8.

Punktmechanik

Arbeit

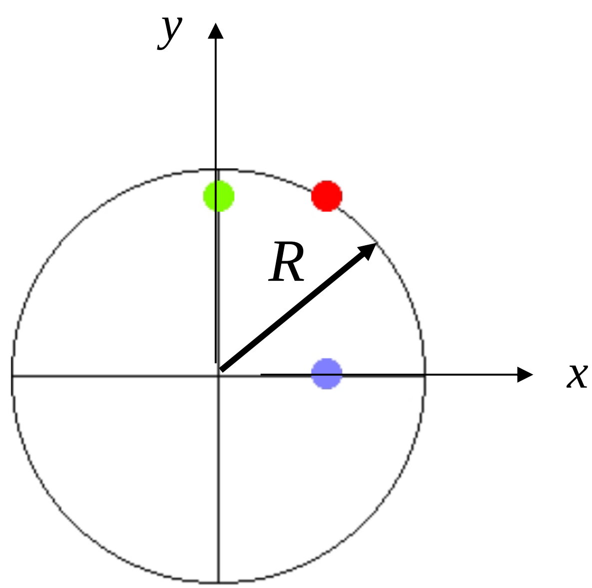
28. Okt. 2019

Our volunteers

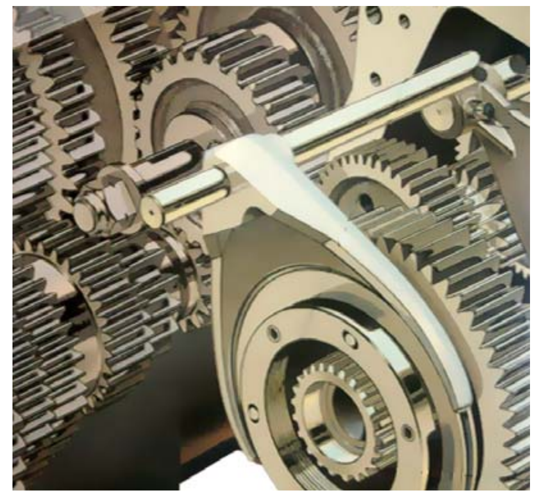
Differential-gleichung

$$\vec{F}(x, v_x) = \ldots$$

Kreisbewegung

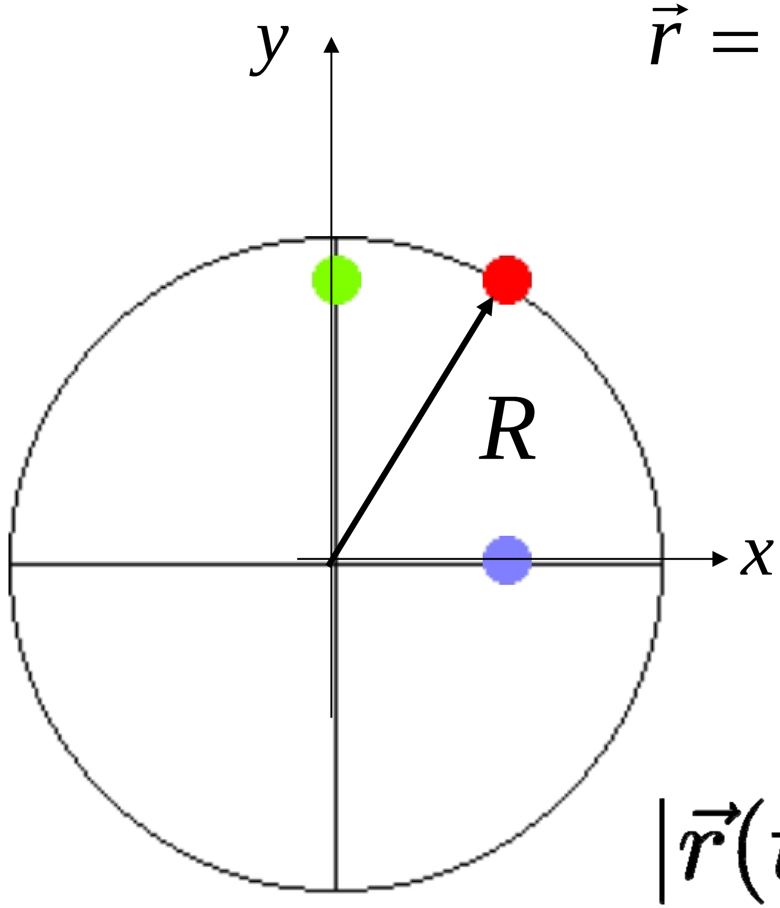


Arbeit



https://en.wikipedia.org/wiki/Non-synchronous_transmission#/media/File:NonSynchronousGearBoxSF.jpg

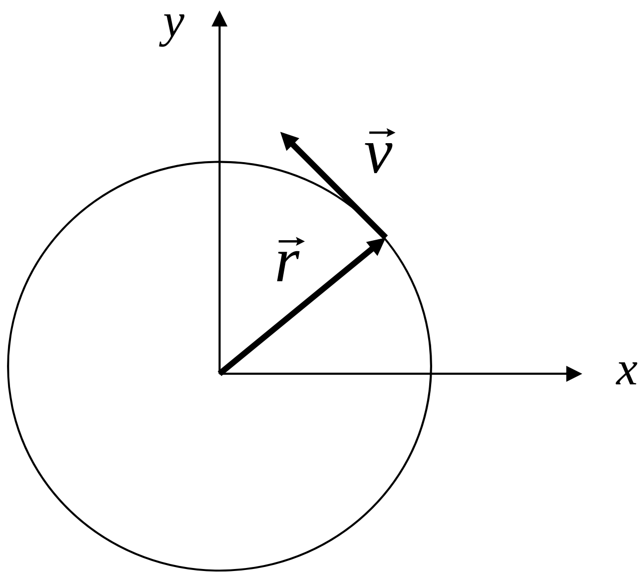
Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos\left(\omega t\right)\hat{x} + R\sin\left(\omega t\right)\hat{y}$$

