_x des Objekts beschrieben werden. Ist die Kraft auf das Objekt bekannt, kann die Bewegung mit zwei Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben werden:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \text{and} \quad \frac{dv_x}{dt} = a_x = F_x(x, v_x, t)/m.$$

Hier ist F die Kraft, m die Masse und t die Zeit. Das folgende Formular kann benutzt werden, um diese Gleichungen numerisch mit einer Anzahl von Zeitschritten N_{steps} der Weite Δt zu integrieren. Die Beschleunigung a_x kann als Funktion von x, v_x und t vorgegeben werden.

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

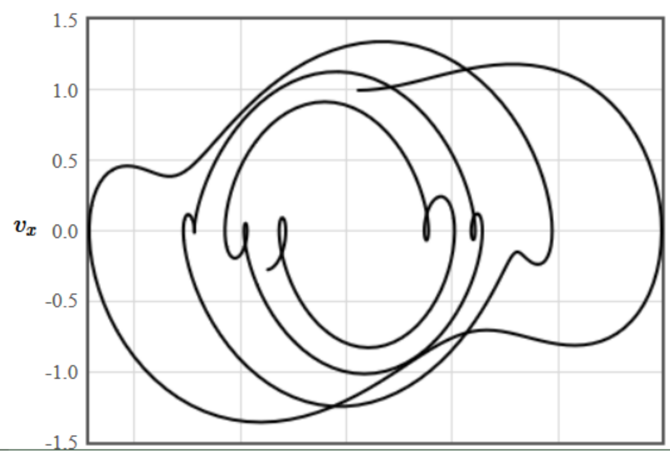
$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} =$$ -0.1*vx-sin(x)+sin(3*t)

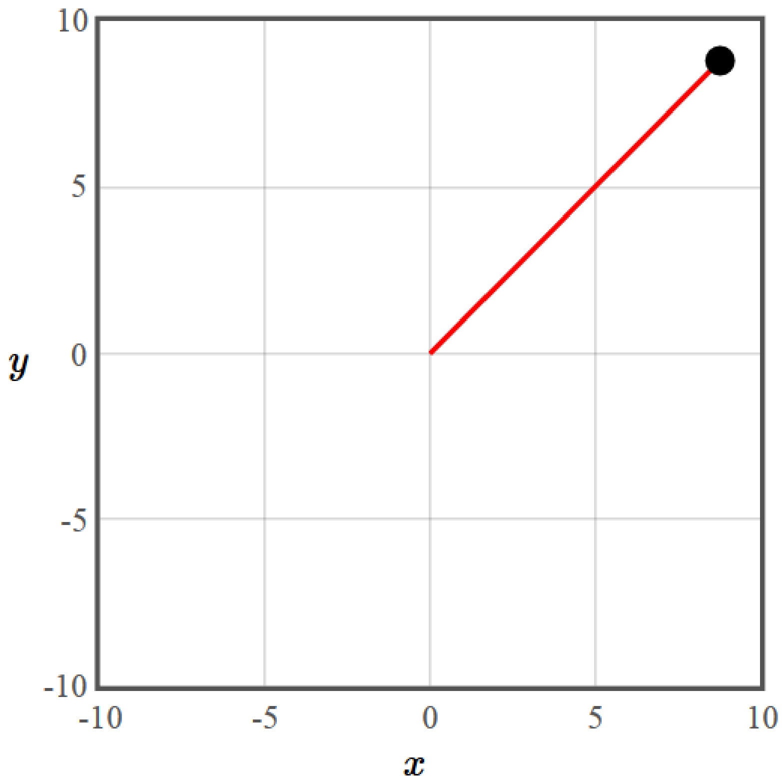
Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$	0	$\Delta t =$	0.05
$v_x(t_0) =$	1	N_{steps}	500
$t_0 =$	0	Graphische Darstellung:	vx vs. x