$$\left|\vec{r}(t)\right| = R$$

Kreisbewegung

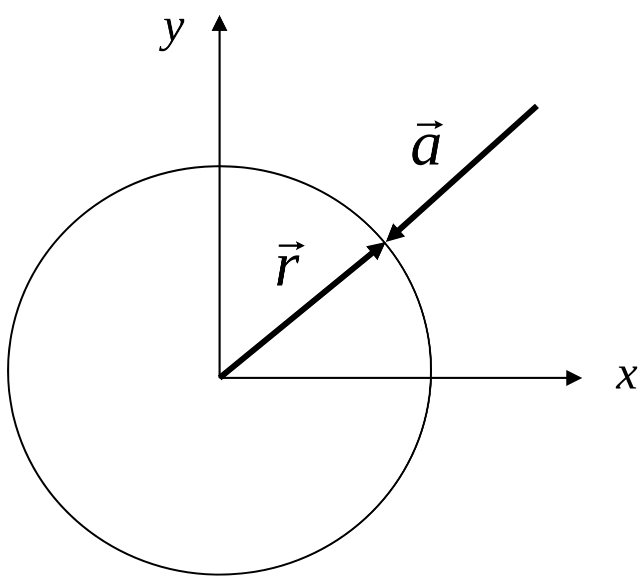


$$\vec{r} = R\cos\left(\omega t\right)\hat{x} + R\sin\left(\omega t\right)\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin\left(\omega t\right)\hat{x} + \omega R\cos\left(\omega t\right)\hat{y}$$

$$\left|\vec{v}\right| = \left|\omega R\right|$$

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos\left(\omega t\right)\hat{x} + R\sin\left(\omega t\right)\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin\left(\omega t\right)\hat{x} + \omega R\cos\left(\omega t\right)\hat{y}$$

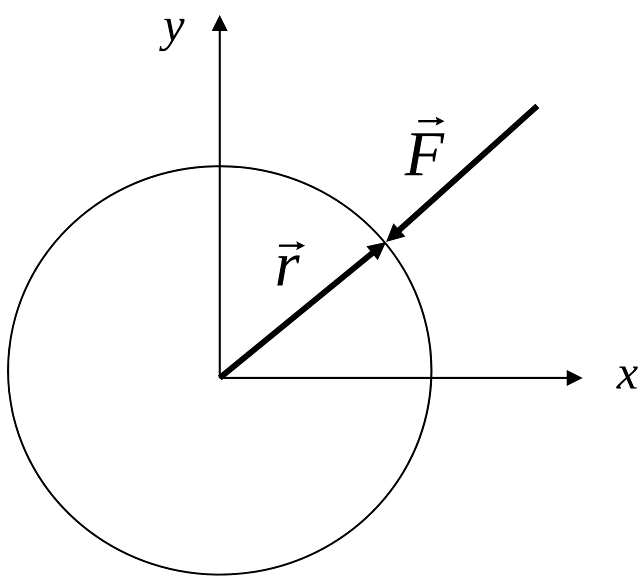
$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos\left(\omega t\right)\hat{x} - \omega^2 R\sin\left(\omega t\right)\hat{y}$$

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\omega^2 R\right| = \frac{\left|\vec{v}\right|^2}{R}$$

Zentrifugalbeschleunigung

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

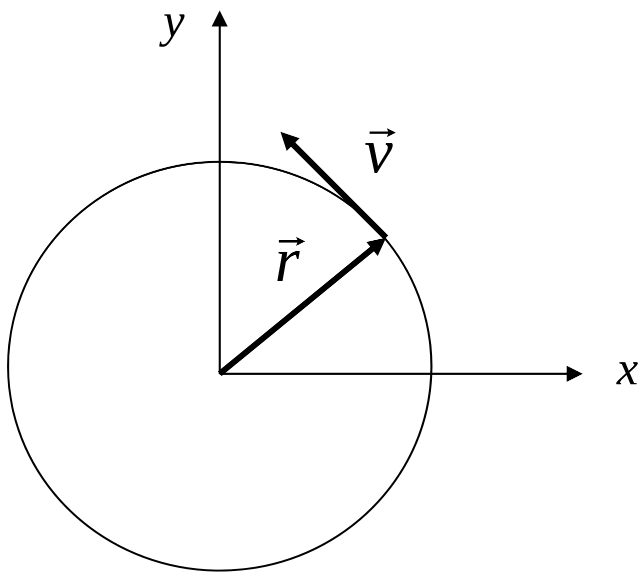
$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r}$$

$$\left|\vec{F}\right| = \left|m\omega^2 R\right| = \frac{m\left|\vec{v}\right|^2}{R}$$

Zentripetalkraft

Kreisbewegung

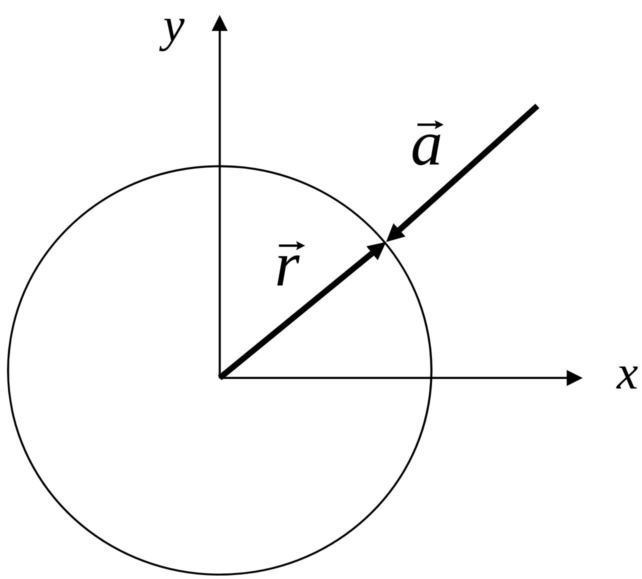


$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

$$|\vec{v}| = |\omega R|$$

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

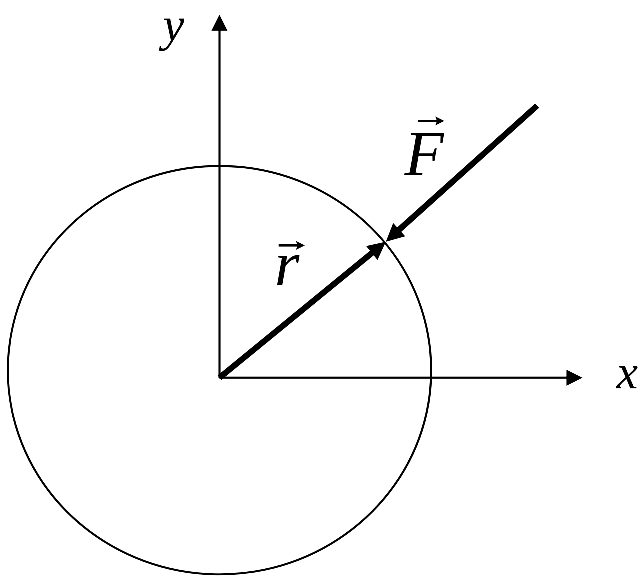
$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$|\vec{a}| = |\omega^2 R| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

Zentrifugalbeschleunigung

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r}$$

$$\left|\vec{F}\right| = \left|m\omega^2 R\right| = \frac{m\left|\vec{v}\right|^2}{R}$$

Zentrifugalkraft

Arbeit

- Unter welchem Umständen spricht man davon, dass Arbeit verrichtet wird?
- Wie hängt die Arbeit von der Kraft ab, ist dabei die Art der Kraft wichtig?
- Wie interpretiert man das Vorzeichen der Arbeit?

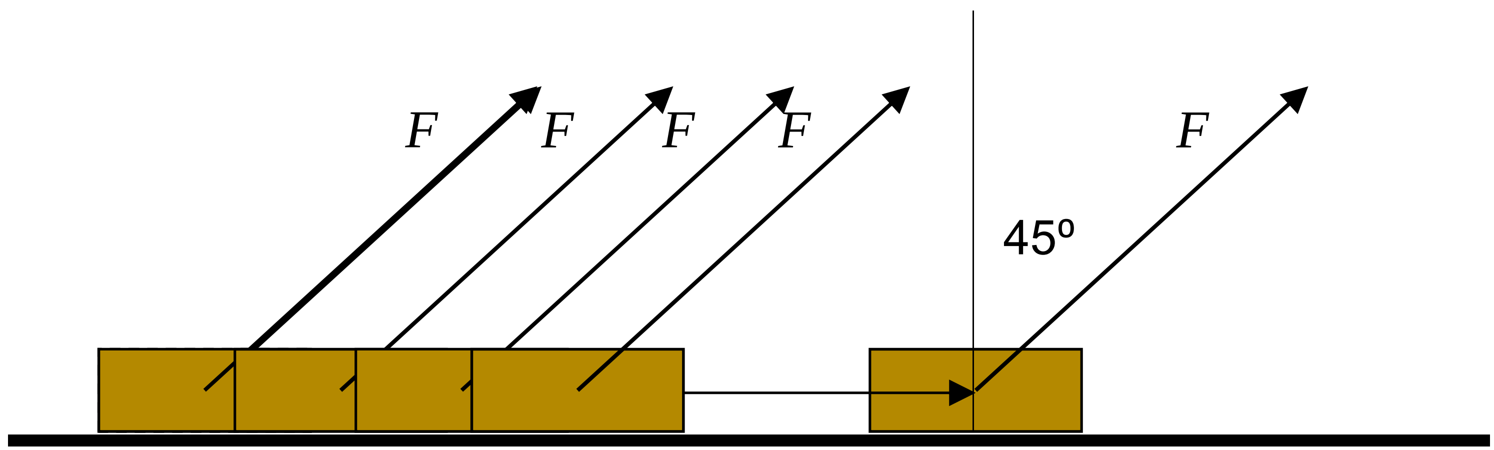
Hering, Physik für Ingenieure, Kap. 2.6

Arbeit

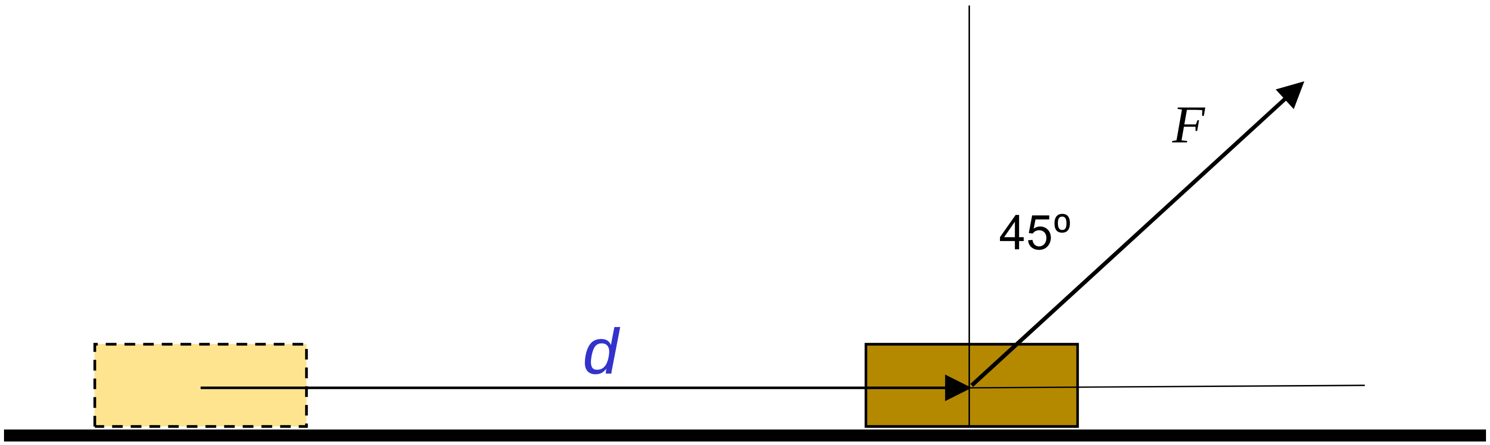
Eine Kraft verrichtet Arbeit, wenn sie durch ihre Einwirkung einen Körper von einem ursprünglichen Ort in die Richtung der Kraft verschiebt.

- **Wirkt eine Kraft auf einen Körper und verschiebt ihn dabei, so wird Arbeit verrichtet.**
- **Die Arbeit ist dem <u>Weg</u> und der <u>in Richtung des Weges gerichteten Kraftkomponente</u> proportional.**

Arbeit



Arbeit = Kraft · Verschiebungsweg



$$W = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, \Delta\vec{r})\ |\Delta\vec{r}|$$