Absenden



Gesamtkraft Null = Geradlinige Bewegung



$$\vec{r} = (x_0 + v_{x0}t)\,\hat{x} + (y_0 + v_{y0}t)\,\hat{y} + (z_0 + v_{z0}t)\,\hat{z}$$

$$\vec{v} = v_{x0}\,\hat{x} + v_{y0}\,\hat{y} + v_{z0}\,\hat{z}$$

$$\vec{a} = 0$$

$$\vec{F} = 0$$

$x_0 = 0\,\mathrm{m}$ $\quad$ $y_0 = 0\,\mathrm{m}$

$v_{x0} = 0.500$ [m/s] - +

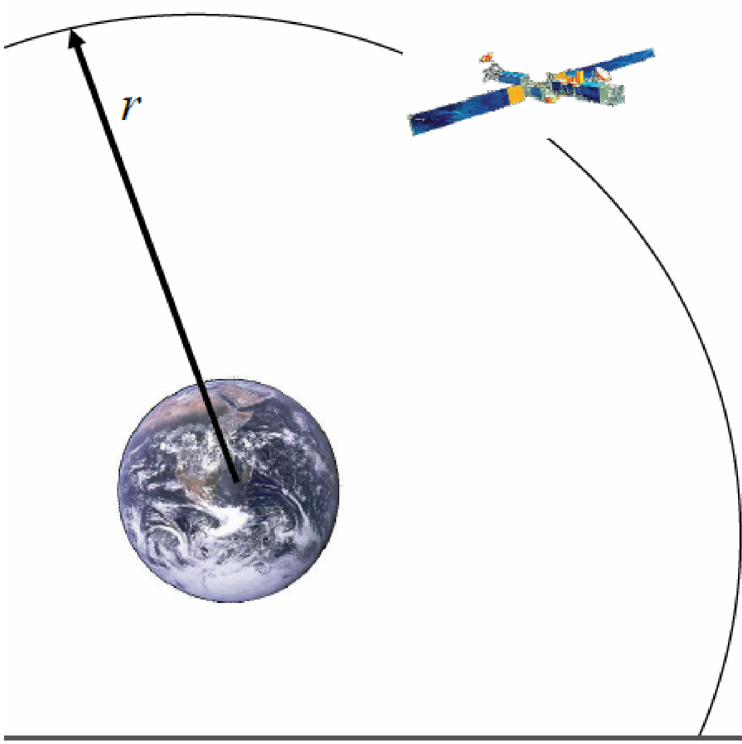
$v_{y0} = 0.500$ [m/s] - +

restart

Satellitenbahnen

$$\vec{F} = \frac{-Gm_{erde}m_{sat}}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{-Gm_{erde}m_{sat}x}{m_{sat}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$



Numerical 6th order differential equation solver

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} =$$ -x*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} =$$ -y*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_z}{dt} =$$ -z*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

Initial conditions:

$t_0 =$	0	$\Delta t =$	60
$x(t_0) =$	0	N_{steps}	1500
$v_x(t_0) =$	7900	Plot:	y vs. x
$y(t_0) =$	6371000		
$v_y(t_0) =$	0		
$z(t_0) =$	0		
$v_z(t_0) =$	0		

Ein Ball wird in den Wind geworfen

$$\vec{F} = -a(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}}) - b(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})|(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})| - mg\hat{z}$$

Numerical 6th order differential equation solver

$\frac{dx}{dt} = v_x$

$\frac{dv_x}{dt} =$

```
(-0.01*(vx-(1))-0.03*(vx-(1))*sqrt((vx-(1))*(vx-
(1))+(vy-(7*exp(-x*x)))*(vy-(7*exp(-x*x)))+
(vz-(-3*exp(-t*t)))*(vz-(-3*exp(-t*t)))))/0.1
```

$\frac{dy}{dt} = v_y$

$\frac{dv_y}{dt} =$

```
(-0.01*(vy-(7*exp(-x*x)))-0.03*(vy-
(7*exp(-x*x)))*sqrt((vx-(1))*(vx-(1))+(vy-
(7*exp(-x*x)))*(vy-(7*exp(-x*x)))+
(vz-(-3*exp(-t*t)))*(vz-(-3*exp(-t*t)))))/0.1
```