Kraftkomponente parallel zur Bewegungsrichtung

Arbeit

Arbeit = Kraft ·Verschiebungsweg

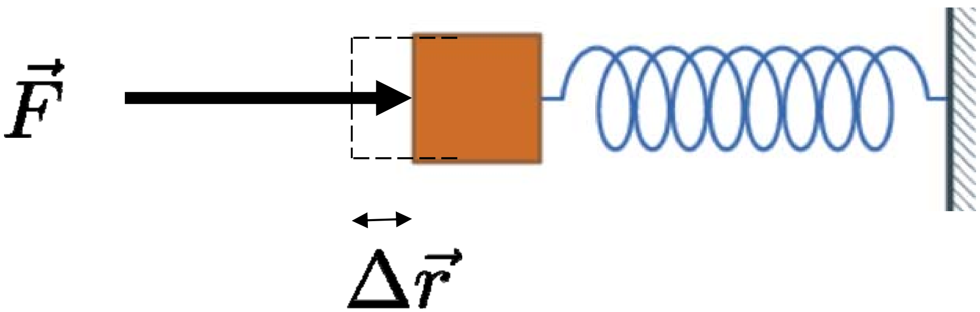
$$\Delta W = F \Delta r$$

Dimension: Masse x Länge² / Zeit²

SI-Einheit: Joule

$$[\mathrm{Nm}] = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}\right]\mathrm{m} = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^2}\right] = \mathrm{J}$$

Arbeit durch Kraft entlang Bewegungsrichtung

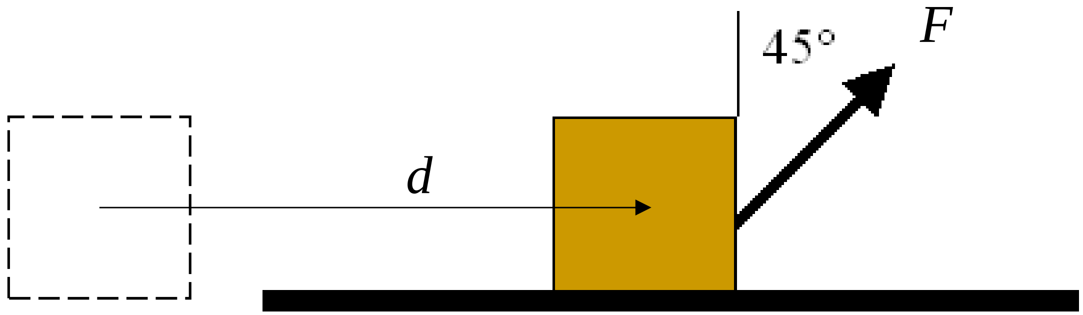


$$\Delta W = F\,\Delta r$$

Arbeit = Kraft $\cdot$ Verschiebungsweg

Arbeit

Kraftkomponente parallel zur Bewegungsrichtung!

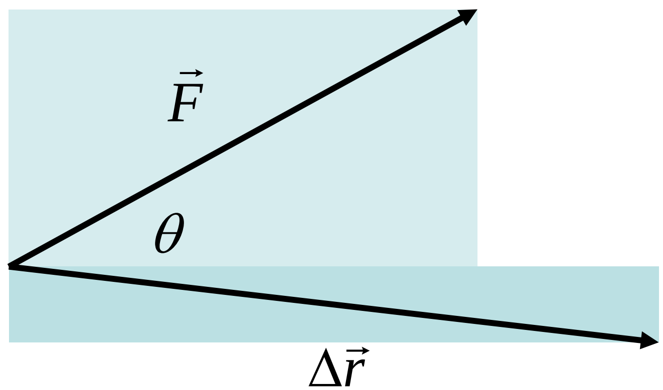


$$W\,?$$

$$W = |\vec{F}|\cos(\vec{F},\Delta\vec{r})|\Delta\vec{r}|$$

Skalarprodukt

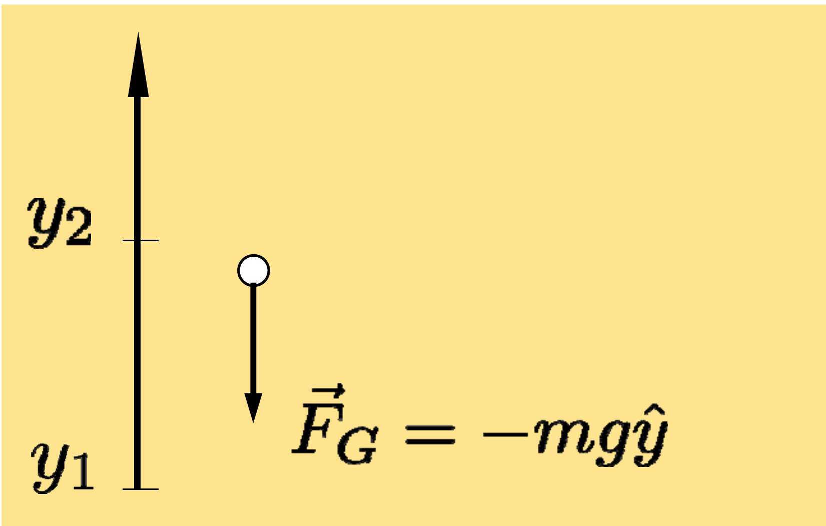
$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos(\vec{F}, \Delta\vec{r}) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$



$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F_x \Delta r_x + F_y \Delta r_y + F_z \Delta r_z$$

Arbeit, die man gegen eine konstante Kraft verrichten muss

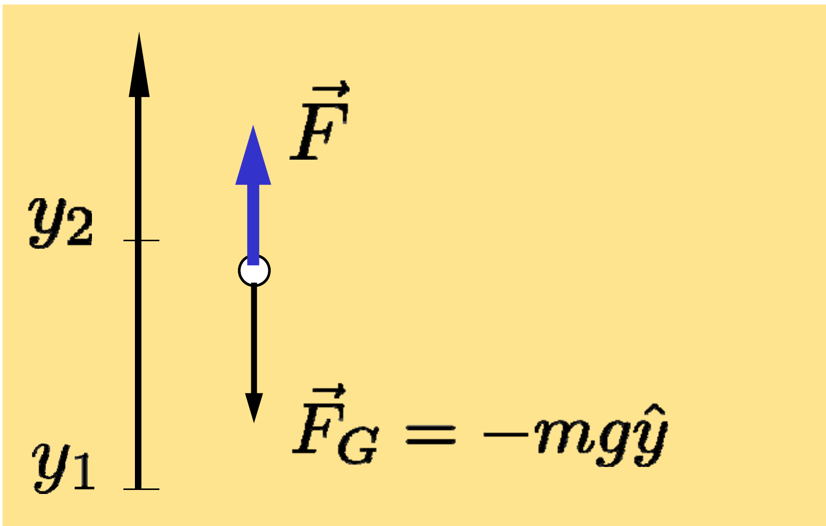
Hubarbeit **als Beispiel für ortsunabhängige Kräfte**



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = |y_2 - y_1|\hat{y} = |\Delta y|\hat{y}$$

Arbeit, die man gegen eine konstante Kraft verrichten muss

Hubarbeit **als Beispiel für ortsunabhängige Kräfte**



$\vec{F}$ ... notwendig um Körper entgegen der Gewichtskraft anzuheben

$$W_{12} = \vec{F}\Delta\vec{r} = -\vec{F}_G\Delta\vec{r}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = |y_2 - y_1|\hat{y} = |\Delta y|\hat{y}$$

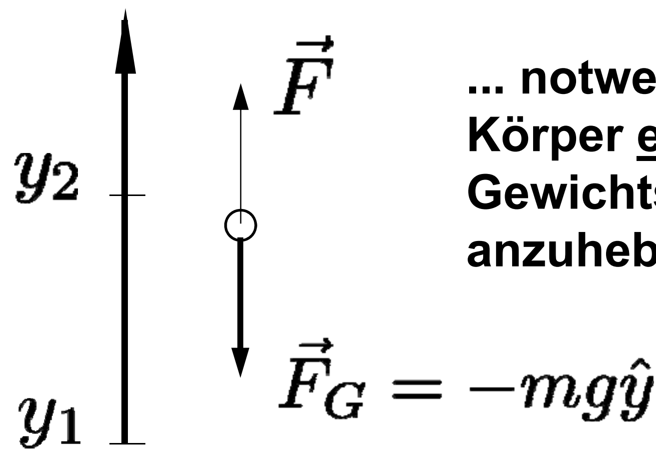
$$W_{12} = -\,mg|\Delta y|(-\hat{y})\cdot\hat{y} = mg|\Delta y|$$

Arbeit ist positiv, wenn die Verschiebung entgegengesetzt zur Kraftkomponente orientiert ist

Arbeit, die man gegen eine konstante Kraft verrichten muss

Beispiel für ortsunabhängige Kräfte

Hubarbeit



... notwendig um Körper entgegen der Gewichtskraft anzuheben

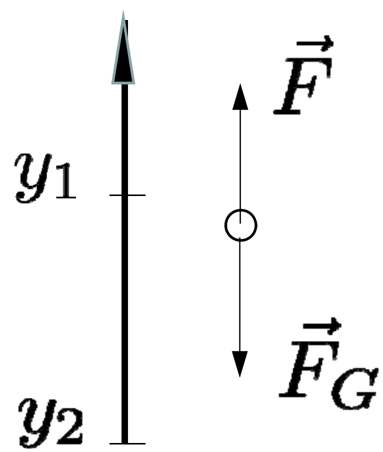
$$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = |y_2 - y_1|\hat{y} = |\Delta y|\hat{y}$$

$$W_{12} = \vec{F}\vec{s} = -\vec{F}_G\vec{s} = -\, mg|\Delta y|(-\hat{y}) \cdot \hat{y} = mg|\Delta y|$$

Arbeit ist positiv, wenn die Verschiebung entgegengesetzt zur Kraftkomponente orientiert ist

Arbeit, die man entlang einer konstanten Kraft verrichtet

Beispiel für ortsunabhängige Kräfte



... notwendig um den Körper bei angreifender Gewichtskraft nicht fallenzulassen

$$\vec{F}_G = -mg\hat{y}$$

$$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = |y_2 - y_1|(-\hat{y}) = |\Delta y|(-\hat{y})$$

$$W_{12} = \vec{F}\vec{s} = -\vec{F}_G\vec{s} = -\,mg|\Delta y|\;(-\hat{y})\cdot(-\hat{y}) = -mg|\Delta y|$$

Arbeit ist negativ, wenn die <u>Verschiebung</u> wie die zu ihr <u>parallele Kraftkomponente</u> <u>orientiert</u> ist

Verrichtete Arbeit durch konstante Kraft

Ein Objekt bewegt sich geradlinig von Position

$$\vec{r}_1 = 9\hat{x} - 6\hat{y} + 2\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

zu Position

$$\vec{r}_2 = 6\hat{x} - 5\hat{y} + 2\hat{z} \quad [\mathrm{m}],$$

während eine konstante Kraft

$$\vec{F} = 3\hat{x} + 7\hat{y} + 5\hat{z} \quad [\mathrm{N}].$$

auf das Objekt wirkt. Welche Arbeit wird durch diese Kraft verrichtet (die Arbeit kann negativ sein) ?

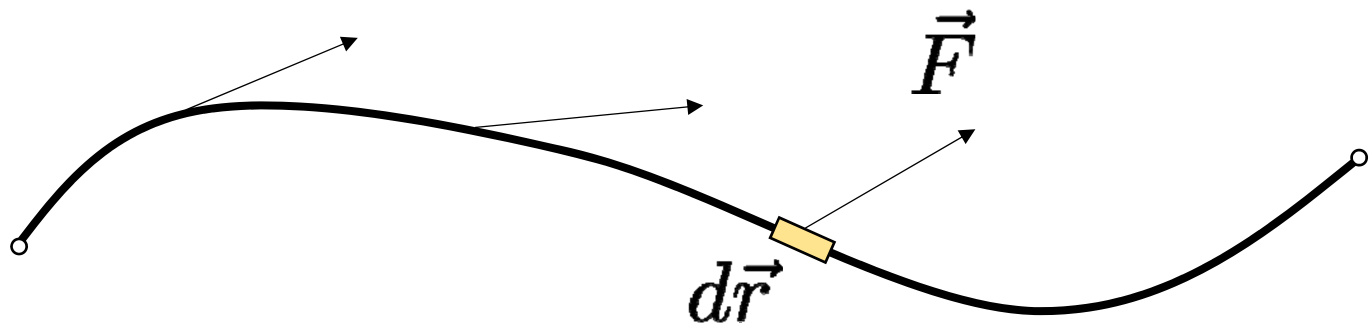
$W =$ ______ [J] Lösung

$W =$ 3(6-9)+7(-5+6)+5(2-2) = -2 [J].

Arbeit bei nichtkonstanter Kraft?