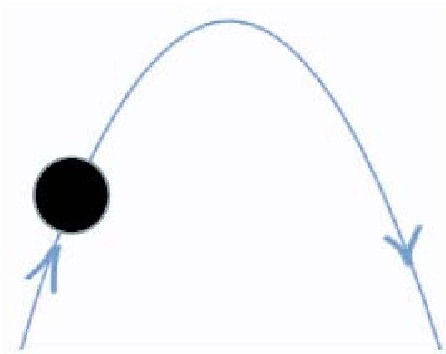
$\frac{dz}{dt} = v_z$

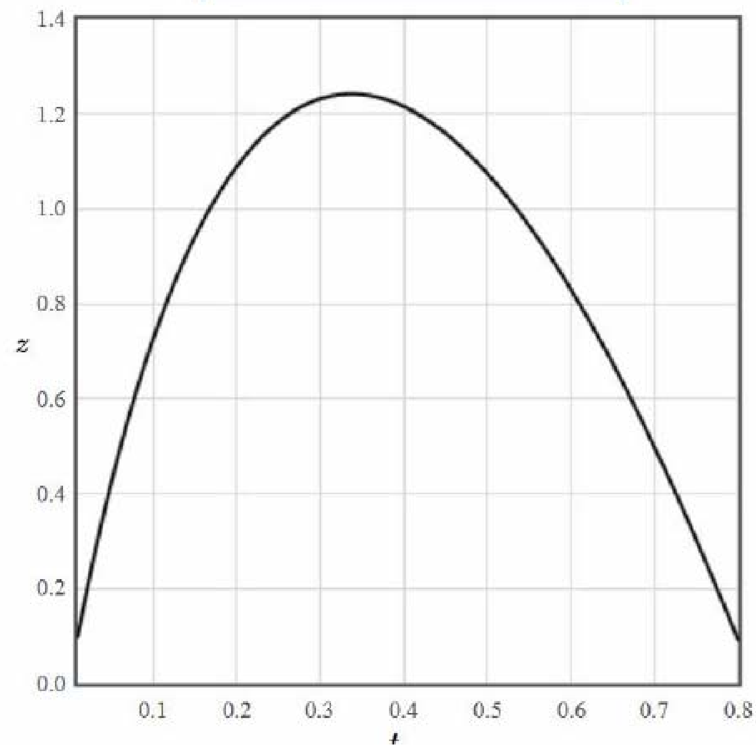
$\frac{dv_z}{dt} =$

```
(-0.01*(vz-(-3*exp(-t*t)))-0.03*(vz-
(-3*exp(-t*t)))*sqrt((vx-(1))*(vx-(1))+(vy-
(7*exp(-x*x)))*(vy-(7*exp(-x*x)))+
(vz-(-3*exp(-t*t)))*(vz-(-3*exp(-t*t)))))/0.1-9.81
```

Initial conditions:

$t_0 =$	0	$\Delta t =$	0.01
$x(t_0) =$	0	N_{steps}	80
$v_x(t_0) =$	-7	Plot:	z vs. t
$y(t_0) =$	0		
$v_y(t_0) =$	5		
$z(t_0) =$	0		
$v_z(t_0) =$	10		





Rocket launch

$$\vec{F}_{fric} = -a(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}}) - b(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})|(\vec{v} - \vec{v}_{\text{wind}})|,$$

Numerical 6th order differential equation solver

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} =$$

```
(-0.01*(vx-(0.2*exp(-t*t/50)))-0.03*(vx-
(0.2*exp(-t*t/50)))*sqrt((vx-(0.2*exp(-t*t/50)))*
(vx-(0.2*exp(-t*t/50)))+(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))*
(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))+(vz-(0))*(vz-(0))))/(0.1*
(2-H(3-t)*t/3-H(t-3)))
```

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} =$$

```
(-0.01*(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))-0.03*(vy-
(-0.3*exp(-t*t/50)))*sqrt((vx-(0.2*exp(-t*t/50)))*
(vx-(0.2*exp(-t*t/50)))+(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))*
(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))+(vz-(0))*(vz-(0))))/(0.1*
(2-H(3-t)*t/3-H(t-3)))
```

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_z}{dt} =$$

```
(-0.01*(vz-(0))-0.03*(vz-(0))*sqrt((vx-
(0.2*exp(-t*t/50)))*(vx-(0.2*exp(-t*t/50)))+
(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))*(vy-(-0.3*exp(-t*t/50)))+
(vz-(0))*(vz-(0))))/(0.1*(2-H(3-t)*t/3-H(t-3)))-
9.81+5*H(3-t)/(0.1*(2-H(3-t)*t/3-H(t-3)))
```

Initial conditions:

$t_0 =$ 0

$x(t_0) =$ 0

$v_x(t_0) =$ 0

$y(t_0) =$ 0

$v_y(t_0) =$ 0

$z(t_0) =$ 0

$v_z(t_0) =$ 0

$\Delta t =$ 0.02

N_{steps} 500

Plot: z vs. t

submit