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Zerlegung des Verschiebungsweges in infinitesimale Wegstücke



$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dW = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Arbeit

$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$$

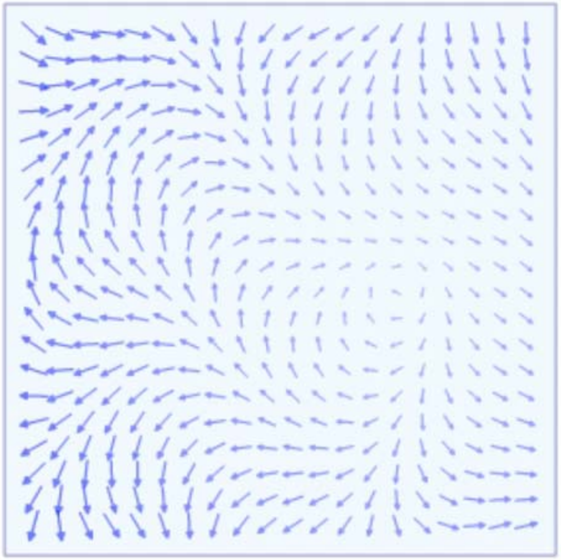
$$d\vec{r} = dx\ \hat{x} + dy\ \hat{y} + dz\ \hat{z}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\boxed{W = \int F_x\, dx + \int F_y\, dy + \int F_z\, dz}$$

Arbeit

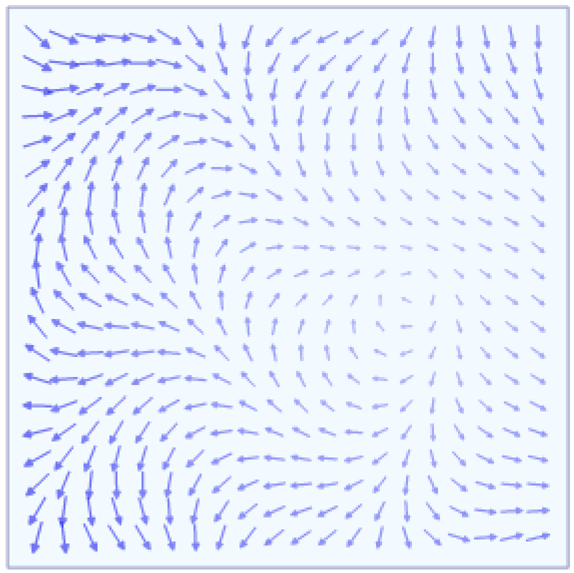
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



http://en.wikipedia.org/wiki/Line_integral

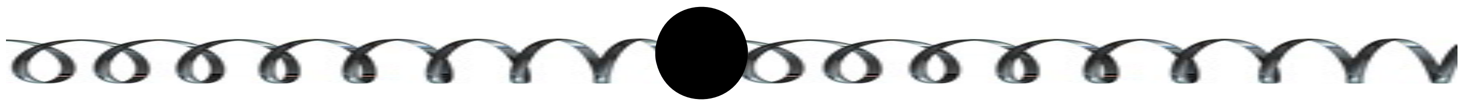
Arbeit

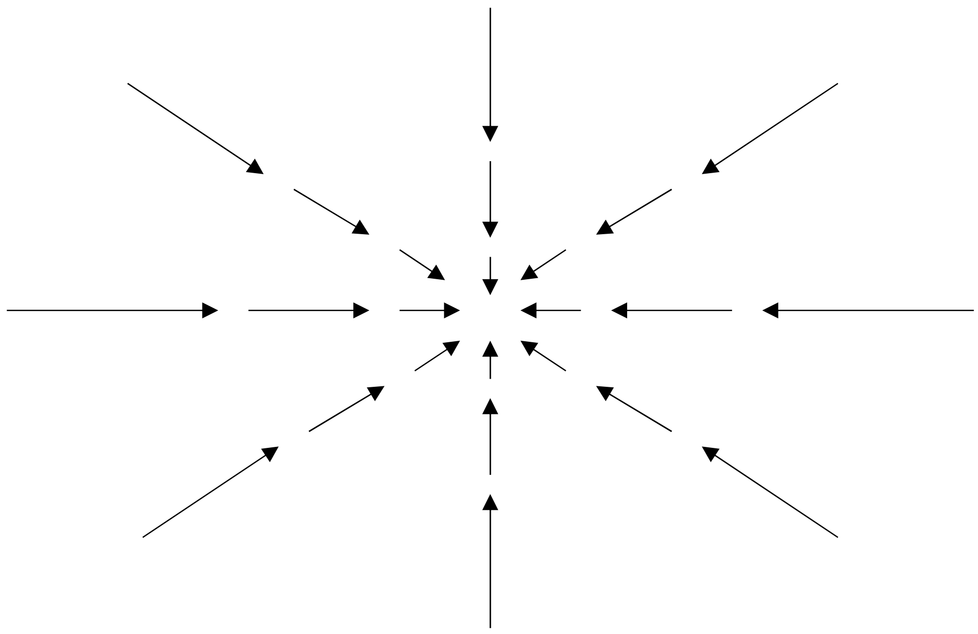
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



http://en.wikipedia.org/wiki/Line_integral

Kraftfeld





$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (1)$$

$\vec{F}(\vec{r}),\ \vec{r}$ bekannt

$$W = \int F_x(x)\, dx + \int F_y(y)\, dy + \int F_z(z)\, dz$$

Nichtlineare Feder

Die Kraft, die für das Zusammendrücken einer nichtlinearen Feder um die Strecke x benötigt wird, ist:

$$\vec{F} = 823x^{1.5}\hat{x} \quad [\mathrm{N}],$$

wobei x in Metern angegeben ist. Wieviel Arbeit wird verrichtet, wenn eine ursprünglich entspannte Feder um 7 Zentimeter zusammengedrückt wird?

$W =$ [J] Lösung

Die Arbeit ist das Integral des inneren Produktes (Skalarproduktes) aus der Kraft und der zurückgelegten Entfernung:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Da die Bewegung nur in x-Richtung erfolgt, gilt

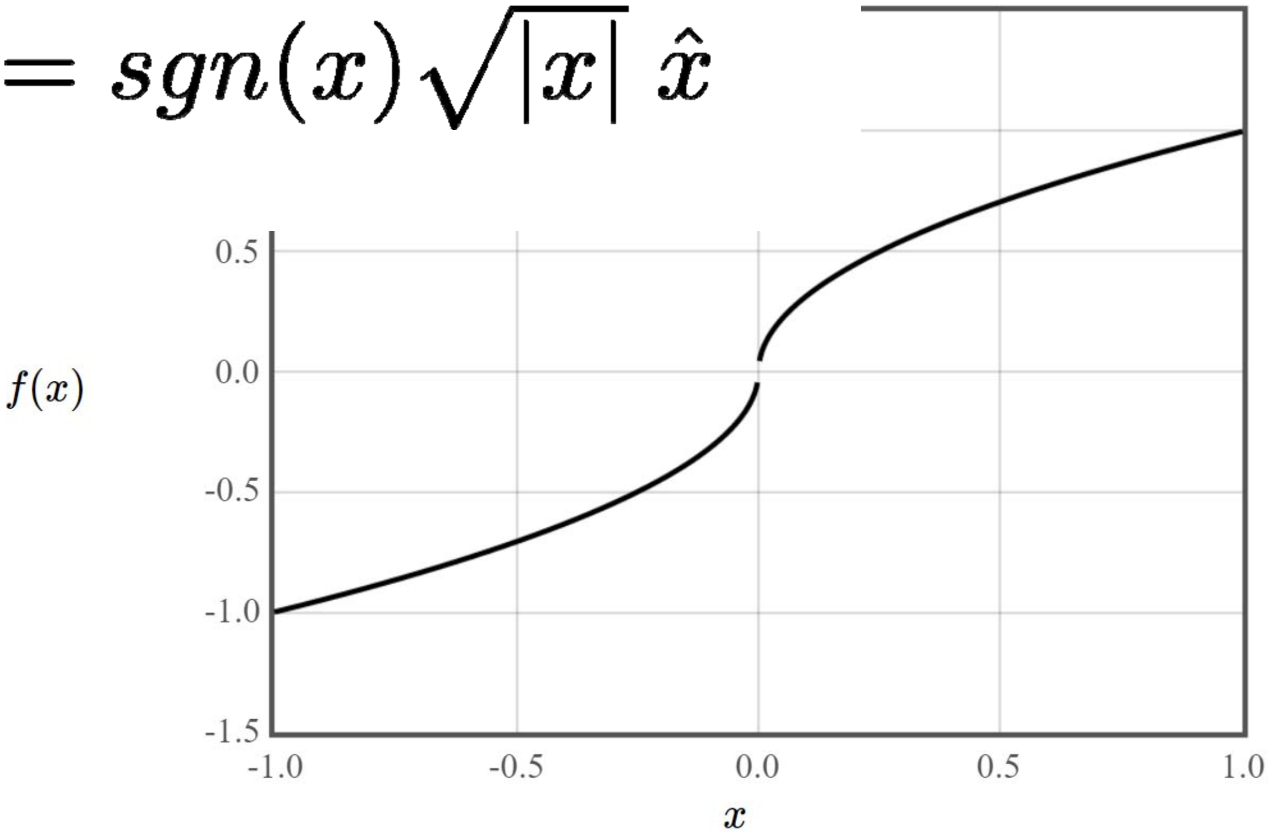
$$W = \int F_x dx = \int_0^{0.07} 823x^{1.5} dx = \frac{823}{2.5}\, x^{2.5}\Big|_0^{0.07}.$$

$$W = 0.427 \ [\mathrm{J}].$$

Dieses Integral kann auch numerisch bestimmt werden. Geben Sie 823*pow(x,1.5) in das Textfeld auf der APP Numerische Integration ein und scrollen Sie herab, um das Integral der Funktion zu finden.

Die Kraft, die für das Zusammendrücken einer nichtlinearen Feder um die Strecke x benötigt wird, ist:

$$\vec{F} = sgn(x)\sqrt{|x|}\;\hat{x}$$

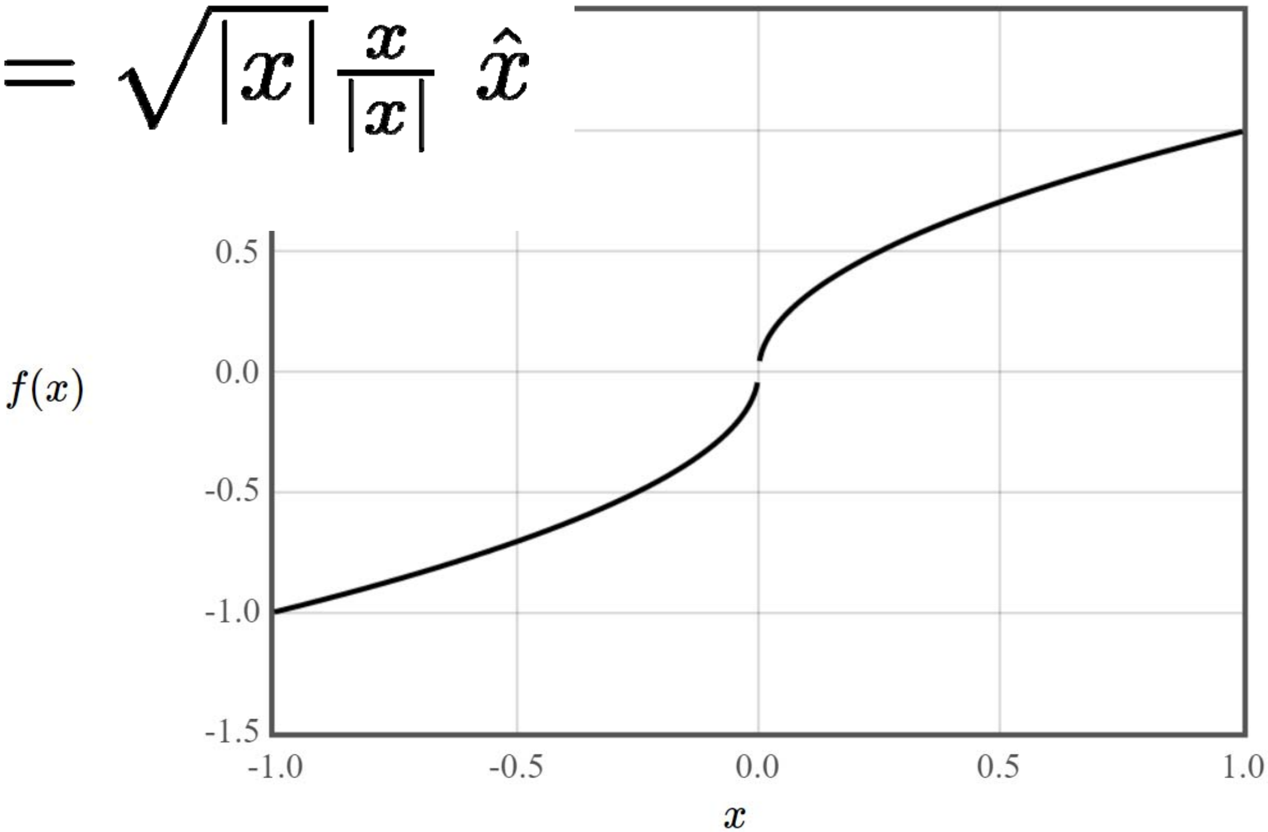


wobei x in Metern angegeben ist. Wieviel Arbeit wird verrichtet, wenn eine ursprünglich entspannte Feder um 7 Zentimeter zusammengedrückt wird?

$W =$ ______ [J] Lösung

Die Kraft, die für das Zusammendrücken einer nichtlinearen Feder um die Strecke x benötigt wird, ist:

$$\vec{F} = \sqrt{|x|}\frac{x}{|x|}\ \hat{x}$$



wobei x in Metern angegeben ist. Wieviel Arbeit wird verrichtet, wenn eine ursprünglich entspannte Feder um 7 Zentimeter zusammengedrückt wird?

$W =$ [J] Lösung

Numerische Integration und Differentiation

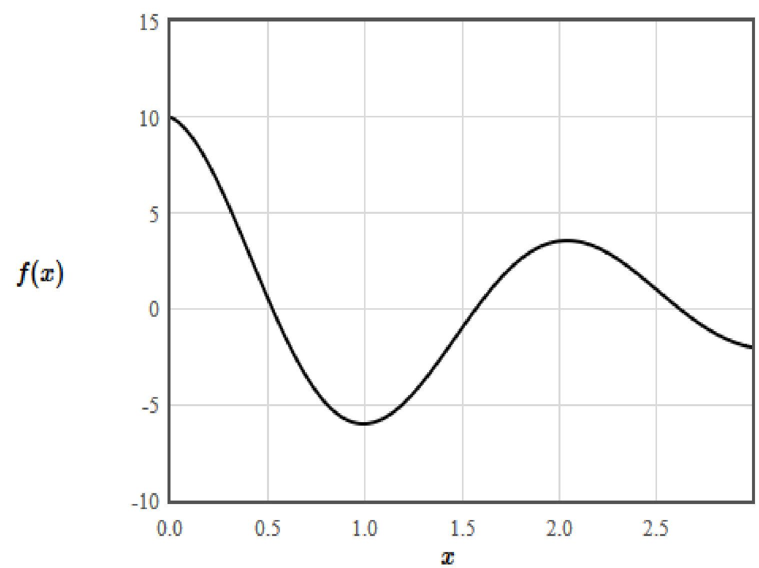
Diese Seite enthält einige Funktionen zur numerischen Integration und Differentiation. Ein Funktion $f(x)$ kann spezifiziert werden durch (i) Eingabe eines Ausdrucks in das obige Feld oder durch (ii) Einfügen zweier Datenspalten in die Textbox oben links.
Bei Click auf den "Fill table" Button wird der eingegebene Ausdruck benutzt, um die Tabelle mit 300 Werten $f(x)$ für äquidistante Argumente zwischen x_1 and x_2 zu befüllen.
Bei Click auf den "calculate from table" Button werden die Daten in einem Graph dargestellt (rechts).
Unter den Werten und dem Graphen von $f(x)$ werden die Werte der ersten, $\frac{df}{dx}$, und der zweiten Ableitung $\frac{d^2f}{dx^2}$ tabulliert und graphisch dargestellt. Unterhalb der Ableitungen wird das Integral von $f(x)$ sowie das Integral letzteren Integrals gezeigt. Die Routine zur Integration geht davon aus, daß die Meßdaten im Intervall Δx äquidistant sind.

$f(x) =$ 3*sin(pi*x) ?

Fill table from $x_1 =$ 0 to $x_2 =$ 1.

x	$f(x)$
0	10
0.01	9.945647572
0.02	9.882682786
0.03	9.811249286
0.04	9.731497077
0.05	9.64358233
0.06	9.547667174
0.07	9.443919485
0.08	9.332512681
0.09	9.2136255
0.1	9.087441788

calculate from table | Punkt ↔ Komma



Benötigte Arbeit um ein Elektron zu bewegen

Welche Arbeit wird benötigt, um ein Elektron von der Position

$$\vec{r}_1 = 2\hat{x} + 4\hat{y} + 6\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

zur Position

$$\vec{r}_2 = -4\hat{x} + 8\hat{y} + 3\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

in einem elektrischen Feld

$$\vec{E} = -6x\hat{x} - 9\hat{y} - 9z^2\hat{z} \quad [\mathrm{V/m}] \text{ zu bewegen?}$$

Die Kraft auf das Elektron lautet $-e\vec{E}$, wobei $-e = -1.6022 \times 10^{-19}$ C die Ladung des Elektrons ist.

$W =$ ______ [J] Lösung

Im Allgemeinen ist die Arbeit das Integral des inneren Produktes (Skalarproduktes) aus der Kraft und der zurückgelegten Entfernung:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_2^{-4} 6exdx - \int_4^8 9edy - \int_6^3 9ez^2 dz.$$

$$W = -\frac{6ex^2}{2}\Big|_2^{-4} - 9ey\Big|_4^8 - \frac{9ez^3}{3}\Big|_6^3.$$

$$W = 7.93 \times 10^{-17} \text{ [J]}.$$

Die Arbeit ist positiv, wenn sich das Elektron gegen die elektrostatische Kraft bewegt. Die Arbeit ist negativ, wenn es sich in die Richtung der elektrostatischen Kraft bewegt. Überprüfen Sie die Vorzeichen Ihrer Antwort.

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (2)$$

$\vec{F}(t),\ \vec{r}(t)$ ist bekannt

$$\begin{aligned} W &= \int F_x(t) v_x(t)\, dt \\ &+ \int F_y(t) v_y(t)\, dt \\ &+ \int F_z(t) v_z(t)\, dt \end{aligned}$$

Arbeit der Trägheitskraft

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

$$\boxed{W_{12} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}}$$

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dW = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1(\vec{r}_1)}^{t_2(\vec{r}_2)} m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

$$= \int_{v_1(\vec{r}_1)}^{v_2(\vec{r}_2)} m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Arbeit der Trägheitskraft

$$W_{12} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$$

Beschleunigung parallel zur Geschwindigkeit

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dW = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1(\vec{r}_1)}^{t_2(\vec{r}_2)} m \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}} \cdot \vec{v} dt$$

$$= \int_{v_1(\vec{r}_1)}^{v_2(\vec{r}_2)} m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

gleichförmige Kreisbewegung:

$$d\vec{v} \perp \vec{v}$$

$$W_{12} = 0$$